F 762

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R. P. R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XIII, nr. 1 1962

## SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Asupra măsurabilităţii grupurilor lui Lie . . . . . 7

D. BARBILIAN şi N. RADU, *J*-metricele naturale finsleriene şi funcţia de reprezentare a lui Riemann . . . . . 21

SOLOMON MARCUS, Asupra unui model logic al părţii de vorbire . . . . . 37

L. DRAGOŞ, Mişcarea unui fluid viscos în tuburi elastice, cu referire la hemodinamică. I . . . . . 63

ION I. CRISTEA, Două extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue. I . . . 75

E. BALAŞ şi P. IVĂNESCU, În legătură cu problema transporturilor. V. Probleme de transporturi cu producţie neomogenă . . . . . 97

PETRU HAMBURG, Despre continuitatea operaţiei de intersecţie . . . . . 107

M. BALÁZS, D. BORŞAN, M. FRODA-SCHECHTER şi P. HAMBURG, Operatori în mulţimi de părţi . . . . . 113

NICOLAE O. ZAHARIA, Curbe iterate . . . . . 127

L. DRAGOŞ, Oscilaţiile elastice ale tubului cilindric . . . . . 143

ION I. CRISTEA, Asupra mişcărilor tridimensionale permanente ale fluidelor barotrope . . . . . 155

N. MIHĂILEANU, Primele cursuri de matematici superioare în Bucureşti . . 173

*RECENZII* . . . . . 189

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XIII, n° 1 1962

## SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Sur la mesurabilité des groupes de Lie · · · · · · · · · 7

D. BARBILIAN et N. RADU, Les *J*-métriques finslériennes naturelles et la fonction de représentation de Riemann · · · · · · · · · · · · · · · 21

SOLOMON MARCUS, Sur un modèle logique de la partie du discours · · · 37

L. DRAGOŞ, Mouvement d'un fluide visqueux dans des tubes élastiques, du point de vue de l'hémodynamique. I · · · · · · · · · · · · · · · · · · 63

ION I. CRISTEA, Deux extensions des intégrales de Riemann et de Lebesgue. I 75

E. BALAŞ and P. IVĂNESCU, On the transportation problem. V. Transportation problems with nonhomogeneous products · · · · · · · · · 97

PETRU HAMBURG, Sur la continuité de l'opération d'intersection · · · · 107

M. BALÁZS, D. BORŞAN, M. FRODA-SCHECHTER et P. HAMBURG, Opérateurs dans des ensembles de parties · · · · · · · · · · · · · · · 113

NICOLAE O. ZAHARIA, Courbes itérées · · · · · · · · · · · · · · · · · 127

L. DRAGOŞ, Oscillations élastiques du tube cylindrique · · · · · · · · · 143

ION I. CRISTEA, Sur les mouvements permanents à trois dimensions des fluides barotropes · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 155

N. MIHĂILEANU, Les premiers cours de mathématiques supérieures à Bucarest 173

*COMPTES RENDUS* · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 189

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том. XIII, № 1 1962

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, Об измеримости групп Ли . . . . . 7

Д. БАРБИЛИАН и Н. РАДУ, Финслеровые естественные $J$-метрики и функция отображения Римана . . . . . 21

СОЛОМОН МАРКУС, О логической модели части речи . . . . . 37

Л. ДРАГОШ, Движение вязкой жидкости в упругих трубах со ссылкой на гемодинамику. I . . . . . 63

ИОН И. КРИСТЯ, Два обобщения интегралов Римана и Лебега I 75

Е. БАЛАШ и П. ИВЭНЕСКУ, К транспортной задаче. V. Транспортные задачи с неоднородной продукцией . . . . . 97

П. ГАМБУРГ, О непрерывности степени пересечения . . . . . 107

М. БАЛАШ, Д. БОРШАН, М. ФРОДА-ШЕХТЕР и П. ГАМБУРГ, Операторы в множествах подмножеств . . . . . 113

НИКОЛАЕ О. ЗАХАРИЯ, Итерированные кривые . . . . . 127

Л. ДРАГОШ, Упругие колебания цилиндрической трубы . . . . . 143

ИОН И. КРИСТЯ, О постоянных трехмерных движениях баротропных жидкостей . . . . . 155

Н. МИХЭЙЛЯНУ, Первые лекции по высшей математике в Бухаресте . 173

*РЕЦЕНЗИИ* . . . . . 189

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# ASUPRA MĂSURABILITĂȚII GRUPURILOR LUI LIE *)

DE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU

Un grup Lie $G_r$ tranzitiv în $n$ variabile ($r > n$) se numește măsurabil dacă admite un invariant integral. Această noțiune apare în calculul probabilităților și condițiile de măsurabilitate ale grupurilor au fost date de R. Deltheil în 1926, în cartea sa *Probabilités Géométriques* sub forma unui sistem cu diferențiale totale. În 1940 Shiing Shen Chern a considerat, fără a-l cita pe Deltheil, problema de a ști în ce condiții determinantul a $n$ forme Pfaff, lăsate invariante de grup, constituie un invariant integral. Problema lui Chern a fost considerată apoi de Santaló în cartea sa *Introduction to integral geometry* (1953), de asemenea fără a utiliza rezultatele lui Deltheil.

Sistemul lui Deltheil a fost pus foarte recent sub o formă diferită de Stoka, care a considerat de asemenea condițiile de integrabilitate ale acestui sistem.

Scopul acestei lucrări este de a da acestor sisteme, al lui Deltheil și al lui Stoka și condițiilor de integrabilitate ale lor, forme diferite mai simple și de asemenea anumite rezultate, în particular o teoremă relativă la măsurabilitatea unui grup $G_n$ care posedă un subgrup simplu tranzitiv $G_n$ perfect și invariant. De asemenea, arătăm că un grup Lie este măsurabil Deltheil dacă este măsurabil Chern și invers.

## I

Fiind dat un grup Lie $G_r$ cu $r$ parametri

$$y^i = y^i(x^i, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r), \tag{1}$$

se spune că funcția $F(x^1, \ldots, x^n)$ este o funcție invariantă integral a grupului $G_r$ dacă avem

$$\int_{A_x} F(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{A_y} F(y^1, \ldots, y^n)\, dy^1 \ldots dy^n, \tag{2}$$

pentru fiecare domeniu $A_x$ pe care integrala are sens.

*) Lucrare comunicată la „Colocviul de geometrie" de la Cracovia (R. P. Polonă), octombrie 1961.

Ținînd seamă de formulele (1) rezultă că trebuie să avem

$$F(x^1, \ldots, x^n) = \mathcal{D} F(y^1, \ldots, y^n), \tag{3}$$

unde $\mathcal{D}$ este determinantul funcțional al transformării (1). Trebuie deci ca membrul doi al formulei (3) să fie independent de parametrii $a^1 \ldots a^r$.

R. Deltheil*) a arătat că această condiție este echivalentă cu faptul că funcția $F$ trebuie să satisfacă condițiile

$$\frac{\partial}{\partial x^i}[\xi_h^i(x) F(x)] = 0, \tag{4}$$

unde $\xi_h^i (h = 1 \ldots r)$ sînt componentele celor $r$ operatori ai transformărilor infinitezimale ale grupului $G_r$.

Cum aceste ecuații se scriu

$$\xi_h^i \frac{\partial F}{\partial x^i} + F \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i} = 0, \tag{5}$$

rezultă că, în cazul în care grupul este tranzitiv, sistemul (4) este un sistem cu diferențiale totale, deci admite cel mult o soluție, abstracție făcînd de înmulțirea cu o constantă arbitrară. M. Stoka a arătat că, pentru ca sistemul (4) al lui Deltheil să admită, pentru $r > n$, efectiv o soluție, trebuie ca $\xi_h^i$ să satisfacă la anumite ecuații algebrice avînd drept coeficienți componentele tensorului de structură al grupului $G_r$**).

Pentru a ajunge la ecuațiile lui Deltheil, vom pune ecuațiile (1) ale unui grup $G_r$ sub forma***)

$$y^i = x^i + \xi_h^i(x) a^h + \frac{1}{2} \xi_{hk}^i(x) a^h a^k + \ldots, \tag{6}$$

unde coeficienții $\xi_{hk}^i(x)$ și de asemenea coeficienții termenilor de ordin superior în $a^h$ depind de $\xi_h^i$, de îndată ce $\xi_h^i$ sînt cunoscuți.

Deci avem

$$\mathcal{D} = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| = \left| \delta_j^i + \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^j} a^h + \ldots \right|$$

de unde obținem

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i} a^h + \ldots,$$

termenii nescriși fiind de ordinul doi în $a^h$.

---

*) R. Deltheil, *Probabilités géométriques*. Paris, 1926, 28.

**) M. Stoka, *Asupra grupurilor măsurabile dintr-un spațiu* $E_n$. Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, 581–585 (1957) și **IX**, 5–10 (1959).

***) G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, **I**, Bucarest, 1957, 68.

De asemenea, avem

$$F(y^1, \ldots, y^n) = F(x^1, \ldots, x^n) + \frac{\partial F}{\partial x^i}\, \xi_h^i\, a^h .$$

Introducînd aceste expresii în formula (3) și scriind că termenii de primul ordin în $a^h$ sînt nuli, obținem condițiile lui Deltheil. Rezultă de asemenea că (4) sînt condițiile necesare pentru ca funcția $F$ să fie o funcție invariantă integral a transformărilor (1), dar se poate demonstra că ele sînt de asemenea suficiente dacă transformările (1) formează grup. În adevăr, se verifică aici un principiu bine cunoscut în teoria grupurilor Lie și anume că este suficient ca o proprietate să fie adevărată pentru transformările infinitezimale ale grupului.

Observăm acum că ecuațiile (5) se pot scrie

$$\xi_h^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i} = 0 \qquad (f = \log F), \tag{6'}$$

deci dacă aceste ecuații au două soluții, să zicem $F$ și $F_1$, funcția $\varphi = \log \dfrac{F_1}{F}$ satisface ecuația

$$\xi_h^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0.$$

Aceasta ne spune că funcția $\varphi$ este o funcție invariantă a grupului $G_r$. Or se știe că un grup poate avea funcții invariante doar dacă este intranzitiv. Avem deci teorema lui Deltheil:

*Dacă un grup intranzitiv admite o funcție invariantă integral $F$, toate celelalte funcții invariante integral sînt de forma*

$$F_1 = F\, e^{\varphi},$$

*unde $\varphi$ este o funcție invariantă.*

Putem de asemenea remarca că, dacă grupul $G_r$ are o funcție invariantă integral, se poate presupune, printr-o schimbare de variabile, că această funcție este egală cu unitatea, deci că grupul posedă un volum invariant.

În acest caz punînd

$$p_h = \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i} \qquad (h = 1, \ldots, r), \tag{6''}$$

formulele (5) ne spun că $p_h$ trebuie să fie toți nuli.

Vom presupune că determinantul $\Delta = |\xi_u^i|$ $(u = 1, \ldots, n)$ este diferit de zero. În acest caz putem pune

$$\xi_\alpha^i = \xi_u^i\, \sigma_\alpha^u \qquad (\alpha = n + 1, \ldots, r), \tag{7}$$

căci aceasta înseamnă că avem

$$\sigma_\alpha^u = \xi_\alpha^i \overline{\xi}_i^u,$$

unde $\overline{\xi}_i^u$ sînt reciprocii lui $\Delta$. Vom observa de asemenea că dacă ne aranjăm ca $\xi_\alpha^i$ să fie vectorii grupului de stabilitate, atunci $\sigma_\alpha^u$ sînt nuli în origine.

Scriind sistemul (6′) sub forma

$$X_u f + p_u = 0 \qquad \left(X_u f = \xi_u^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

$$p_u \sigma_\alpha^u = p_\alpha \tag{8}$$

rezultă că funcțiile $p_\alpha$ sînt de asemenea nule în origine.

Ținînd seamă de (7), ultimele ecuații (8) se scriu

$$\xi_u^i \frac{\partial \sigma_\alpha^u}{\partial x^i} = 0. \tag{8′}$$

Rezultă că problema constă în a vedea dacă primele ecuații (8) pot să aibă soluții și pot să existe funcții $\sigma_\alpha^u$ neconstante, satisfăcînd ecuațiile (8′).

Avem, în consecință, teorema :

*O condiție necesară ca transformările* (1) *să posede o funcție invariantă integral este ca ecuațiile*

$$X_u f + p_u = 0 \qquad \left(X_u f = \xi_u^i \frac{\partial f}{\partial x^i},\ p_u = \frac{\partial \xi_u^i}{\partial x^i}\right) \tag{8″}$$

*să admită o soluție și ca* $\sigma_\alpha^u$ *să fie soluțiile ecuațiilor* (8′).

Vom presupune acum că transformările (1) formează grup. Avem deci formulele

$$\xi_h^j \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x^j} - \xi_k^j \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^j} = c_{hk}^l \xi_l^i, \tag{9}$$

formule care se mai pot scrie

$$X_h (X_k f) - X_k (X_h f) = c_{hk}^l X_l f.$$

Ținînd seama de formulele (6′), aceste formule se scriu

$$\xi_h^j \frac{\partial p_k}{\partial x^j} - \xi_k^j \frac{\partial p_h}{\partial x^j} = c_{hk}^l p_l \tag{9′}$$

și constituie deci condițiile de integrabilitate.

Avem deci teorema :

*Pentru ca un grup* $G_r$ $(r \geqslant n)$ *să admită o funcție invariantă integral trebuie ca* $\xi_u^i$ *și* $\xi_\alpha^i$ *să satisfacă ecuațiile* (9′), *unde* $p_h$ *sînt definite de* (6″) *și unde* $c_{hk}^l$ *sînt constantele de structură ale grupului.*

Dacă funcția invariantă integral este o constantă, deci dacă $p_h$ sînt nule, singurele ecuații neidentic satisfăcute sînt ecuațiile (8'). Aceste ecuații sînt în număr de $r-n$ deci ele admit o infinitate de soluții. Rezultă că, în general, fiind dat un grup $G_n$ simplu tranzitiv măsurabil, există o infinitate de grupuri $G_r$ $(r > n)$ măsurabile care-l conțin pe $G_n$ ca subgrup.

Vom presupune că $G_r$ este tranzitiv și că $r > n$. În acest caz putem face să apară, în formulele (9), $\xi_u^i$ și $\sigma_\alpha^u$ în loc de $\xi_\alpha^i$. Într-adevăr, formulele (9) pentru $h$, $k \leqslant n$ se scriu

$$\xi_u^j \frac{\partial \xi_v^i}{\partial x^j} - \xi_v^j \frac{\partial \xi_u^i}{\partial x^j} = (c_{uv}^t + c_{uv}^\alpha \sigma_\alpha^t)\, \xi_t^i \qquad (u, v, t \leqslant n). \tag{9''}$$

De asemenea, formulele (9) pentru $h \leqslant n$ și $k > n$ se scriu

$$\xi_t^i \xi_u^j \frac{\partial \sigma_\alpha^t}{\partial x^j} + \left( \xi_u^j \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^s} - \xi_t^j \frac{\partial \xi_u^i}{\partial x^j} \right) \sigma_\alpha^t = (c_{u\alpha}^t + c_{u\alpha}^\rho \sigma_\rho^t) \xi_t^i$$

astfel că, ținînd seama de (9'') și de faptul că determinantul $|\xi_t^i|$ este diferit de zero, obținem ecuațiile

$$\xi_u^j \frac{\partial \sigma_\alpha^t}{\partial x^j} = \sigma_\alpha^s (c_{su}^t + c_{su}^\rho \sigma_\rho^t) + c_{u\alpha}^t + c_{u\alpha}^\rho \sigma_\rho^t. \tag{9'''}$$

Ele ne spun că operatorii $X_u(\sigma_\alpha^t)$ sînt funcții de $\sigma$. Considerînd condițiile de integrabilitate

$$X_u(X_v(\sigma_\alpha^t)) - X_v(X_u(\sigma_\alpha^t)) = (c_{uv}^s + c_{uv}^\rho \sigma_\rho^s)\, X_s(\sigma_\alpha^t), \tag{9^{IV}}$$

obținem relații în termeni finiți în $\sigma_\alpha^t$, care sînt evident verificate dacă grupul $G_r$ este un grup tranzitiv în $n$ variabile.

Ecuațiile (9) pentru $h$, $k$ mai mari decît $n$, ne dau de asemenea relații în termeni finiți în $\sigma_\alpha^t$.

Rezultă deci că fiind dată o structură oarecare a unui grup $G_r$ avem un mijloc de a ști dacă această structură este compatibilă cu un grup tranzitiv $G_r$ în $n$ variabile.

Dacă acest grup $G_r$ este măsurabil, ecuațiile (8') devin, ținînd cont de (9''),

$$-\sigma_\alpha^s (m_s + c_{ts}^\rho \sigma_\rho^t) + m_\alpha + c_{t\alpha}^\rho \sigma_\rho^t = 0, \tag{10}$$

unde am pus $m_t = c_{tt}^t$. Avem deci relații în termeni finiți în $\sigma_\alpha^t$. În cazul în care $\xi_\alpha^i$ sînt vectorii grupului de stabilitate rezultă deci că trebuie să avem

$$m_\alpha = 0. \tag{10'}$$

În consecință, pentru ca un grup $G_r$ tranzitiv să fie măsurabil trebuie ca ecuațiile (10') să fie verificate cînd $\xi_\alpha^i$ sînt vectorii grupului de stabilitate. Vom vedea în partea a doua a acestei lucrări că această condiție este și suficientă.

Ecuațiile (10) au fost date de M. Stoka sub forma

$$c^l_{uv}\,\xi^t_l\,\overline{\xi}^u_t\,\xi^i_k\,\overline{\xi}^v_i - c^l_{uk}\,\xi^t_l\,\overline{\xi}^u_t = 0, \tag{10''}$$

unde $k$ variază de la 1 la $r$, dar se vede ușor că, dacă $k$ variază de la 1 la $n$, ecuațiile (10'') sînt identic nule și pentru $k = \alpha$ coincid cu ecuațiile (10) ținînd seama că avem formulele

$$\xi^i_v\,\overline{\xi}^u_i = \delta^u_v, \qquad \xi^i_\alpha\,\overline{\xi}^u_i = \sigma^u_\alpha \tag{10'''}$$

unde $\delta^u_v$ este simbolul lui Kronecker.

## II

Să arătăm cum M. Stoka a dat o altă formă ecuațiilor lui Deltheil. Pentru aceasta să multiplicăm ecuațiile (9) pentru $h = u = 1, \ldots, n$ cu $\overline{\xi}^u_s$ și să sumăm în raport cu $n$.

Obținem

$$\frac{\partial \xi^i_k}{\partial x^s} = \xi^j_k \frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j}\overline{\xi}^u_s + c^l_{uk}\,\xi^i_l\,\overline{\xi}^u_s,$$

astfel că, punînd $i = s$ și sumînd obținem pentru cantitățile $p_h$ formulele

$$p_h = \xi^j_h \frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j}\overline{\xi}^u_i + c^l_{uh}\,\xi^i_l\,\overline{\xi}^u_i.$$

Pe de altă parte, notînd cu $\Delta$ determinantul $|\xi^i_u|$ avem

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial \xi^i_u} = \overline{\xi}^u_i,$$

astfel încît, multiplicînd cu $\dfrac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j}$ obținem

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \xi^i_u}\cdot\frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j} = \frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j}\overline{\xi}^u_i,$$

deci putem scrie

$$p_h = \xi^j_h \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} + c^l_{uh}\,\xi^i_l\,\overline{\xi}^u_i.$$

Introducînd această relație în ecuațiile (4), obținem sistemul lui Stoka

$$\xi^j_h \frac{\partial \log F\Delta}{\partial x^j} = c^l_{uh}\,\xi^i_l\overline{\xi}^u_i, \tag{11}$$

care este echivalent, în cazul în care transformările (1) formează grup, cu sistemul lui Deltheil.

Pe de altă parte, ținînd seama de (10'''), avem formulele

$$p_h = \xi_h^j \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} + m_h + c_{uh}^{\beta} \sigma_{\beta}^u,$$

unde am pus

$$m_h = c_{uh}^u,$$

și sistemul (11) devine

$$\begin{aligned} \xi_u^j \frac{\partial \log F\Delta}{\partial x^j} &= m_u + c_{tu}^{\alpha} \sigma_{\alpha}^t, \\ \xi_u^j \sigma_{\alpha}^u \frac{\partial \log F\Delta}{\partial x^j} &= m_{\alpha} + c_{t\alpha}^{\beta} \sigma_{\beta}^t. \end{aligned} \tag{11'}$$

Ținînd seamă de primele dintre aceste ecuații în ultimele, obținem ecuațiile în termeni finiți (10).

În ceea ce privește condițiile de integrabilitate ale primelor ecuații (11') ele se scriu

$$X_u(X_v f) - X_v(X_u f) = c_{uv}^l X_l f,$$

unde am pus

$$X_l f = \xi_l^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = m_l + c_{sl}^{\alpha} \sigma_{\alpha}^s.$$

Deci, ținînd seamă că $X_u$ $(\sigma_{\alpha}^t)$ sînt definiți de (9'''), avem

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^s\left(c_{tv}^{\alpha} c_{su}^t + c_{tv}^{\alpha} c_{su}^{\rho} \sigma_{\rho}^t\right) + c_{tv}^{\alpha} c_{u\alpha}^t + c_{tu}^{\alpha} c_{u\alpha}^{\rho} \sigma_{\rho}^t - \sigma_{\alpha}^s\left(c_{tu}^{\alpha} c_{sv}^t + c_{tu}^{\alpha} c_{sv}^{\rho} \sigma_{\rho}^t\right) - \\ - c_{tu}^{\alpha} c_{v\alpha}^t - c_{tu}^{\alpha} c_{v\alpha}^{\rho} \sigma_{\rho}^t = c_{uv}^l m_l + c_{uv}^l c_{sl}^{\alpha} \sigma_{\alpha}^s. \end{aligned}$$

Or, se poate ușor verifica că termenii pătratici în $\sigma_{\alpha}^t$ sînt identic nuli, în timp ce termenii liniari sînt nuli în baza relațiilor pătratice ale lui Lie. Putem deci scrie aceste relații sub forma

$$c_{tv}^{\alpha} c_{u\alpha}^t - c_{tu}^{\alpha} c_{v\alpha}^t - c_{uv}^l m_l = 0. \tag{12}$$

Pe de altă parte să considerăm relațiile pătratice ale lui Lie

$$c_{sp}^h c_{uv}^s + c_{su}^h c_{vp}^s + c_{sv}^h c_{pu}^s + c_{\alpha p}^h c_{uv}^{\alpha} + c_{\alpha u}^h c_{vp}^{\alpha} + c_{\alpha v}^h c_{pu}^{\alpha} = 0. \tag{13}$$

Dacă facem $h = p = t \leqslant n$ și sumăm, obținem relațiile

$$- m_s c_{uv}^s + c_{su}^t c_{vt}^s + c_{sv}^t c_{tu}^s - m_{\alpha} c_{uv}^{\alpha} + c_{\alpha u}^t c_{vt}^{\alpha} + c_{\alpha v}^t c_{tu}^{\alpha} = 0.$$

Cum cel de-al doilea și al treilea termen se distrug, rezultă că relațiile (12) sînt identic verificate.

Avem deci teorema :

*Un grup $G_r$ este măsurabil dacă $\sigma_\alpha^t$ verifică ecuațiile* (10).

Presupunînd că grupul $G_r$ este simplu tranzitiv, deci că $r = n$, ecuațiile (11′) devin

$$\xi_u^j \frac{\partial \log F\Delta}{\partial x^j} = c_u , \tag{14}$$

unde $c_u = c_{su}^s$ este vectorul de structură al grupului. Condițiile de integrabilitate ale acestor ecuații se scriu :

$$c_t c_{uv}^t = 0 \tag{14′}$$

și aceste condiții sînt verificate dacă ținem seama de relațiile pătratice ale lui Lie.

Rezultă deci teorema :

*Un grup $G_r$ simplu tranzitiv este totdeauna măsurabil.*

Rezultă de asemenea că, în cazul în care vectorul de structură este nul, putem lua ca funcție $F$ invariantă integral cantitatea $1/\Delta$.

De asemenea, rezultă că fiind dat un grup $G_r$ măsurabil ($r > n$), care are un grup simplu tranzitiv, putem alege totdeauna un sistem de coordonate față de care vectorii $\xi_h^i$ să aibă divergența nulă. Într-adevăr, aceasta înseamnă că ne putem aranja să avem funcția invariantă integral a grupului $G_r$ egală cu unitatea.

De asemenea dacă $\xi_u^i$ formează un grup $G_n$ simplu tranzitiv, avem $c_{ts}^\rho = 0$ și în consecință ecuațiile (10) se scriu :

$$c_{t\alpha}^\rho \sigma_\rho^t - \sigma_\alpha^s m_s + m_\alpha = 0 \tag{15}$$

și constituie deci ecuații liniare în $\sigma_\alpha^t$.

Presupunem că grupul $G_n$ este un grup invariant în $G_r$, deci $c_{t\alpha}^\rho = 0$. În acest caz avem

$$c_s = m_s , \quad m_s c_{uv}^s = 0$$

și dacă grupul $G_n$ este perfect condițiile (15) devin condițiile (10′).

Avem deci teorema :

*Dacă un grup $G_r$ are un subgrup $G_n$ simplu tranzitiv perfect și invariant, atunci grupul $G_r$ este măsurabil dacă sînt verificate relațiile* (10′) *și reciproc.*

Această teoremă se aplică în particular la spațiile simetrice ale lui Cartan $V_n$ avînd un grup de mișcări $G_{2n}$ și rezultă că aceste grupuri $G_{2n}$ sînt măsurabile. Într-adevăr, în acest caz grupul simplu tranzitiv $G_n$ este un grup simplu și invariant în $G_{2n}$ deci un grup perfect și invariant. Cît despre relațiile (15) ele sînt de asemenea verificate, căci $c_{s\alpha}^t$ sînt pentru $G_{2n}$ strîmb simetrice în $s$ și $t$*).

*) G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. **III**, Ed. Acad. R.P.R., 1960, 263.

Presupunem că $r = n + 1$. În acest caz, punînd $\sigma^s_{n+1} = \sigma^s$ ecuațiile (10) se scriu sub forma dată de Stoka

$$c_s \sigma^s = c_{n+1}, \tag{16}$$

unde $c_h = c^k_{kh}$ este vectorul de structură al grupului $G_{n+1}$ și în consecință $G_{n+1}$ este măsurabil dacă $c_h$ este nul, deci orice grup $G_{n+1}$ perfect este măsurabil.

## III

Vom arăta acum că condițiile (10′) sînt condiții suficiente pentru ca grupul $G_r$ să aibă o măsură.

Într-adevăr, se știe că fiind dat un grup $G_r$, tranzitiv în $n$ variabile $y^1, \ldots, y^n$, se pot asocia alte variabile $y^{n+1}, \ldots, y^r$ care se numesc, după Elie Cartan, variabile secundare, astfel încît grupul să lase invariante $r$ forme Pfaff:

$$ds^u = \lambda^u_i \, dy^i, \quad ds^\alpha = \lambda^\alpha_i \, dy^i + \lambda^\alpha_\beta \, dy^\beta, \qquad (u, i = 1, \ldots, n; \ \alpha, \beta > n),$$

unde $\lambda^u_i$, $\lambda^\alpha_i$, $\lambda^\alpha_\beta$ depind de variabilele principale $y^i$ și secundare $y^\beta$ și unde determinantul $D = |\lambda^u_i|$ este diferit de zero, deci $ds^u$ sînt forme Pfaff independente în spațiul $Y_n(y^1, \ldots, y^n)$.

Cît despre cele $r$ forme $ds^u$, $ds^\alpha$ ele satisfac ecuațiile de structură

$$\begin{aligned} \Delta s^u &= c^u_{vt} \, ds^v \delta s^t + c^u_{v\beta} [ds^v \, ds^\beta], \\ \Delta s^\alpha &= c^\alpha_{vt} \, ds^v \delta s^t + c^\alpha_{v\beta} [ds^v \, ds^\beta] + c^\alpha_{\beta\gamma} \, ds^\beta \delta s^\gamma, \end{aligned} \tag{16′}$$

unde am pus $[ds^v \, ds^\beta] = ds^v \delta s^\beta - ds^\beta \delta s^v$ și unde $\Delta$ reprezintă operatorul $d\delta - \delta d$.

În acest caz, dacă determinantul $D$ este independent de variabilele secundare, putem lua ca volum în spațiul $Y_n$ cantitatea

$$V = \int_{\Delta y} D \, dy^1 \ldots dy^n, \tag{16″}$$

pe care o putem scrie, cu ajutorul notației de produs exterior,

$$V = \int_{\Delta y} [ds^1 \ldots ds^n].$$

Se poate arăta ușor că $D$ nu depinde de variabilele secundare dacă formulele (15) sînt verficate. Într-adevăr, se poate arăta că putem face totdeauna o schimbare de forme $ds^u$

$$\overline{ds}^u = c^u_v \, ds^v,$$

astfel încît $\overline{ds}^u$ să nu depindă de variabilele secundare și ca $c_v^u$ să nu depindă de variabilele principale și atunci determinantul $\Delta = |c_v^u|$ satisface formulele*)

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s^\alpha} = - m_\alpha \Delta.$$

Deci, dacă (15) sînt verificate, $\Delta$ este o constantă și cum avem $D = \Delta \overline{D}$, unde $\overline{D}$ este determinantul $|\overline{\lambda}_i^u|$, rezultă că $D$ este independent de variabilele secundare și avem teorema lui Chern**) :

*O condiție necesară și suficientă pentru ca în spațiul $Y_n$ volumul* (16'') *să fie invariant prin grupul $G_r$ este ca să fie verificate formulele* (10').

Observăm acum că, ținînd seamă de formulele (16'), ecuațiile (14') se scriu :

$$c_s c_{uv}^s + c_\alpha c_{uv}^\alpha = 0, \quad c_\alpha c_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \quad c_s c_{u\beta}^s + c_\alpha c_{u\beta}^\alpha = 0$$

și de asemenea avem

$$c_s = m_s + n_s, \quad c_\alpha = m_\alpha + n_\alpha, \qquad (n_h = c_{\beta h}^\beta).$$

Cum $c_{\beta\gamma}^\alpha$ sînt constantele de structură ale grupului de stabilitate $G_{r-n}$ ale grupului $G_r$, rezultă că, în cazul în care $G_{r-n}$ este perfect, $c_\alpha$ sînt nule. Pe de altă parte, pentru grupul $G_{r-n}$ avem de asemenea formulele (14')

$$n_\alpha c_{\beta\gamma}^\alpha = 0,$$

deci $n_\alpha$ sînt de asemenea nule și în consecință (15) sînt verificate.

Avem deci teorema :

*Un grup $G_r$ avînd ca grup de stabilitate un grup perfect, este măsurabil.*

Rezultă astfel că spațiile simetrice ale lui Cartan cu grup de stabilitate simplu sînt măsurabile.

Ca exemplu să considerăm cazul grupului $G_3$ tranzitiv în două variabile.

Presupunînd că vectorul de structură este nenul, și lăsînd deoparte cazul în care $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$ cînd grupul $G_3$ este nemăsurabil, ne putem aranja să avem $c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = 0$ și în acest caz ecuația (16) ne spune că trebuie să avem $\sigma_1 = 0$, pentru ca grupul să fie măsurabil.

Pe de altă parte, indentitățile lui Lie ne dau în acest caz***)

$$c_{21}^2 + c_{31}^3 \neq 0 \quad c_{12}^1 = c_{13}^1 = c_{23}^2 = c_{23}^3 = c_{23}^1 = 0.$$

Scriind deci operatorii unui $G_3$ măsurabil sub forma :

$$X = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Y = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Z = \sigma Y,$$

---

*) G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. III. Ed. Acad. R.P.R., 1960, 159.

**) S. S. Chern, *Integral geometry in Kleins spaces*. Ann. Math., 68—189 (1942); a se vedea de asemenea L. A. Santaló, *Introduction to integral geometry*. Act. Sci. et Ind., Hermann, 1953.

***) G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, I, Bucarest, 1957, 90.

și presupunînd că $Y$ a fost redus la forma canonică cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$ și ținînd seama că avem

$$(YZ) = 0,$$

rezultă că $\sigma$ nu depinde de variabila $y$. Putem deci presupune $\sigma = x$. Cum avem de asemenea

$$(XY) = -\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = c_{12}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + c_{12}^3 x \frac{\partial f}{\partial y},$$

rezultă că $a$ nu depinde de variabila $y$ și că $b$ este dat de formula

$$b = -(c_{12}^2 + c_{12}^3 x) y + p(x). \tag{17}$$

În sfîrșit condiția

$$(XZ) = a\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = c_{13}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + c_{13}^3 x \frac{\partial f}{\partial y}$$

ne spune că avem

$$a = -c_{12}^3 x^2 + (c_{21}^2 - c_{31}^3) x + c_{13}^2. \tag{17'}$$

Trebuie să remarcăm că funcția $a$ nu trebuie să fie nulă, deci nu putem avea în același timp $c_{12}^3 = c_{13}^2 = 0$, $c_{21}^2 = c_{31}^3$, căci altfel grupul $G_3$ n-ar fi tranzitiv în variabilele $x$, $y$.

Putem enunța deci teorema:

*Orice grup $G_3$ tranzitiv în două variabile, măsurabil, cu vectorul de structură nenul, poate fi definit de operatorii*

$$X = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Z = x\frac{\partial f}{\partial y},$$

*unde $a$, $b$ sînt date de formulele* (17), (17') *și $a \neq 0$.*

Ca un alt exemplu vom da grupul $G_4$ în trei variabile, definit de operatorii

$$\begin{aligned} X &= (1-z)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = (1-z)\frac{\partial f}{\partial y}, \\ Z &= (1-z)\frac{\partial f}{\partial z} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U = 2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{18}$$

Structura acestui grup este dată de formulele:

$$\begin{aligned} &(XY) = 0, \quad (XZ) = X, \quad (YZ) = 2Y, \\ &(XU) = 2X, \quad (YU) = Y, \quad (ZU) = 0, \end{aligned} \tag{18'}$$

deci $X$, $Y$, $Z$, formează un grup simplu tranzitiv $G_3$.

Măsura acestui grup $G_3$ este o constantă, căci cantitățile $p_1, p_2, p_3$ sînt nule. Cum cantitatea $p_4$ nu este nulă, grupul $G_4$ nu este măsurabil.

În acest caz ecuația (16) se scrie

$$\sigma^3 - 1 = 0,$$

în timp ce pentru transformarea $U$ trebuie să avem, ținînd seamă de formulele (7),

$$2x = \sigma^1(1 - z), \quad y = \sigma^2(1 - z) + \sigma^3 y, \quad 0 = \sigma^3(1 - z),$$

deci $\sigma^3 = 0$, ceea ce ne spune că grupul nu este măsurabil. Rezultă de asemenea că operatorul $V$ formează cu $X, Y, Z$ un grup măsurabil numai dacă avem

$$V = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + (1 - z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

unde $\alpha$, $\beta$ sînt funcții oarecare, cu condiția ca $X, Y, Z, V$ să formeze un grup $G_4$. Să presupunem, de exemplu $\alpha = x$, $\beta = 0$. În acest caz, grupul $G_4$ are aceeași structură (18′), dar grupul este măsurabil, căci în acest caz $p_4$ este nul, însă $V$ nu aparține grupului de stabilitate. Rezultă deci că din două grupuri avînd aceeași structură, unul poate să fie măsurabil și altul nu. În acest caz însă, grupurile de stabilitate ale celor două grupuri nu sînt izomorfe.

Primită la redacție la 20 octombrie 1961

## ОБ ИЗМЕРИМОСТИ ГРУПП ЛИ

### РЕЗЮМЕ

В 1926 г. Делтейл показал, что транзитивная группа Ли $G_r$ имеет интегральный инвариант, если система уравнений в частных производных $\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi_h^i F) = 0$, где $\xi_R^i$ — векторы, определяющие инфинитезимальные преобразования группы, имеет ненулевое решение $F$, тогда интегральный инвариант определяется с точностью до мультипликативной постоянной.

Стока получил недавно новый вид этих уравнений и условия их интегрируемости. В настоящей работе устанавливаются другие формы этих уравнений и соответствующих условий интегрируемости.

# SUR LA MESURABILITÉ DES GROUPES DE LIE


## RÉSUMÉ

Deltheil a montré en 1926 qu'un groupe transitif $G_r$ de Lie possède un invariant intégral si le système d'équations aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^i}(\xi_h^i F) = 0$ admet une solution $F$ non nulle, où $\xi_h^i$ sont des vecteurs qui définissent les transformations infinitésimale du groupe. Dans ce cas, l'invariant intégral est défini, abstraction faite d'une constante multiplicative.

Stoka a récemment donné une nouvelle forme au système de Deltheil, indiquant en même temps les conditions d'intégrabilité de ce système.

On donne, dans l'article ci-dessus, différentes formes, aussi bien en ce qui concerne le système que les conditions d'intégrabilité.

# $J$-METRICELE NATURALE FINSLERIENE ȘI FUNCȚIA DE REPREZENTARE A LUI RIEMANN

DE

D. BARBILIAN și N. RADU

Articolul de față este ultimul din seria de articole [1], [2], [3]. Cu ajutorul principiului de metrizare din [1], se caracterizează prin proprietățile metricei generate în interiorul unui domeniu simplu conex $J$, funcția de reprezentare a lui Riemann.

## § 1. IZOTROPIE ÎN $J$-GEOMETRIILE FINSLERIENE NATURALE

### 1°. PUNCT DE IZOTROPIE. CONSECINȚE PENTRU CURBA $K$ CE DECURG DIN EXISTENȚA UNUI ASTFEL DE PUNCT

Fie $K$ o curbă simplă, închisă.

Cadrul cercetării din acest aliniat îl constituie cererile

$$1) + 2)$$

privitoare la inversele $K^*$ ale lui $K$ față de polurile de inversiune $A \in H \subset J$ (a se vedea [3], § 2, 2°).

O construcție a acestui cadru este dată de teorema din [3], § 3, 3° și anume, prin condiții impuse direct curbei $K$:

$$\bar{a} + \bar{b}.$$

O construcție mai tare este, cum am văzut*), înlocuirea cererilor geometrice $\bar{a} + \bar{b}$ cu cererea analitică.

1) Existența derivatelor prime și secunde pentru coordonatele lui $K$, nu amîndouă nule la schimbări convenabile de parametru.

*) Observația I din [3], § 3, 4°.

Definiţie. *Un punct $Q \to H$ se numeşte punct $\varepsilon$-izotrop cînd punctele $\varepsilon$-laterale de sprijin $s^\varepsilon$, $S^\varepsilon$ ale elementului de contact $Q$, $dQ$, de centru fix $Q$, la o rotire de unghi $\pi$, în sensul $\varepsilon$, epuizează întreaga curbă $K$.*

În cele ce urmează, sensul $\varepsilon$ îl fixăm la sensul pozitiv (de pe cercul trigonometric) încît vom vorbi numai de *puncte izotrope*, fără menţionarea lateralităţii.

LEMA 1. *Imaginea inversă $K^\star$ a lui $K$ faţă de un punct izotrop luat ca pol, rămîne exterioară fiecăreia din tangentele ei, cu care are în comun numai contacte.*

Demonstraţie. Interiorul $J_0^*$ al lui $K^\star$ este inversul exteriorului $J_0$ a lui $K$.

Inversiunea substituie cercurilor extreme ale perechii $Q$, $Q + dQ$ din $J$-metrica naturală asociată lui $K$, tangentele extreme $t^\star$, $T^\star$, perpendiculare pe $dQ$, la curba evident simplă şi închisă $K^\star$.

În virtutea izotropiei lui $Q$, pentru $\sum \in K$ există o direcţie $dQ$ aşa încît $\sum$ să fie punctul $S$ sau $s$ (punctul de sprijin de lateralitate $\varepsilon = +$) al perechii $Q$, $Q + dQ$. Ca atare, tangenta $\Xi^\star$ în $\sum^\star$ la $K^\star$ (unde, evident, $\sum^\star \in K^\star$) este o tangentă extremă : curba $K^\star$ rămîne de o anumită parte a lui $\Xi^\star$.

Dar un cerc extrem are în comun cu $K$ numai contacte. Conchidem că $\Xi^\star$ are în comun cu $K^\star$ numai contacte.

Cu aceasta totul este demonstrat.

*Observaţie.* Dacă mulţimea contactelor lui $\Xi^\star$ cu $K^\star$ este infinită, rămîne totuşi mărginită, altfel $K^\star$ n-ar fi închisă. Ca atare există un punct (eventual punct-limită) $\sum_l^*$ la stînga şi un punct (eventual punct-limită) la dreapta $\sum_r^*$, aşa încît în afara segmentului $\sum_l^* \sum_r^*$ să nu existe nici un contact între $K^\star$ şi $\Xi^\star$.

Segmentul $\sum_l^* \sum_r^*$ este închis, în sensul că $\sum_l^*$, $\sum_r^*$ sînt ele însele contacte. Într-adevăr, dacă de exemplu $\sum_l^*$ este punct-limită, orice vecinătate circulară $U(\sum_l^*)$, cînd raza descreşte, conţine submulţimile infinite ale unui lanţ de contacte. Deci, există un punct de aglomerare al acestora care aparţine curbei închise $K^\star$ cît şi închiderilor $\overline{U}(\sum_l^*)$. Ca atare coincide cu $\sum_l^*$, căci distanţa lui la acest punct rezultă mai mică decît orice număr pozitiv. Cum $\sum_l^*$ aparţine lui $K^\star$ şi $\Xi^\star$ este un contact al lor.

LEMA 2. *Ipotezele şi notaţiile fiind acelea din lema 1, admitem că ar exista mai mult decît un contact între curba $K^\star$ şi o anume tangentă a ei $\Xi^\star$.*

*Putem găsi atunci două contacte $\sum_1^* \neq \sum_2^*$, consecutive pe $\Xi^\star$ (aceasta înseamnă : segmentul $\sum_1^* \sum_2^*$ deschis, liber de contacte), aşa încît unul din cele două arce $\omega^\star$, $\omega^\star$, în care $\sum_1^* \sum_2^*$ împarte conturul $K^\star$, să zicem arcul $\omega^\star$, deschis, să fie liber de contacte şi conţinut în domeniul mărginit şi închis $\widetilde{\Omega}^\star$ de frontieră $\sum_1^* \sum_2^* + \widetilde{\omega}^\star$.*

Demonstraţie. Nu toate punctele segmentului $\sum_l^* \sum_r^*$, din observaţia de mai sus, pot fi limite de puncte de contact; altfel, con-

form argumentului dat în acea observație, segmentul ar aparține lui $K^\star$. Am avea deci un arc $\Sigma_l \Sigma_r$ de cerc extrem, în frontiera $K$ a lui $J$. Pe acest arc numai extremitățile $\Sigma_l$, $\Sigma_r$ pot fi puncte de sprijin $s^+$, $S^+$ de lateralitate $\varepsilon = +$ (relative la perechea $Q$, $Q + dQ$). Prin urmare, $Q$ n-ar fi punct izotrop.

Reiese de aici, că putem găsi totdeauna pe $\Xi^\star$ (mai precis pe segmentul $\Sigma_l^\star \Sigma_r^\star$) două contacte consecutive $\Sigma_1^\star \neq \Sigma_2^\star$, în sensul din enunț.

Să considerăm unul din cele două arce $\omega^\star$, $\widetilde{\omega}^\star$, de exemplu $\omega^\star$, pe care îl concepem *deschis*. Segmentul $\Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$ îl socotim închis.

Potrivit lemei 1, curba $K^\star$ se găsește într-un anume semiplan $\Pi^\star$ din cele două, de frontieră $\Xi^\star$. Arcul $\omega^\star$ desparte semiplanul $\Pi^\star$ în două domenii complementare : unul, mărginit, $\Omega^\star$, de frontieră $\omega^\star + \Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$ ; celălalt, infinit, $\Omega_\infty^\star$, de frontieră $\omega^\star + (\Xi^\star - \Sigma_1^\star \Sigma_2^\star)$.

Vrem să stabilim proprietatea : arcul deschis $\widetilde{\omega}^\star$ aparține, în întregime, fie domeniului $\Omega^\star$, fie domeniului $\Omega_\infty^\star$ (cu exclusivitate).

Într-adevăr, în caz contrar $\omega^\star$ ar tăia frontiera lui $\Omega^\star$ adică una sau alta din componentele ei $\omega^\star + \Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$. Nu poate tăia arcul deschis $\omega^\star$, căci curba $K^\star$ este simplă. Nu poate tăia segmentul $\Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$ într-una din extremități, deoarece $\widetilde{\omega}^\star$ este deschis la amîndouă capetele. Nu taie nici într-un punct interior $\Sigma^\star$ segmentul $\Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$, căci (lema 1) $\Sigma^\star$ ar fi un contact și ca atare $\Sigma_1^\star$, $\Sigma_2^\star$ n-ar fi contacte consecutive.

În definitiv, este probat că $\widetilde{\omega}^\star$ nu poate fi conținută decît într-unul singur din cele două domenii, cu alte cuvinte avem

$$\text{fie } \widetilde{\omega}^\star \subset \Omega^\star, \text{ fie } \widetilde{\omega}^\star \subset \Omega_\infty^\star. \tag{1}$$

Permutînd literele ondulate cu literele neondulate, conchidem de asemenea la alternativa

$$\text{fie } \omega^\star \subset \widetilde{\Omega}^\star, \text{ fie } \omega^\star \supset \widetilde{\Omega}_\infty^\star. \tag{1'}$$

Să trecem acum la demonstrația propriu-zisă a lemei.

Considerăm alternativa (1). Dacă prima parte este realizată, proprietatea din enunț este banal verificată. Să arătăm că realizarea celei de-a doua părți din (1) are drept consecință prima parte din (1') și deci proprietatea încă se verifică.

Dacă, într-adevăr, $\widetilde{\omega}^\star \subset \Omega_\infty^\star$, domeniul $\Omega^\star$ (considerat *deschis*) nu conține nici unul din arcele $\omega^\star$, $\widetilde{\omega}^\star$ : nu conține pe $\omega^\star$ fiindcă $\omega^\star$ intră componentă în frontiera lui $\Omega^\star$ ; nu conține pe $\widetilde{\omega}^\star$ fiindcă acesta face parte din domeniul $\Omega_\infty^\star$, complementar (după închidere) lui $\Omega^\star$, față de $\Pi^\star$.

De aici conchidem că $\Omega^\star$ și interiorul $J_0^\star$ al lui $K^\star$, închis cu $K^\star$ însăși, se juxtapun de-a lungul lui $\omega^\star$.

Într-adevăr, $\Omega^\star$ și $J_0^\star$ ar interfera în cazul contrar. Fie $P$ un punct interior, comun. Fie $Q$ un punct interior al componentei $\Sigma_1^\star \Sigma_2^\star$ a frontierei

domeniului deschis $\Omega^*$. Cum $\Omega^*$ este conex, există un drum $PQ$, deschis la capătul $Q$, în întregime cuprins în $\Omega^*$.

Dar $Q \to J_0^*$, altfel $Q$ ar aparține lui $K^*$, întrucît $J_0$ este închis și rămîne de aceeași parte a lui $\Xi^*$. Conform lemei 1 ar fi un contact între $\Xi^*$ și $K^*$, prin urmare $\sum_1^*$, $\sum_2^*$ n-ar fi consecutive. Din $P \to J_0^*$, $Q \not\to J_0^*$ urmează că drumul $PQ$, situat în $\Omega^*$, taie frontiera $\omega^* + \widetilde{\omega}^*$ a lui $J_0^*$ și anume arcul deschis $\widetilde{\omega}^*$ (deoarece arcul $\omega^*$ închis intră printre componentele frontierei lui $\Omega^*$ și deci nu face parte din domeniul peste tot deschis $\Omega^*$).

Rezultă de aici că $\widetilde{\omega}^*$ ar avea puncte comune cu $\Omega^*$. Comparînd cu (1) conchidem: $\widetilde{\omega}^* \subset \Omega^*$ și deci $\widetilde{\omega}^* \not\subset \Omega_\infty^*$, împotriva ipotezei $\widetilde{\omega}^* \subset \Omega_\infty^*$ în care ne găsim.

Rămîne așadar, indirect stabilit, că $J_0^*$ și $\Omega^*$ se juxtapun de-a lungul lui $\omega$. Avem deci în

$$J_0^* + \Omega^*$$

un domeniu conex, de frontieră $\widetilde{\omega}^* + \sum_1^* \sum_2^*$, adică tocmai domeniul $\widetilde{\Omega}^*$. Arcul deschis de racordare $\omega^*$ se găsește, prin construcție, cuprins în $J_0^* + \Omega^* = \widetilde{\Omega}^*$, așadar: $\omega^* \subset \widetilde{\Omega}^*$ adică tocmai prima parte a alternativei (1′).

În rezumat, avem sigur realizată una sau alta din primele părți ale alternativelor scrise la (1), (1′).

Cu aceasta totul este demonstrat.

TEOREMA 1. *Curba $K^*$, inversa curbei $K$ față de un punct izotrop $Q$ luat ca pol, este atinsă de tangentele ei într-un singur punct.*

Sau, în enunțare echivalentă:

*Dacă domeniul interior $J$ al curbei $K$ prezintă un punct $Q$ izotrop elementele de contact $Q$, $dQ$ au mulțimi de sprijin reduse la cîte un singur punct*

$$(S) = S, (s) = s.$$

Demonstrație. Fie $\Xi^*$ o tangentă arbitrară la $K^*$. Presupunem, prin absurd, că ar avea mai mult de un contact cu $K^*$. Avem atunci situațiile din lema 2. Notațiile rămînînd aceleași, admitem că prima parte a alternativei (1′) este aceea realizată:

$$\omega^* \subset \widetilde{\Omega}^*. \tag{2}$$

Am văzut la începutul demonstrației lemei 2 că un segment rectiliniu nu poate intra în compoziția curbei $K^*$, căci altfel numai extremitățile segmentului ar fi imagini de puncte de sprijin laterale $\varepsilon = +$ ale perechilor $Q$, $Q + dQ$ împotriva izotropiei lui $Q$. Există deci pe arcul $\omega^*$ un punct $S^*$, cu

$$S^* \to \omega^*, \qquad S^* \to \Xi^*. \tag{3}$$

Tangenta în $S^*$ la $\omega^*$, deci la $K^*$, o însemnăm cu $T^*$.

Afirmăm că $T^*$ străbate curba $K^*$, adică există puncte comune lui $T^*$ și $K^*$ în a căror vecinătate curba $K^*$ prezintă puncte de o parte și de alta a lui $T^*$.

Într-adevăr, conform lui (2) și (3) dreapta $T^\star$ are un punct interior comun $S^\star$ cu domeniul mărginit $\bar{\Omega}^\star$. Fiind infinită, are puncte comune, în același timp, cu exteriorul lui $\tilde{\Omega}^\star$ (considerat închis). Ca atare străbate frontiera $\tilde{\omega}^\star + \overset{\star}{\Sigma}_1 \overset{\star}{\Sigma}_2$ a lui $\Omega^\star$, în cel puțin două puncte.

Dacă $T^\star$ nu taie segmentul $\overset{\star}{\Sigma}_1 \overset{\star}{\Sigma}_2$ punctele de străbatere se găsesc pe $\tilde{\omega}^\star \subset K^\star$.

Dacă $T^\star$, dimpotrivă, taie segmentul $\overset{\star}{\Sigma}_1 \overset{\star}{\Sigma}_2$, nu amîndouă punctele de străbatere aparțin lui $\overset{\star}{\Sigma}_1 \overset{\star}{\Sigma}_2$, altfel ar urma $T^\star = \Xi^\star$, împotriva lui (3). Ca atare, arcul $\tilde{\omega}^\star \subset K^\star$ prezintă cel puțin un punct de străbatere.

În definitiv constatăm că există puncte ale curbei $K^\star$ de o parte și de alta a tangentei $T^\star$, împotriva lemei 1.

Rămîne, indirect stabilit, că între $K^\star$ și tangenta curentă $\Xi^\star$ nu există mai mult de un punct de contact.

Refăcînd înapoi inversiunea, conchidem că pentru un punct de izotropie $Q$ din $J$ mulțimile punctelor de sprijin ale perechilor $Q$, $Q + dQ$ se reduc la cîte un singur punct:

$$(s) = s, \qquad (S) = S.$$

## 2°. CONVEXITATEA IMAGINILOR LUI $K$ PRIN INVERSIUNE DINTR-UN POL IZOTROP

TEOREMA 2. *Inversa $K^\star$ a curbei $K$ față de un punct de izotropie $Q$ luat ca pol, este convexă.*

D e m o n s t r a ț i e. Presupunem dimpotrivă, că o coardă $M^\star N^\star$ a lui $K^\star$ ar fi străbătută*) de $K^\star$ într-un punct $R^\star$ al segmetului (deschis) $M^\star N^\star$.

Însemnăm cu $\pi^\star$, $\tilde{\pi}^\star$ arcele pe care $M^\star$, $N^\star$ le determină pe $K^\star$. Pentru a preciza, convenim că $R^\star$ se găsește pe arcul (deschis) $\pi^\star$. Cum $R^\star$ este punct de străbatere, $\pi^\star$ are puncte de o parte și de alta a dreptei $M^\star N^\star$. Ca atare, cum $\pi^\star$ este mărginit, există de fiecare parte a lui $M^\star N^\star$ paralele

$$D^\star \parallel M^\star N^\star$$

care taie, respectiv nu taie, pe $\pi^\star$ și deci cîte o poziție-limită $T^\star$, $T^{\star\prime}$.

De asemenea, există cel puțin de o anume parte a lui $M^\star N^\star$ paralele

$$\tilde{D}^\star \parallel M^\star N^\star$$

care taie, respectiv nu taie, arcul mărginit $\tilde{\pi}^\star$ și deci o poziție-limită $\tilde{T}^\star$ a acestor două mulțimi.

Fie $T^\star$ aceea dintre dreptele $T^\star$, $T^{\star\prime}$, aflată de aceeași parte cu $\tilde{T}^\star$ față de $M^\star N^\star$.

---

*) Eventualitatea unui contact $R^\star$ între $K^\star$ și $M^\star N^\star$ se exclude în virtutea teoremei 1 și lemei 1 (ar urma, în adevăr, să avem în $M^\star, N^\star$, contacte, în definitiv mai mult de un contact cu o tangentă).

Vrem să arătăm că fiecare din dreptele $T^\star$, $\widetilde{T}^\star$ este tangentă la $K^\star$.

Fie $(P^\star)$, respectiv $(\widetilde{P}^\star)$, mulţimea punctelor comune între $T^\star$, respectiv $\widetilde{T}^\star$, şi arcul $\pi^\star$, respectiv $\widetilde{\pi}^\star$. Nici unul din punctele $(P^\star)$, de exemplu, nu poate fi punct de străbatere; altfel ar exista de o parte şi de alta a dreptei $T^\star$ paralele care taie arcul $\pi^\star$.

Deoarece $Q$ este izotrop, fiecare punct din $(P)$ sau $(\widetilde{P})$ se interpretează ca un punct de sprijin. Cu alte cuvinte, există un cerc extrem, dus printr-un element de contact $(Q, dQ)$, admiţînd punctul menţionat ca punct de sprijin; prin urmare, există acolo o tangentă la $K$, în sensul primei definiţii din [1], § 3, 1°.

Aplicînd inversiunea de pol $Q$, ştim că în fiecare din punctele $(P^\star)$ sau $(\widetilde{P}^\star)$ curba $K^\star$ este *cu tangentă.*

Însă, în vecinătatea unui punct $(P^\star)$ sau $(\widetilde{P}^\star)$ avem între $K^\star$ şi $T^\star$ sau $\widetilde{T}^\star$ tangenţă domenială, deoarece $K^\star$ rămîne de o anume parte a acestei drepte, conform rezultatului din 1°.

Deci tangenta, în sensul celei de-a doua definiţii din [1], § 3, 1°, este $T^\star$ sau $\widetilde{T}^\star$.

Potrivit teoremei 1 mulţimile $(P^\star)$, $(\widetilde{P}^\star)$ se reduc respectiv la cîte un singur contact $P^\star \to \pi^\star$ şi $\widetilde{P}^\star \to \widetilde{\pi}^\star$.

Nu putem avea $T^\star = \widetilde{T}^\star$, căci ar urma $P^\star = \widetilde{P}^\star$ şi deci arcele $\pi^\star$, $\widetilde{\pi}^\star$ n-ar fi complementare.

Aşadar, $T^\star \neq \widetilde{T}^\star$. Admiţînd că în semiplanul de frontieră $M^\star N^\star$, în care are loc construcţia, cele trei paralele prezintă ordonarea $\widetilde{T}^\star$, $T^\star$, $M^\star N^\star$, tangenta $T^\star$ în $P^\star$ taie arcul conex $\widetilde{\pi}^\star$ în cel puţin două puncte. În cazul celeilalte ordonări posibile: $T^\star$, $\widetilde{T}^\star$, $M^\star N^\star$, tangenta $\widetilde{T}^\star$ taie de asemenea cele două subarce ale lui $\pi^\star$, care unesc pe $R^\star$ respectiv cu $M^\star, N^\star$, în cîte un punct.

Concluzia aşadar nu se schimbă: există în orice caz o tangentă care străbate curba $K^\star$, împotriva lemei 1 din 1°.

Rămîne indirect dovedită convexitatea curbei $K^\star$.

Definiţie. *O curbă care satisface la proprietăţile din teoremele 1, 2 (de altfel, într-un anume cadru, echivalente între ele) o numim „oval".*

### 3°. EXISTENŢA UNEI TRANSFORMĂRI ANALLAGMATICE INVOLUTIVE, INVARIATOARE, PENTRU CURBELE $K$ CU UN PUNCT DE IZOTROPIE

TEOREMA 3. *Fie $K$ o curbă simplă închisă, continuu derivabilă pînă la ordinul 2 inclusiv, iar $J$ interiorul ei. Dacă $Q$ este un punct de izotropie al $J$-geometriei naturale corespunzătoare, atunci $K$ admite o involuţie anallagmatică de poli $Q \neq 0$, în ea însăşi.*

Demonstraţie. Executăm o inversiune de pol $Q$. Ea substituie lui $K$ o curbă $K^\star$ de asemenea simplă, închisă, continuu derivabilă pînă la ordinul 2 inclusiv.

Cercurile extreme ale punctelor infinit vecine $Q$, $Q+dQ$ sînt transformate în două tangente extreme $t^*$, $T^*$ ale lui $K^*$ relativ la direcția perpendiculară pe $dQ$. Contactele $s^\varepsilon$, $S^\varepsilon$ se transformă în două contacte $s^{*\varepsilon}$, $S^{*\varepsilon}$ ale lui $t^*$, $T^*$ respectiv.

Însemnăm cu $\operatorname{tg}\varphi$ coeficientul unghiular al direcției $dQ$, iar cu $\lambda$ parametrul pe curba $K$ în raport cu care coordonatele carteziene $x$, $y$ sînt, conform enunțului, continuu derivabile pînă la ordinul 2. Avem pe curba $K^*$, pentru coordonatele lui $s^*$,

$$\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{x^{*\prime}(\lambda)}{y^{*\prime}(\lambda)}, \tag{4}$$

unde $x^*$, $y^*$ sînt coordonatele punctului curent pe $K^*$. Dar $\dfrac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ este funcție strict monotonă de $\lambda$, deoarece, conform teoremelor 1 și 2, $K^*$ este un oval. Așadar,

$$\begin{vmatrix} x^{*\prime}(\lambda) & y^{*\prime}(\lambda) \\ x^{*\prime\prime}(\lambda) & y^{*\prime\prime}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

pentru orice $\lambda$. Urmează de aici că ecuația (4) are o singură soluție $\lambda = \lambda(\varphi)$ diferențiabilă în $\varphi$.

În definitiv $x^*$, $y^*$ rezultă funcții continuu derivabile în $\varphi$, pînă la ordinul 1 inclusiv. Ceva mai mult, avem pentru coordonatele lui $S^*$:

$$X^* = x^*(\varphi + \pi), \qquad Y^* = y^*(\varphi + \pi). \tag{5}$$

Într-adevăr, după rotirea de unghi $\pi$, punctele $s^*$, $S^*$ se restabilesc în ansamblul lor pentru prima dată, căci perechea este funcție univalentă de direcția tangentelor (teorema 1). Dar $s^*$ variază monoton cu $\varphi$ în ordonarea de pe oval. Prin urmare, prima dată cînd ocupă una din pozițiile $s^*$, $S^*$ este cînd ajunge în $S^*$ (nu cînd se întoarce în $S^*$). Este deci probat faptul că avem (5).

Însemnăm cu $\cos\psi$, $\sin\psi$ cosinii directori ai semidreptei $s^*S^*$. Dacă $x$, $y$ sînt coordonatele punctului caracteristic $O^*$ avem:

$$x^* = x + \lambda\cos\psi, \qquad X^* = x + \Lambda\cos\psi,$$

$$y^* = y + \lambda\sin\psi, \qquad Y^* = y + \Lambda\sin\psi,$$

unde $\lambda$ și $\Lambda$ sînt segmentele $\overline{O^*s^*}$ și $\overline{O^*S^*}$ cu semnul lor de pe semidreapta $\overline{s^*S^*}$. Cum $O^*$ este un punct de pe segmentul închis $s^*S^*$ avem

$$s^*S^* = \Lambda - \lambda.$$

## § 2. CARACTERIZAREA CERCULUI CU AJUTORUL J-METRICELOR

### 1°. TEOREMA FUNDAMENTALĂ

Fie $K$ o curbă simplă închisă. Cadrul cercetării precum şi notaţiile sînt cele din paragraful precedent.

Definiţie. *Un punct* $Q \in H \subset J$ *se numeşte punct de izotropie transversă cînd* :

1. *este izotrop* ;

2. *pe fiecare cerc de transversabilitate al lui* $Q$ *există un punct caracteristic.*

TEOREMA FUNDAMENTALĂ. *Dacă o J-metrică relativă la* $K$ *prezintă un punct de izotropie transversă* $Q$, *atunci* $K$ *admite o simetrie anallagmatică în ea însăşi de poli* $Q$, $O$.

Demonstraţie. Considerăm inversiunea de pol $Q$ şi însemnăm cu aceeaşi literă elementele figurii inverse (cîtă vreme nu este de temut nici o confuzie). Am arătat în paragraful precedent că avem în $K$ un oval.

Introducem coordonate carteziene. Fie $\Xi$ o direcţie arbitrară de coeficient unghiular $\operatorname{tg}\varphi$, iar $S$, $s$ contactele tangentelor $T \parallel \Xi$, $t \parallel \Xi$ la $K$. Arcele de extremităţi $S$, $s$, măsurate în acelaşi sens, de la o anumită origine de pe $K$, sînt funcţii monotone de $\varphi$, astfel încît, punctul caracteristic $O$ de pe $Ss$ există şi aparţine închiderii $\overline{J}_0$ a lui $J_0$. Aici prin $J_0$ înţelegem inversul domeniului exterior curbei $K$, înainte de inversare : deci domeniul interior al inversei curbei $K$.

Conchidem că $O$ descrie o curbă $\Omega$ continuă, conţinută în $\overline{J}_0$, deci mărginită. Coordonatele ortogonale $x$, $y$ ale lui $\Omega$ sînt funcţii uniforme, continue, de $\operatorname{tg}\varphi$. De asemenea, coeficientul unghiular $\operatorname{tg}\psi$, al coardei $Ss$, este funcţie monotonă de $\operatorname{tg}\varphi$, căci poziţiile infinit vecine ale lui $Ss$, în virtutea convexităţii lui $K$ se taie în $\overline{J}_0$ şi deci

$$d\psi > 0. \tag{6}$$

Avem pentru coordonatele lui $S$ şi $s$ respectiv :

$$S\begin{cases} x + \Lambda \cos \psi \\ y + \Lambda \sin \psi \end{cases} \qquad s\begin{cases} x + \lambda \cos \psi \\ y + \lambda \sin \psi \end{cases} \tag{7}$$

unde, în semn şi valoare, alegînd pe coardă sensul pozitiv $sS$

$$\Lambda = OS, \qquad \lambda = Os. \tag{8}$$

Tangenta $Ss$ variază, cum am văzut, continuu şi monoton. Arcul $d\omega = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ variază de asemenea continuu şi monoton. Dacă iniţial sensul $sS$ coincide cu sensul lui $\omega$ situaţia se păstrează pînă la primul punct $O$ staţionar. Acolo, cum $d\omega = 0$, un sens dispare şi comparaţia nu mai poate avea loc.

O cercetare locală arată însă că într-un punct de întoarcere (situat : în origine, în semiplanul $y > 0$) arcul $d\omega = x\sqrt{1 + P^2(x)}$ îşi schimbă

semnul. Orice arc care colidează cu altul într-un punct staționar (punctele de inflexiune sînt excluse, datorită lui (6)) poate fi privit ca provenind dintr-un arc de întoarcere după o rotație convenabilă. Prin urmare, $d\omega$ își schimbă semnul.

Pe de altă parte, în virtutea ipotezei (8) rotația fiind de amplitudine $\psi \geqslant \pi$, direcția $sS$ suferă mai întîi o rotație de amplitudine $\pi$ și apoi o rotație de amplitudine $0 \leqslant \psi - \pi < \pi$. Prima rotație permută rolul punctelor $s$, $S$. A doua nu provoacă o a doua permutare.

Din cele spuse tragem concluzia hotărîtoare

$$\frac{d\omega}{\Lambda - \lambda} \geqslant 0. \tag{9}$$

Condiția ca tangentele în $S$ și $s$ să fie paralele se scrie, în virtutea relațiilor (7) și ținînd seamă de formulele $dx = \cos\psi\, d\omega$, $dy = \sin\psi\, d\omega$,

$$\begin{vmatrix} d(\omega + \Lambda)\cos\psi - \Lambda\, d\psi \sin\psi & d(\omega + \Lambda)\sin\psi + \Lambda\, d\psi\cos\psi \\ d(\omega + \lambda)\cos\psi - \lambda\, d\psi \sin\psi & d(\omega + \lambda)\sin\psi + \lambda\, d\psi\cos\psi \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă

$$\begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d(\omega + \Lambda) & \Lambda \\ d(\omega + \lambda) & \lambda \end{vmatrix} d\psi = 0,$$

sau, avînd în vedere (6),

$$\begin{vmatrix} d(\omega + \Lambda) & \Lambda \\ d(\omega + \lambda) & \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Punem

$$\lambda = \rho(\Lambda - \lambda) \tag{11}$$

unde $\rho$ este o funcție de $\varphi$ evident diferențiabilă o dată cu $\lambda$ și $\Lambda$. Cu aceasta, (10) devine, împărțind la $\Lambda - \lambda$, sigur diferit de zero (căci $S \neq s$):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\omega}{\lambda} = 0,$$

sau, folosind încă o dată (11)

$$d\rho = -\frac{d\omega}{\Lambda - \lambda},$$

de unde

$$\rho = -\int_0^{\varphi} \frac{d\omega}{\Lambda - \lambda}.$$

Introducînd în (11) obținem pentru un $\lambda_0 = \lambda(\varphi_0)$

$$\lambda_0 = -(\Lambda_0 - \lambda_0)\int_0^{\varphi_0} \frac{d\omega}{\Lambda - \lambda}. \tag{12}$$

Dar $\Lambda$ și $\lambda$ sînt funcții uniforme de $\varphi$ de perioadă $2\pi$. Din (12) conchidem

$$\lambda_0 = -(\Lambda_0 - \lambda_0)\int_0^{\varphi_0+2\pi} \frac{d\omega}{\Lambda - \lambda} \tag{13}$$

și deci, comparînd (12) cu (13),

$$(\Lambda_0 - \lambda_0)\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\Lambda - \lambda} = 0,$$

adică

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\Lambda - \lambda} = 0 \tag{9'}$$

căci $\Lambda_0 - \lambda_0 \neq 0$.

Din (9), (9') conchidem

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = d\omega = 0 \tag{14}$$

pentru întregul interval $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Ca atare

$$x = c^{\bar{l}a}, \quad y = c^{la}.$$

În virtutea relației (14), condiția (10) se scrie

$$\begin{vmatrix} d\Lambda & \Lambda \\ d\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

așadar

$$\Lambda = C\lambda, \tag{15}$$

unde $C$ este o constantă diferită de zero și 1.

Dar, după o creștere cu $\pi$ a lui $\varphi$, punctele $S$, $s$ se permută în ansamblul lor. Cum $C \neq 1$ avem de-a face cu o permutare

$$-\lambda = -C\Lambda. \tag{15'}$$

Din (15), (15') scoatem

$$C^2 = 1$$

adică

$$C = -1. \tag{16}$$

Relațiile (8), (15), (16) ne dau

$$OS = Os = 0.$$

*Observație.* Din demonstrație rezultă că cercurile transversale formează un fascicul determinat de punctul $Q$ și de un alt punct $O$ exterior lui $J + K$.

## 2°. PRIMA CARACTERIZARE A CERCULUI

Definiție. *Un punct de izotropie transversă ale cărui cercuri de transversabilitate sînt J-geodetice se numește punct de izotropie geodetică.*

TEOREMA 4. *Fie $K$ o curbă închisă, simplă admițînd peste tot tangentă. Dacă J-metrica corespunzătoare admite un punct $Q$ de izotropie geodetică atunci $K$ este cerc.*

Demonstrație. Conform observației de la punctul 1°, geodeticele formează un fascicul continuu, liniar de cercuri de puncte fixe $Q, O$. Curba $K$ este o traiectorie ortogonală lor, deci un cerc.

*Observație.* Teorema precedentă a fost comunicată la congresul din 1934 de la Praga fără demonstrație. Teorema fundamentală a fost însă găsită ulterior.

## 3°. A DOUA CARACTERIZARE A CERCULUI

TEOREMA 5. *Fie $K$ o curbă simplă închisă care admite peste tot tangentă. Dacă în două puncte $Q', Q''$ diferite, de izotropie transversă, J-metrica finsleriană este riemanniană atunci $K$ este cerc.*

Demonstrație. Însemnăm cu $Q$ unul oarecare din punctele $Q', Q''$. Notațiile fiind aceleași ca în demonstrația teoremei fundamentale, am arătat acolo că $K^*$ admite pe $O^*$ drept centru.

Pe de altă parte, în [3], § 2, 1°, s-a arătat că elementul finslerian în $Q$ are forma

$$ds = \Delta\, d\sigma,$$

unde $\Delta$ înseamnă îndoitul curburii transverse mijlocii a curbei $K$ (care așa cum am văzut în [3], p. 26 este egală cu îndoitul lărgimii benzii de paralele duse perpendicular direcției de sprijin a elementului de arc).

Prin ipoteză avem

$$ds = \sqrt{E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2}\, dt,$$

deci

$$\Delta = \frac{\sqrt{E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \tag{17}$$

unde $\dot{x}, \dot{y}$ este direcția de sprijin a elementului de arc și unde $E, F, G$ depind numai de coordonatele $x, y$ ale lui $Q$, așa încît

$$EG - F^2 > 0, \qquad E > 0. \tag{18}$$

Cum $O^*$ este centrul lui $K$, rezultă că distanța lui la una din tangentele benzii este $\Delta/4$.

Să alegem originea în $O^*$. Aşadar, distanţa lui $O^*$ la tangenta la $K^*$ de direcţie perpendiculară pe $\dot{x}, \dot{y}$ este $\Delta/4$, încît dacă $ux + vy + w = 0$ este ecuaţia tangentei benzii paralele, care poate fi privită ca tangentă curentă la $K^*$, avem

$$\Delta = \frac{uw}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{u}{v}.$$

Introducînd aceste expresii în (17) găsim pentru $K^*$, în coordonate tangenţiale, elipsa

$$Eu^2 + 2Fuv + Gv^2 = 16\, w^2.$$

Se pot prezenta două cazuri:

*1.* $K^*$ este o veritabilă elipsă (şi nu un cerc). Atunci făcînd înapoi inversiunea, $K$ rezultă un melc al lui Pascal cu un punct izolat în $Q$ (căci $Q$ este exterior lui $K^*$);

*2.* $K^*$ este un cerc. Atunci $K$ rezultă de asemenea cerc.

Prin ipoteză există însă două puncte $Q' \neq Q''$ cu proprietatea punctului $Q$. Eventualitatea *1* nu poate interveni căci un melc al lui Pascal $K$, cu un punct izolat $Q'$ are ca figură inversă faţă de un $Q'' \neq Q'$ luat ca pol o curbă de gradul trei sau patru, deci nu o elipsă. Dar $Q''$ are toate proprietăţile punctului $Q$ de mai sus deci ne contrazicem.

Rămîne dar ca singură valabilă ipoteza *2*. Teorema este demonstrată.

## 4°. A TREIA CARACTERIZARE A CERCULUI

TEOREMA 6. *Fie $K$ o curbă simplă închisă cu tangentă. Dacă $J$-metrica respectivă admite un subcontinuu $\gamma$ de puncte de izotropie transversă, $K$ este un cerc.*

Demonstraţie. Curba $K$ admite în ea însăşi subgrupul continuu anallagmatic $\Gamma$, generat în grupul anallagmatic total de familia de simetrii anallagmatice cu cîte un punct fix $Q$ în $\gamma$, generate de teorema fundamentală.

Acest grup conţine sigur un subgrup continuu $G$ cu un parametru. Curba $K$ este o traiectorie închisă a acestui grup. După cum se ştie $G$ rezultă constituit obligatoriu din mişcări eliptice respectiv parabolice. Dar traiectoriile unui astfel de grup sînt evident cercuri sau drepte. Aşadar, $K$ este un cerc.

## 5°. CONSECINŢE PENTRU TEORIA FUNCŢIILOR

Fie $k$ o curbă simplă închisă iar

$$Z = f(z) = p(x, y) + iq(x, y) \tag{19}$$

o funcţie de punct univalentă în domeniul interior $j$ inclusiv frontiera $k$.

Este clar că modulul $|Z_1 - Z_2|$ constituie o semidistanță tare pe întreaga mulțime închisă $j + k$, căci este pozitivă și nu se anulează decît pentru $z_1 = z_2$, din cauza univalenței.

Ca atare, luînd ca influență $|T - Z|$ cu $t \in k$, $z \in j$, definim în $j$ o metrică slabă. Să întărim ipotezele și să presupunem că funcția $Z = f(z)$, univalentă în $j + k$, reprezintă pe $k$ cu continuitate pe o altă curbă închisă simplă $K$ din planul $Z$ cu interioritate (așadar reprezintă pe $j$ pe o submulțime a interiorului $J$ al lui $K$).

În aceste condiții metrica devine tare. Într-adevăr, cum $Z_1$, $Z_2$ pentru $z_1$, $z_2 \in j$ cad în $J$ și sînt diferiți o dată cu $z_1$, $z_2$, raportul de influențe

$$\frac{T - Z_1}{T - Z_2}$$

nu rămîne constant pe $K$, altfel $K$ ar fi un cerc al lui Apollonius din planul $Z$ și ar separa punctele $Z_1$, $Z_2$ contrar ipotezei.

În definitiv, conchidem că fiecărei funcții de punct univalentă în $j + k$, care reprezintă cu interioritate pe $k$ peste o altă curbă simplă închisă $K$, introduce în $j$ o metrică.

Cazul cel mai important este însă acela al funcțiilor olotope ale lui Onicescu.

Presupunem că funcția (19) de punct $Z = f(z)$ este continuă pe $k$ și olotopă în $j$, adică $p$, $q$ admit derivate parțiale continue în raport cu $x$, $y$ de determinant

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} \neq 0,$$

nicăieri nul în $j$.

În acest caz putem demonstra :

TEOREMA 7. *Dacă $Z = f(z)$ este o funcție continuă biunivocă pe curba simplă închisă $k$ și olotopă în interiorul $j$ al ei, ea introduce în $j$ o metrică, imagine biunivocă a unei $J$ - metrice.*

Demonstrație. Într-adevăr, transformarea generată de $Z = f(z)$ este biunivocă și bicontinuă în $j$ deci aplică pe $j$ omeomorf pe o mulțime deschisă simplu conexă $J$ din planul $Z$. Frontiera mulțimii $J$ nu poate fi decît un punct sau un arc de curbă, astfel $J$ n-ar fi simplu conex. Nu poate fi un punct din cauza biunivocității funcției $f(z)$, mai mult chiar, din aceeași cauză arcul trebuie să fie o curbă simplă închisă. Avem deci în $J$ închis cu $K$, imaginea omeomorfă a lui $j$ închis cu $k$. Semidistanța $|f(z_1) - f(z_2)|$ cu care este construită metrica în $j + k$ este egală cu distanța euclidiană $|Z_1 - Z_2|$ din $J + K$.

Deci metrica din $j$ este imagine biunivocă și nelacunară a $J$ - metricei din $J$.

Așa fiind, caracteristicile de la punctele precedente ale cercului se transpun aici în consecințe funcțional- teoretice foarte importante.

Mai întîi să traducem elementele determinative ale $J$ - metricei în limbajul metricelor din $j$. Este clar că geodeticele din $J$ și $j$ se corespund

reciproc, întrucît definiția lor este intrinsecă. Altul este cazul elementului de arc finslerian și punctelor de sprijin.

Este clar că punctele de sprijin ale elementului de arc de centru $A \to J$ și direcție $\dot{X}$, $\dot{Y}$ sînt punctele de pe $K$ pentru care cercurile lui Apollonius ale lui $\dot{X}$, $\dot{Y}$ sînt extremale. Altfel spus, sînt punctele pentru care raza (sau inversul $\frac{1}{\rho}$ al acesteia) atinge un extremum. Dar inversul $\frac{1}{\rho}$ al razei unui cerc tangent în $A$ la direcția perpendiculară pe $\dot{X}$, $\dot{Y}$ și care trece prin punctul $P$ este egal cu $\frac{2\cos\theta}{AP}$, unde $\theta$ este unghiul pe care $AP$ îl face cu direcția $\dot{X}$, $\dot{Y}$ a elementului de arc.

Un calcul ușor arată că $\frac{2\cos\theta}{AP}$ este dat de

$$\frac{1}{|T-Z|}\left(\arg\frac{dz}{T-Z}+\arg\frac{d\bar{z}}{\overline{T-Z}}\right),$$

iar

$$\frac{1}{\rho}d\sigma=\frac{dz}{T-Z}+\frac{d\bar{z}}{\overline{T-Z}}, \tag{20}$$

unde $d\sigma$ este elementul de arc euclidian.

Încît putem enunța:

TEOREMA 8. *În metrica finsleriană mijlocită în interiorul $j$ al curbei simple închise $k$ de funcția $Z = f(z)$ olotopă în $j$, continuă și biunivocă pe $k$, elementul finslerian de arc corespunzător punctului $z$ și direcției $dz$ este dat de suma*

$$ds=\operatorname{Max}\left|\frac{dz}{T-Z}+\frac{d\bar{z}}{\overline{T-Z}}\right|+\operatorname{Max}\left|\frac{dz}{T-Z}+\frac{d\bar{z}}{\overline{T-Z}}\right|,$$

*unde $t$ în $T = f(t)$ parcurge curba $j$ și unde primul, respectiv al doilea, maxim se referă la regiunea lui $j$ în care* (1) *este pozitiv, respectiv negativ.*

Punctele $T, t$ de pe $j$ care realizează aceste extreme se numesc punctele de sprijin ale elementului de arc.

Definiția punctului de izotropie transversă, dacă ne mărginim a postula numai derivatele prime pe $k$ și numai derivatele parțiale de ordinul întîi ale lui $p$ și $q$, trebuie să rămînă neintrinsecă: punctul $a$ din $j$ a cărui imagine $A$ din $J$ este un punct de izotropie transversă pentru $J$-metrica finsleriană. Aceasta, fiindcă nu dispunem de o definiție directă comodă a imaginii în $j$ a cercului de transversalitate și a punctului său caracteristic.

Să observăm că existența în $J$ a punctului caracteristic pe cercul transvers este asigurată dacă curba $K$ este de două ori derivabilă. În acest caz punctul de izotropie transversă admite o descriere intrinsecă în $j$. Se recunoaște ușor că avem:

TEOREMA 9. *Fie $Z = f(z)$ o funcție olotopă în interiorul $j$ al curbei simple închise de două ori derivabilă $k$, biunivocă pe $k$, cu derivate pînă la al*

*doilea ordin inclusiv pe k. Zicem că $a \to j$ este un loc de izotropie transversă cînd punctele de sprijin T, t ale tuturor elementelor finsleriene cu centrul în a, umplu întreaga curbă k. În acest caz imaginea A a lui a în J este sigur un loc de izotropie transversă în prima accepțiune a cuvîntului.*

Să numim funcția de reprezentare a lui Onicescu o funcție olotopă în $j$ care face reprezentarea lui $j$ pe interiorul unui cerc. Este clar că funcția de reprezentare a lui Riemann intră printre acestea, deci existența funcțiilor lui Onicescu este asigurată prin cel puțin acest exemplu. Este clar că funcția de reprezentare a lui Onicescu constituie în realitate o clasă de funcții deduse una din alta prin transformări olotope de automorfism ale cercului.

Ca o consecință a celor trei caracterizări ale cercului de mai sus și a teoremelor precedente avem următoarele teoreme:

TEOREMA I. *În cadrul funcțiilor olotope în interiorul j al curbei simple închise, de două ori derivabile k, în același timp biunivoce și de două ori derivabile pe k, funcția lui Onicescu $f(z)$ (clasă de funcții) este complet caracterizată prin existența unui punct de izotropie geodetică în j sau pe k, în j - metrica generată de $f(z)$.*

TEOREMA II. *În același cadru, funcția lui Onicescu $f(z)$ este complet caracterizată prin existența în j a două puncte de izotropie transversă q', q'' în care j-metrica finsleriană generată de $f(z)$ este riemanniană.*

TEOREMA III. *În același cadru funcția lui Onicescu $f(z)$ este complet caracterizată prin existența în j a unui arc $\lambda$ de puncte de izotropie transversă în j - metrica generată de $f(z)$.*

Dacă ne mulțumim cu definiția neintrinsecă a izotropiei transverse (preluînd-o de la $J$ - metrica imagine) condițiile precedente pot fi slăbite, cerînd numai existența tangentei pe $K$, biunivocitatea și existența primelor derivate pe $k$ ale lui $f(z)$.

În sfîrșit, dacă în teoremele precedente luăm drept cadru funcții $f(z)$ de variabilă complexă, regulate și inversabile în $j$, biunivoce și de două ori derivabile pe curba simplă închisă, de două ori diferențiabilă, $k$, fiecare din aceste teoreme ne dau prin specializare funcția de reprezentare a lui Riemann (căci $j$ este aplicat biunivoc pe cerc).

Aceeași observație din cazul general cu privire la slăbirea ipotezelor este valabilă și aici.

Primită la redacție la 20 octombrie 1961

## ФИНСЛЕРОВЫЕ ЕСТЕСТВЕННЫЕ $J$-МЕТРИКИ И ФУНКЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНА

### РЕЗЮМЕ

В настоящей статье характеризуется функция отображения Римана при помощи некоторой финслеровой метрики, внутренним образом ассоциированной с областью.

# LES $J$-MÉTRIQUES FINSLÉRIENNES NATURELLES ET LA FONCTION DE REPRÉSENTATION DE RIEMANN

RÉSUMÉ

Dans cet article on donne une caractérisation de la fonction de représentation de Riemann par les particularités d'une certaine métrique finslérienne, intrinsèquement associée au domaine.

BIBLIOGRAFIE

1. D. BARBILIAN, *Asupra unui principiu de metrizare.* Studii şi cercetări matematice, **X**, *1* (1959).
2. — *Fundamentele metricilor abstracte ale lui Poincaré şi Caratheodory, ca aplicaţie a unui principiu general de metrizare.* Studii şi cercetări matematice, **X**, *2* (1959).
3. — *J - metricele naturale finsleriene.* Studii şi cercetări matematice, **XI**, *1* (1960).

# ASUPRA UNUI MODEL LOGIC AL PĂRȚII DE VORBIRE

DE

SOLOMON MARCUS

## § 1. INTRODUCERE

În lingvistica tradițională, fiecare parte de vorbire (substantiv, adjectiv, verb etc.) se definește prin referire la sens : cuvintele care exprimă obiecte sînt substantive, cuvintele care exprimă acțiuni sînt verbe, cuvintele care exprimă proprietăți sînt adjective. În ceea ce privește partea de vorbire ca atare, această noțiune nu se definește direct în gramatica tradițională, ci este dedusă doar ca o sinteză a părților de vorbire particulare.

Un astfel de mod de prezentare nu se putea să nu ducă la contradicții, la situații ambigue, relevate de multe ori. Pentru a da doar un exemplu, dintre cele mai recente, vom cita critica adusă de J. Ruvinschi în [10]. Pe drept cuvînt, J. Ruvinschi observă că există substantive care, în anumite contexte, exprimă o proprietate („la *volonté* de cet homme") sau o acțiune ("la *fabrication* d'une chaise").

De altfel, J. Ruvinschi nu face decît să reia o critică mai veche. Care este ieșirea? Un răspuns a încercat să dea Slotty în 1932. Acest autor a căutat să demonstreze că părțile de vorbire au un dublu caracter, care rezultă din cele două funcții ale lor : funcția semantică (sau lexicală) și funcția sintactică. După Slotty, părțile de vorbire reprezintă categorii (de cuvinte) avînd pe de o parte o valoare lexicală (sau semantică) foarte generală, pe de altă parte o funcție sintactică determinată. De exemplu, un substantiv se caracterizează nu numai prin faptul că desemnează un obiect, ci și prin aceea că îndeplinește funcția de subiect ; verbul se caracterizează nu numai prin faptul că desemnează o acțiune sau o stare trecătoare, ci și prin aceea că îndeplinește funcția de predicat.

Însă, substantivele îndeplinesc uneori funcția de atribut sau de complement iar verbele nu sînt totdeauna predicate. S-ar părea deci că

nu se poate stabili o corespondență severă între funcțiile semantice pe de o parte și funcțiile sintactice pe de altă parte.

S-a observat însă că diferitele funcții sintactice ale unui același cuvînt se ordonează într-o ierarhie care conferă uneia dintre ele calitatea de funcție principală, celorlalte lăsîndu-le pe aceea de funcție secundară. Se pare că de acest lucru a fost conștient și Slotty, care vorbește despre o *funcție sintactică primară* și L. Hjelmslev, care se referă la *funcția ordinară* a părților de vorbire. Însă, nici unul dintre acești autori nu stabilește un criteriu obiectiv prin care să se distingă funcția sintactică principală de funcțiile sintactice secundare. Primul lingvist care a încercat să dea un astfel de criteriu este J. Kuryłowicz. Acesta arată că un astfel de criteriu trebuie să recurgă la mijloace de analiză formală a limbii. După el, legea de care ascultă raportul dintre funcția sintactică primară și funcțiile sintactice secundare este următoarea [4]*) :

„Dacă schimbarea funcției sintactice a unei forme (a unui cuvînt) $A$ implică schimbarea lui $A$ în $B$ (funcția lexicală rămînînd aceeași), este funcție sintactică primară, aceea care corespunde formei-bază, iar funcția care corespunde formei derivate este o funcție sintactică derivată".

Un exemplu din limba romînă ar fi următorul : fie $A$ = *cîntă*, $B$ = *cîntînd*. $A$ și $B$ au aceeași funcție lexicală, dar funcția sintactică a lui $A$ este aceea de predicat, spre deosebire de $B$ care nu poate fi predicat. Deoarece $A$ este forma-bază iar $B$ este forma derivată, rezultă că funcția sintactică primară a lui *a cînta* este aceea de predicat.

Ar urma ca orice cuvînt care desemnează un obiect și se află la o formă-bază să fie substantiv, însă rămîne de stabilit criteriul cu care se decide că o formă derivată (de exemplu *frumosul*, *fabricarea*) sau o formă-bază care desemnează o acțiune sau o proprietate (de exemplu *proces*) sînt sau nu substantive. Probleme analoge apar și în legătură cu verbul, adjectivul etc.

Totodată trebuie să observăm că un astfel de mod de a pune problema este condiționat și de posibilitatea de a face, pe baza unor criterii riguroase, distincția între forme-bază și forme derivate.

Mulți lingviști, printre care și V. Brøndal, au susținut caracterul *funciarmente lexical* al părților de vorbire. J. Kuryłowicz, de acord cu ceea ce este esențial în concepțiile lui Slotty și Brøndal, semnalează în plus faptul că funcția sintactică a părții de vorbire este un corolar al funcției ei lexicale.

În orice caz, discuția de mai sus, care relatează doar o parte din punctele de vedere existente în legătură cu părțile vorbirii, arată că se impune o analiză mai severă a părților de vorbire, a naturii lor logice, a mecanismului prin care sînt implicate funcția lexicală și funcția sintactică.

Cerința de a clasifica cuvintele în părți de vorbire, pe baza unor criterii riguroase, a devenit manifestă o dată cu prelucrarea limbii pentru nevoile automatizării informării și traducerii dintr-o limbă în alta. O abor-

*) Referințele la Slotty și Hjelmslev se găsesc de asemenea în [4].

dare cu totul nouă a acestei probleme, abordare care valorifică cele mai bune tradiții ale lingvisticii descriptive, poziționale, dar care în același timp se ridică cu o treaptă mai sus față de aceasta prin eficacitatea sporită a metodei de cercetare adoptate, a fost întreprinsă în ultimii ani de către O.S. Kulaghina, V. A. Uspenski și I. I. Revzin.

În construcția Kulaghina-Uspenski-Revzin sînt implicate atît funcția lexicală (de exemplu prin intermediul $V$-partiției, adică a clasificării cuvintelor în paradigme) cît și funcția sintactică (prin intermediul frazelor marcate și a structurilor marcate). Din acest punct de vedere, există concordanță între prezentarea descriptivă a părții de vorbire și prezentarea ei prin intermediul unui model logic. Dar ceea ce aduce nou prezentarea prin model este punctul de vedere conform căruia o descriere științifică a părții de vorbire, în toată complexitatea ei, trebuie concepută ca limită a unui șir de aproximări. Modelul Kulaghina-Uspenski-Revzin este tocmai o primă aproximare de acest fel, aproximare care ar putea și fără îndoială că va fi ulterior ameliorată.

În cele ce urmează, ne propunem să arătăm că diferitele caracterizări și proprietăți ale noțiunii de *parte de vorbire* obținute de autorii mai sus citați, pot fi deduse printr-un procedeu uniform, ca niște simple corolarii ale unei teoreme referitoare la condițiile în care două partiții ale unei mulțimi au aceeași derivată (în sensul lui O. S. Kulaghina; a se vedea mai jos). Cu acest prilej, vom studia și alte proprietăți ale partițiilor derivate, iar lemele și propozițiile intermediare au probabil și un interes în sine.

## § 2. AMINTIREA UNOR NOȚIUNI INTRODUSE ÎN [3]

Fie o mulțime finită $E$ de elemente numite *cuvinte*. Se consideră o anumită partiție a mulțimii $E$, partiție pe care o vom nota cu $V$ și o vom numi: partiția în *vecinătăți*. Termenul din $V$ căruia îi aparține un cuvînt $x \in E$ îl vom reprezenta prin $V(x)$; $V(x)$ este vecinătatea lui $x$. În interpretare comprehensivă, $V(x)$ este de obicei paradigma cuvîntului $x$, adică totalitatea formelor flexionare ale lui $x$. Orice sistem finit și ordonat de cuvinte (unele putîndu-se repeta) se numește *frază*. Anumite fraze se consideră *fraze marcate*. În interpretare comprehensivă, frazele marcate sînt de obicei frazele corect construite. Cuvîntul, vecinătatea și fraza marcată nu se definesc, fiind considerate ca date; prin intermediul acestor noțiuni intervine, în cele ce urmează, latura semantică a limbii.

Fie două partiții $A$ și $B$ ale mulțimii $E$:

$$A : E = \bigcup_i A_i , \tag{1}$$

$$B : E = \bigcup_j B_j . \tag{2}$$

Pentru fiecare $x \in E$ vom reprezenta prin $A(x)$ mulțimea $A_i$ pentru care $x \in A_i$ și prin $B(x)$ mulțimea $B_j$ pentru care $x \in B_j$. Vom spune că *$B$ este o mărire a lui $A$* dacă, pentru orice $x \in E$, avem $A(x) \subset B(x)$,

incluziunea fiind strictă pentru cel puțin un $x$ (altfel, partițiile $A$ și $B$ coincid). Vom numi *$A$-structură* (*respectiv $B$-structură*) a frazei $x_1 x_2 \ldots x_n$ următorul sistem finit și ordonat de termeni din $A$ (respectiv $B$) :

$$A(x_1)\ A(x_2)\ldots A(x_n) \text{ (respectiv } B(x_1)\ B(x_2)\ldots B(x_n)).$$

Orice sistem finit și ordonat de termeni din $A$ (respectiv $B$), unii termeni putîndu-se repeta, este, prin definiție, o $A$-structură (respectiv $B$-structură). O $A$-structură se numește *marcată* dacă ea este $A$-structura cel puțin a unei fraze marcate. Analog se definesc $B$-structurile marcate. $A$-structurile se pot compune prin juxtapunere. Compunerea mai multor $A$-structuri (respectiv $B$-structuri) conduce la o nouă $A$-structură (respectiv $B$-structură).

Vom spune că *$A$-structurile $A'$ și $A''$ sînt $A$-echivalente* și vom scrie

$$A' \underset{A}{\sim} A''$$

dacă pentru orice pereche de $A$-structuri, $A_1$ și $A_2$, $A$-structurile $A_1 A' A_2$ și $A_1 A'' A_2$ sînt sau amîndouă marcate sau amîndouă nemarcate. În mod analog se definește $B$-echivalența a două $B$-structuri.

Vom spune că partiția $B$, definită de (2), este o *mărire regulată* a partiției $A$, definită de (1), dacă $B$ este o mărire a lui $A$ și dacă, din $A_i \subset B_j \supset A_k$ rezultă $A_i \underset{A}{\sim} A_k$.

Să considerăm din nou partiția (1) și să punem, pentru $x \in E$,

$$A'(x) = \bigcup_{A(y) \underset{A}{\sim} A(x)} A(y) \tag{3}$$

deci reuniunea din membrul al doilea se extinde la toți termenii din (1) care sînt $A$-echivalenți cu $A(x)$. Este evident că mulțimile $A'(x)$ determină o nouă partiție a mulțimii $E$; aceasta este, prin definiție, *partiția derivată* a lui $A$ și se notează cu $A'$.

Prin inducție, se definește partiția $A^{(n+1)}$, derivata de ordinul $n+1$ a partiției $A$, prin expresia $(A^{(n)})'$.

*Partiția unitate* a mulțimii $E$ este, prin definiție, partiția în care fiecare termen este constituit dintr-un singur element. Partiția derivată a partiției unitate se numește *partiția în familii*. Orice termen al acestei partiții este, prin definiție, o *familie*. Familia care conține elementul $x \in E$ va fi notată cu $S(x)$.

Se numește *limbă* o mulțime $E$ de cuvinte, înzestrată cu o partiție în vecinătăți $V$ și un sistem $\theta$ de fraze marcate. O limbă se notează $E(V, \theta)$.

## § 3. NOȚIUNEA DE TIP, CA APROXIMARE A „PĂRȚII DE VORBIRE"

Partiția derivată a partiției în vecinătăți este, prin definiție, *partiția în tipuri* [3]. Notînd cu $V$ partiția în vecinătăți și cu $T$ partiția în tipuri, avem deci $V' = T$; un tip se obține reunind laolaltă toate vecinătățile

$V$-echivalente între ele. Dacă interpretăm vecinătățile ca paradigme, înțelegînd prin $V(x)$ totalitatea formelor flexionare ale cuvîntului $x$, atunci este evident că orice definiție a părții de vorbire trebuie să fie de așa natură încît două cuvinte care aparțin aceleiași paradigme (deci aceleiași vecinătăți) să aparțină aceleiași părți de vorbire. Reciproca însă nu mai poate fi adevărată și trebuie să dăm un criteriu cu ajutorul căruia să decidem în ce condiții cuvintele din două paradigme diferite intră în aceeași parte de vorbire. Răspunsul care se degajă din [3], [11] și [9] este următorul : două cuvinte $x$ și $y$ aparțin aceleiași părți de vorbire dacă

$$V(x) \underset{V}{\sim} V(y).$$

Orice tip, adică orice termen al partiției $T$, aproximează deci o anumită parte de vorbire.

Trebuie să remarcăm că aici nu este vorba de o aproximare în sens statistic, ci de o modelare logică a unui fenomen natural, modelare care înregistrează, reține esențialul sau o parte din ceea ce este esențial în fenomenul respectiv. De aceea, poate că ar fi indicat să se spună *modelează* în loc de *aproximează*, ultimul termen putînd da naștere la confuzii*).

Între noțiunea de tip și conceptul de parte de vorbire, așa cum este el utilizat în lingvistică, există o anumită neconcordanță. Astfel, în modelarea de mai sus s-a presupus că paradigmele determină o partiție a mulțimii de cuvinte, deci că două paradigme distincte sînt totdeauna disjuncte. În realitate, aceasta nu se întîmplă totdeauna ; de exemplu paradigma cuvîntului *cap* cu pluralul *capete* are o intersecție nevidă cu paradigma cuvîntului *cap* cu pluralul *capi*.

O altă neconcordanță între *tip* și *parte de vorbire* a fost remarcată de V. A. Uspenski [11]. Dacă ținem seama că noțiunea de *familie*, introdusă de O. S. Kulaghina, este o modelare a noțiunii de *clasă de distribuție* cu care se lucrează în lingvistica descriptivă și dacă pornim de la faptul că, în limbile naturale, din apartenența a două cuvinte la aceeași clasă de distribuție rezultă apartenența lor la aceeași parte de vorbire, atunci trebuie să ne așteptăm la următorul rezultat :

*a*) dacă două elemente din $E$ aparțin aceleiași familii, atunci ele aparțin aceluiași tip.

După cum a semnalat V. A. Uspenski [11], propoziția *a*) este falsă. O limbă $E(V, \theta)$ pentru care propoziția *a*) este adevărată se numește *limbă adecvată*. Considerarea tipului ca model logico-matematic al părții de vorbire își capătă o justificare deplină numai în limbile adecvate.

---

*) Asupra naturii aproximării prin model a unui fenomen de limbă a se vedea și : N. Chomsky [1] și A. A. Zinoviev și I. I. Revzin [13].

Modelele logice de limbă se referă la sistemele lingvistice potențiale și ele preced introducerea probabilității lingvistice. A se vedea S. K. Șaumian [12].

## § 4. NOȚIUNEA DE TIP ÎN UNELE MODELE LINGVISTICE PARTICULARE

În cazul particular al limbilor adecvate, un alt mod de a ajunge la partiția în tipuri a fost indicat de V. A. Uspenski [11] și își are originea într-o noțiune introdusă de I. I. Revzin [9]. Fie $x$ și $y$ două elemente din $E$. Vom spune că $x$ și $y$ sînt în relația $R$ dacă există un șir finit de cuvinte $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ cu următoarele trei proprietăți : 1° $x = x_1$, 2° $y = x_n$, 3° pentru fiecare număr natural $i < n$ are loc cel puțin una din relațiile $x_i \in V(x_{i+1})$, $x_i \in S(x_{i+1})$. Se verifică ușor că $R$ este o relație de echivalență în $E$. Un exemplu de cuvinte care se află în relația $R$ îl constituie $x =$ *casă* și $y =$ *cărților*. Într-adevăr, fie $x_1 = x$, $x_2 =$ *caselor*, $x_3 = y$. Avem $x_1 \in V(x_2)$, $x_2 \in S(x_3)$. Clasele de $R$-echivalență se numesc *secțiuni* [9]. Partiția în secțiuni o vom numi *R-partiția* mulțimii $E$. V. A. Uspenski a enunțat următoarele teoreme [11] :

TEOREMA $\alpha$. *Pentru orice limbă adecvată* $E(V, \theta)$, *are loc, oricare ar fi* $x \in E$, *incluziunea* $R(x) \subset T(x)$.

TEOREMA $\beta$. *Pentru orice limbă adecvată* $E(V, \theta)$, *are loc egalitatea* $R' = T$.

Teorema $\alpha$ afirmă deci că, pentru limbi adecvate, partiția în tipuri este o mărire a partiției în secțiuni, sau coincide cu partiția în secțiuni, în timp ce teorema $\beta$ afirmă că pentru limbi adecvate partiția derivată a partiției în secțiuni este partiția în tipuri.

*Secțiunile* definite de I. I. Revzin [9] capătă o descriere mai simplă în cazul limbilor *conforme* sau *omogene* *). Prin definiție, o limbă $E(V, \theta)$ este conformă (sau omogenă) dacă, pentru orice pereche de elemente $x \in E$, $y \in E$, relația $V(x) \cap S(y) \neq 0$ implică relația $V(y) \cap S(x) \neq 0$. V. A. Uspenski a enunțat în [11] :

TEOREMA $\gamma$. *Orice limbă conformă (sau omogenă) este adecvată.*

TEOREMA $\delta$. *Dacă* $E(V, \theta)$ *este o limbă conformă iar* $x \in E$ *și* $y \in E$, *atunci* $x$ *și* $y$ *aparțin aceleiași secțiuni dacă și numai dacă* $V(x) \cap S(y) \neq 0$.

Teoremele $\gamma$ și $\delta$ capătă o semnificație deosebită, dacă ținem seama că limbile conforme sau omogene aproximează, modelează limbile aglutinante.

Fie $E(V, \theta)$ o limbă oarecare. *Clasa* $K(x)$ a unui cuvînt $x$ este, prin definiție, totalitatea cuvintelor $y \in E$ pentru care are loc cel puțin una din condițiile $V(x) \cap S(y) \neq 0$, $V(y) \cap S(x) \neq 0$ [3].

O limbă conformă $E(V, \theta)$ pentru care din $x \in E$ rezultă $V(x) \cap S(x) = \{x\}$ se numește *limbă simplă* [3] (a se vedea și [9]). O. S. Kulaghina a demonstrat în [3] :

TEOREMA $\varepsilon$. *Dacă* $E(V, \theta)$ *este o limbă simplă, atunci clasele determină o partiție a lui* $E$ : *K-partiția mulțimii* $E$.

TEOREMA $\zeta$. *Dacă* $E(V, \theta)$ *este o limbă simplă, atunci* $K' = T$.

Fie o limbă $E(V, \theta)$. Vom spune că cuvîntul $x \in E$ este *conform* dacă pentru orice pereche de elemente $y \in V(x)$, $z \in S(x)$ are loc relația

---

*) Prima denumire aparține lui V. A. Uspenski [11], în timp ce a doua a fost introdusă de I. I. Revzin [9].

$S(y) \cap V(z) \neq 0$ *). O limbă va fi, prin definiție, *local conformă*, dacă orice cuvînt al ei este conform.

Propoziția 1. *O limbă* $E(V, \theta)$ *este conformă dacă și numai dacă este local conformă.*

Demonstrație. Să presupunem că fiecare cuvînt din $E$ este conform și fie $u \in E$, $v \in E$ astfel încît $V(u) \cap S(v) \neq 0$. Există deci un cuvînt $w \in E$ astfel încît $w \in V(u) \cap S(v)$, deci $u \in V(w)$, $v \in S(w)$. Însă $w$ este, prin ipoteză, un cuvînt conform deci $S(u) \cap V(v) \neq 0$ și limba $E(V, \theta)$ este conformă.

Să presupunem acum că $E(V, \theta)$ este o limbă conformă și fie $y \in V(x)$, $z \in S(x)$ $(x \in E)$. Rezultă că $x \in V(y)$, $x \in S(z)$, deci $V(y) \cap S(z) \neq 0$. De aici, în baza ipotezei că $E(V, \theta)$ este conformă, rezultă $S(y) \cap V(z) \neq 0$, deci cuvîntul $x$ este conform.

Propoziția 2. *Fie* $E(V, \theta)$ *o limbă oarecare. Dacă intersecția* $V(x) \cap S(y)$ *conține cel puțin un cuvînt conform, atunci* $V(y) \cap S(x) \neq 0$.

Demonstrație. Prin ipoteză, există un cuvînt conform $z$, astfel încît $z \in V(x) \cap S(y)$. Din $z \in V(x)$ rezultă $x \in V(z)$ iar din $z \in S(y)$ rezultă $y \in S(z)$. De aici, ținînd seamă că $z$ este conform, rezultă $S(x) \cap V(y) \neq 0$.

Propoziția 3. $E(V, \theta)$ *este o limbă conformă dacă și numai dacă are loc următoarea condiție: pentru orice pereche de cuvinte,* $x \in E$, $y \in E$ *pentru care* $V(x) \cap S(y) \neq 0$ *există un cuvînt conform* $z \in V(x) \cap S(y)$.

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din propoziția 1. Pentru a demonstra suficiența condiției, fie $x \in E$, $y \in E$ astfel încît $V(x) \cap S(y) \neq 0$. Conform ipotezei, există un cuvînt conform $z \in V(x) \cap S(y)$. Putem, deci, aplica propoziția 2 și deducem că $V(y) \cap S(x) \neq 0$, deci limba este conformă.

Din teorema 8, rezultă imediat

Propoziția 4. *Fie* $E(V, \theta)$ *o limbă conformă. Două cuvinte* $x \in E$, $y \in E$ *aparțin aceleiași secțiuni dacă și numai dacă* $V(x) \cap S(y) \neq 0 \neq V(y) \cap S(x)$.

Pe de altă parte, din definiția clasei $K(x)$ a unui cuvînt $x$ rezultă

Propoziția 5. *Fie* $E(V, \theta)$ *o limbă conformă. Clasa* $K(x)$ *a unui cuvînt* $x \in E$ *este formată din totalitatea cuvintelor* $y \in E$ *pentru care* $V(x) \cap S(y) \neq 0 \neq V(y) \cap S(x)$.

Din propozițiile 4 și 5 rezultă

Propoziția 6. *Fie* $E(V, \theta)$ *o limbă conformă. Două cuvinte* $x \in E$, $y \in E$ *aparțin aceleiași clase dacă și numai dacă ele aparțin aceleiași secțiuni.*

Deoarece, după cum am mai remarcat, secțiunile distincte sînt totdeauna disjuncte, rezultă

Propoziția 7. *Dacă* $E(V, \theta)$ *este o limbă conformă, atunci împărțirea lui E în clase determină o partiție a lui E; o vom numi partiția în clase sau K-partiția mulțimii E.*

*Observație.* Dacă în enunțul propoziției 7 înlocuim cuvîntul *conformă* prin cuvîntul *simplă*, atunci obținem teorema 2 din [3] (teorema ε de mai

*) Această proprietate apare în [3], ca o parte din definiția limbilor simple.

sus). În fapt, demonstrația teoremei 2 este valabilă pentru orice limbă local conformă, deci, în baza propoziției 1, pentru orice limbă conformă.

Propoziția 8. *Dacă* $E$ $(V, \theta)$ *este o limbă conformă, atunci* $K' = T$.

Demonstrație. Mai întîi să observăm că operația de derivare aplicată lui $K$ are sens în baza propoziției 7. În baza teoremei $\gamma$, $E(V, \theta)$ este o limbă adecvată. În baza propoziției 6, avem, pentru orice $x \in E$, $R(x) = K(x)$. De aici și din teorema $\beta$ rezultă $K' = T$.

*Observație.* Dacă în enunțul propoziției 8 înlocuim cuvîntul *conformă* prin cuvîntul *simplă*, atunci obținem teorema 3 din [3] (teorema $\zeta$ de mai sus).

## § 5. UN ASPECT AL IZOMORFISMULUI LINGVISTIC

Definiția de mai sus a tipului permite să se scoată în evidență un aspect remarcabil al așa-numitului izomorfism lingvistic. Să considerăm următoarele trei noțiuni lingvistice : prefonemul, clasa de distribuție și partea de vorbire. Din punctul de vedere al modelării logice, aceste trei noțiuni sînt indiscernabile, înscriindu-se toate în următoarea schemă :

Se consideră o mulțime de elemente $X$. Orice sistem finit și ordonat de elemente din $X$ se numește *cortegiu* (unele elemente se pot repeta). Anumite cortegii sînt considerate *marcate*. Definim în $X$ o relație de echivalență $\rho$, în felul următor : pentru $x \in X$, $y \in X$ avem $x \rho y$ dacă pentru oricare două cortegii $c_1$ și $c_2$ cortegiile $c_1\, x\, c_2$ și $c_1\, y\, c_2$ sînt sau amîndouă marcate sau amîndouă nemarcate (este evident că prin juxtapunerea mai multor cortegii se obține tot un cortegiu). Verificarea faptului că $\rho$ este o relație de echivalență o lăsăm pe seama cititorului.

Să considerăm acum împărțirea mulțimii $X$ în clase de $\rho$-echivalență. Dacă elementele lui $X$ sînt sunetele vorbirii iar cortegiile marcate sînt cuvintele limbii, atunci clasele de $\rho$-echivalență modelează prefonemele limbii, deoarece un prefonem este totalitatea sunetelor vorbirii care apar exact în aceleași contexte de sunete ale vorbirii *). Dacă elementele lui $X$ sînt cuvinte iar cortegiile marcate sînt frazele corect construite, atunci clasele de $\rho$-echivalență sînt familiile — în sensul lui O. S. Kulaghina — și modelează clasele de cuvinte care se află în distribuție identică. În sfîrșit, dacă elementele lui $X$ sînt vecinătățile cuvintelor din $E$ iar cortegiile marcate sînt $V$-structurile marcate — în sensul lui O. S. Kulaghina — atunci clasele de $\rho$-echivalență sînt tocmai tipurile și ele modelează, după cum am văzut, împărțirea cuvintelor unei limbi în părți de vorbire.

Este interesant să se urmărească mai departe acest izomorfism, căutîndu-se analogul categoriei gramaticale elementare introduse de R. L. Dobrușin în [2], în cazurile în care $X$ = mulțimea sunetelor vorbirii, $\theta$ = mulțimea cuvintelor și $X$ = mulțimea vecinătăților din $E$, $\theta$ = mulțimea $V$-structurilor marcate. Ținînd seama de unele considerații din [7] și [8], este de așteptat ca în primul caz să se obțină un instrument util în descrierea

*) A se vedea, pentru această interpretare, observația din [13], p. 110.

fenomenului de neutralizare din fonologie. În ceea ce privește cel de-al doilea caz, este probabil că modelul matematic al categoriei gramaticale elementare să permită aici stabilirea naturii logice a legăturii dintre substantiv și pronume. Însă aceste presupuneri reclamă o verificare ulterioară. (Aparatul matematic al categoriei gramaticale elementare a fost dezvoltat în [6]).

Modelarea logico-matematică permite deci, după cum rezultă de mai sus, nu numai formularea precisă a faptelor de izomorfism lingvistic, dar și dezvăluirea aspectelor nebanale ale acestui izomorfism. Izomorfismul a două fenomene de limbă se dovedește a fi tocmai posibilitatea de a descrie, pînă la un punct, aceste fenomene cu ajutorul unei scheme unice, deci posibilitatea de a le asocia același model logico-matematic.

## § 6. SURSA COMUNĂ A TEOREMELOR PRIVITOARE LA PARTIȚII DERIVATE

Atît definiția inițială a partiției în tipuri cît și teoremele $\beta$ și $\zeta$ descriu partiția în tipuri cu ajutorul operației de derivare, așa cum a fost ea definită în § 2. Totodată, O. S. Kulaghina a demonstrat, în legătură cu operația de derivare a unei partiții, următorul rezultat:

TEOREMA $\lambda$. *Oricare ar fi partiția $P$ a mulțimii $E$, avem $P'' = P'$, cu alte cuvinte o partiție derivată se conservă prin derivare.*

În cele ce urmează ne propunem ca, folosind noțiunile din [3], amintite în § 2, precum și procedeele din [3], dar recurgînd la o altă organizare a materialului, să obținem o teoremă din care teoremele $\beta$, $\zeta$ și $\lambda$ și propoziția 8 să se obțină printr-un procedeu uniform, ca simple corolarii.

LEMA 1. *Dacă $B$ este o mărire a partiției $A$, atunci din faptul că $A$-structura*

$$A(x_1)\,A(x_2)\,\ldots\,A(x_n) \tag{1}$$

*este marcată rezultă că și $B$-structura*

$$B(x_1)\,B(x_2)\,\ldots\,B(x_n) \tag{2}$$

*este marcată.*

Demonstrație. Deoarece $A$-structura (1) este marcată, există o frază marcată $y_1y_2\ldots y_n$ astfel încît $A(x_i) = A(y_i)$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. Dar atunci, din $A(x_i) \subset B(x_i)$ rezultă $A(y_i) \subset B(x_i)$, deci $y_i \in B(x_i)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$. Așadar, $B$-structura (2) este marcată, fiind $B$-structura frazei marcate $y_1y_2\ldots y_n$.

*Observație.* Lema 1 este dată în [3] ca o propoziție evidentă; a se vedea observația 2, după demonstrația lemei 1 din [3].

Fie $P$ o partiție a lui $E$. Vom spune că $P(x)$ *domină* pe $P(y)$ și vom scrie $P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y)$ dacă în orice $P$-structură marcată care conține pe $P(x)$ înlocuirea lui $P(x)$ cu $P(y)$ conduce la o $P$-structură marcată. Este clar că relația $P(x) \underset{P}{\sim} P(y)$ este echivalentă cu ansamblul relațiilor $P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y)$ și $P(y) \underset{P}{\rightarrow} P(x)$.

LEMA 2. *Fie $B$ o mărire a partiției $A$ și fie $x \in E$, $y \in E$. Dacă avem*

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(y) \tag{3}$$

*de îndată ce*

$$A(u) \subset B(x), \tag{4}$$

*atunci*

$$B(x) \underset{B}{\rightarrow} B(y). \tag{5}$$

Demonstrație. Fie

$$B(x_1) \ldots B(x_{n-1})\, B(x)\, B(x_{n+1}) \ldots B(x_p) \tag{6}$$

o $B$-structură marcată. Există deci o frază marcată

$$y_1 y_2 \cdots y_{n-1}\, y_n\, y_{n+1} \cdots y_p \tag{7}$$

care are ca $B$-structură pe (6), deci

$$B(y_i) = B(x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant p,\ i \neq n), \tag{8}$$

$$B(y_n) = B(x). \tag{9}$$

Deoarece fraza (7) este marcată, rezultă că $A$-structura

$$A(y_1) \ldots A(y_{n-1})\, A(y_n)\, A(y_{n+1}) \ldots A(y_p) \tag{10}$$

este marcată. Din ipoteza că $B$ este o mărire a lui $A$ deducem

$$A(y_i) \subset B(y_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{11}$$

În particular, avem, ținînd seama de (9),

$$A(y_n) \subset B(x), \tag{12}$$

deci relația (4) este satisfăcută pentru $u = y_n$. Rezultă că (3) are loc pentru $u = y_n$:

$$A(y_n) \underset{A}{\rightarrow} A(y). \tag{13}$$

Din (13) și din faptul că $A$-structura (10) este marcată, rezultă că $A$-structura

$$A(y_1) \ldots A(y_{n-1})\, A(y) A(y_{n+1}) \ldots A(y_p) \tag{14}$$

este și ea marcată. Ținînd seama de (11) și de lema 1, rezultă că $B$-structura

$$B(y_1) \ldots B(y_{n-1})\, B(y)\, B(y_{n+1}) \ldots B(y_p)$$

este marcată; deci, în baza egalității (8), $B$-structura

$$B(x_1) \ldots B(x_{n-1})\, B(y)\, B(x_{n+1}) \ldots B(x_p) \tag{15}$$

este marcată. Însă $B$-structura (15) se obține din $B$-structura (6) înlocuind $B(x)$ cu $B(y)$, deci relația (5) este stabilită.

Schimbînd între ele, în lema 2, rolurile lui $x$ și $y$, obținem

LEMA 2'. *Fie $B$ o mărire a partiției $A$ și fie $x \in E$, $y \in E$.*

*Dacă avem*

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(x) \tag{3'}$$

*de îndată ce*

$$A(u) \subset B(y) \tag{4'}$$

*atunci*

$$B(y) \underset{B}{\rightarrow} B(x). \tag{5'}$$

Din lemele 2 și 2' deducem

LEMA 3. *Fie $B$ o mărire a partiției $A$ și fie $x \in E$, $y \in E$.*
*Dacă din*

$$A(u) \subset B(x)$$

*rezultă*

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(y)$$

*iar din*

$$A(v) \subset B(y)$$

*rezultă*

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(x)$$

*atunci*

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y). \tag{16}$$

Din lema 3 rezultă următoarea propoziție, stabilită de O. S. Kulaghina (lema 2 din [3]):

COROLAR 1. *Fie $B$ o mărire regulată a partiției $A$. Dacă există $x \in E$, $y \in E$ pentru care $A(x)$ este $A$-echivalentă cu $A(y)$, atunci are loc relația* (16).

Demonstrație. Fie $u \in E$ astfel încît $A(u) \subset B(x)$. Deoarece $B$ este o mărire a lui $A$, avem $A(x) \subset B(x)$ iar din faptul că această mărire este regulată deducem că $A(x)$ este $A$-echivalentă cu $A(u)$. Însă, prin ipoteză, $A(x)$ este $A$-echivalentă cu $A(y)$, deci $A(u)$ este $A$-echivalentă cu $A(y)$; în particular, avem

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(y).$$

Fie acum $v \in E$ astfel încît $A(v) \subset B(y)$. Printr-un raționament analog (schimbînd pe $u$ cu $v$ și pe $x$ cu $y$) deducem

$$A(v) \underset{A}{\rightarrow} A(x)$$

deci toate ipotezele din lema 3 sînt îndeplinite și are loc relația (16).

Vom stabili acum

LEMA 4. *Fie $B$ o mărire regulată a partiției $A$. Să presupunem că există $x \in E$, $y \in E$ astfel încît*

$$B(x) \underset{B}{\rightarrow} B(y) \tag{17}$$

*și, fie $u \in E$, $v \in E$, astfel încît*

$$A(u) \subset B(x), \tag{18}$$

$$A(v) \subset B(y). \tag{19}$$

*În aceste condiții avem*

$$A(u) \underset{A}{\rightarrow} A(v). \tag{20}$$

Demonstrație. Fie

$$A(z_1) \ldots A(z_{m-1})\, A(u)\, A(z_{m+1}) \ldots A(z_s) \tag{21}$$

o $A$-structură marcată. Există deci o frază marcată

$$u_1 \ldots u_{m-1}\, u_m\, u_{m+1} \ldots u_s \tag{22}$$

care are ca $A$-structură pe (21), deci

$$A(u_i) = A(z_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s, i \neq m), \tag{23}$$

$$A(u_m) = A(u). \tag{24}$$

Din faptul că fraza (22) este marcată rezultă că $B$-structura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(u_m)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{25}$$

este marcată. Din faptul că $B$ este o mărire a lui $A$, rezultă că

$$A(u_i) \subset B(u_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s). \tag{26}$$

Din (24) și (26) deducem

$$A(u) \subset B(u_m). \tag{27}$$

Din (18) și (27) rezultă

$$B(x) = B(u_m). \tag{28}$$

Din (28) și din faptul că (25) este o $B$-structură marcată, rezultă că $B$-structura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(x)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{29}$$

este marcată. De aici și din (17) deducem că $B$-structura

$$B(u_1) \ldots B(u_{m-1})\, B(y)\, B(u_{m+1}) \ldots B(u_s) \tag{30}$$

este marcată. Există deci o frază marcată

$$v_1 \dots v_{m-1}\, v_m\, v_{m+1} \dots v_s$$

astfel încît

$$v_i \in B(u_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s,\ i \neq m) \tag{31}$$

și

$$v_m \in B(y). \tag{32}$$

Așadar $A$-structura

$$A(v_1) \dots A(v_{m-1})\ A(v_m)\ A(v_{m+1}) \dots A(v_s) \tag{33}$$

este marcată. Din (31), (32) și din faptul că $B$ este o mărire a lui $A$ rezultă că

$$A(v_i) \subset B(u_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s,\ i \neq m), \tag{34}$$

$$A(v_m) \subset B(y). \tag{35}$$

Din (19), (26), (34),(35) și din ipoteza că $B$ este o mărire regulată a lui $A$, deducem

$$A(u_i) \underset{A}{\sim} A(v_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s, i \neq m), \tag{36}$$

$$A(v) \underset{A}{\sim} A(v_m). \tag{37}$$

Din (36), (37) și din faptul că $A$-structura (33) este marcată, rezultă că $A$-structura

$$A(u_1) \dots A(u_{m-1})\ A(v)\ A(u_{m+1}) \dots A(u_s) \tag{38}$$

este marcată. Însă, ținînd seama de (23), $A$-structura (38) se mai poate scrie

$$A(z_1) \dots A(z_{m-1})\ A(v)\ A(z_{m+1}) \dots A(z_s). \tag{39}$$

Deoarece $A$-structura (39) se obține din $A$-structura (21) prin înlocuirea lui $A(u)$ cu $A(v)$, rezultă că are loc relația (20) și lema 4 este complet demonstrată.

Intervertind, în ipoteza (17) din lema 4, rolurile lui $x$ și $y$, obținem

LEMA 4′. *Fie $B$ o mărire regulată a partiției $A$. Să presupunem că există $x \in E$, $y \in E$ astfel încît*

$$B(y) \underset{B}{\rightarrow} B(x) \tag{17′}$$

*și fie $u \in E$, $v \in E$, astfel încît să aibă loc incluziunile (18) și (19). În aceste condiții, avem*

$$A(v) \underset{A}{\rightarrow} A(u). \tag{20′}$$

Din lemele 4 și 4′ rezultă imediat

LEMA 5. *Fie $B$ o mărire regulată a partiției $A$. Să presupunem că există $x \in E$, $y \in E$ astfel încît*

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y) \tag{40}$$

*și fie $u \in E$, $v \in E$ pentru care au loc incluziunile (18) și (19). În aceste condiții*

$$A(u) \underset{A}{\sim} A(v).$$

TEOREMA 1. *Fie $B$ o mărire a partiției $A$. Necesar și suficient ca $B' = A'$ este ca $B$ să fie o mărire regulată a lui $A$.*

Demonstrație. Fie

$$A : E = \bigcup_i A_i,$$

$$B : E = \bigcup_j B_j,$$

cele două partiții. Avem, pentru orice $x \in E$,

$$A(x) \subset B(x). \tag{41}$$

*Condiția este necesară.* Să presupunem că $A' = B'$ și să punem $P = A'$. Fie

$$P : E = \bigcup_k C_k, \qquad A_i \subset B_j \supset A_l. \tag{42}$$

Deoarece $P = B'$, rezultă că $P$ este o mărire a lui $B$, deci există un $C_k$ astfel încît

$$B_j \subset C_k,$$

deci cu atît mai mult

$$A_i \subset C_k \supset A_l.$$

Ținînd seamă că $P = A'$, rezultă că

$$A_i \underset{A}{\sim} A_l \tag{43}$$

deci doi termeni din $A$ conținuți în același $B_j$ sînt mulțimi $A$- echivalente și $B$ este o mărire regulată a lui $A$.

*Condiția este suficientă.* Să presupunem că $B$ este o mărire regulată a lui $A$, deci din (42) rezultă (43). Trebuie să arătăm că $A' = B'$. Ținînd seama de (41), egalitatea $A' = B'$ este echivalentă cu faptul că, pentru orice $x \in E$, are loc egalitatea

$$X(x) = Y(x) \tag{44}$$

unde

$$X(x) = \bigcup_{A(v) \underset{A}{\sim} A(x)} A(y),$$

$$Y(x) = \bigcup_{B(z) \underset{B}{\sim} B(x)} B(z).$$

Să demonstrăm egalitatea (44). Fie $u \in X(x)$. Există $y \in E$ pentru care $u \in A(y)$ și $A(y)$ este $A$-echivalentă cu $A(x)$. Sînt îndeplinite toate ipotezele din corolarul 1, deci $B(y)$ este $B$-echivalentă cu $B(x)$. Deci $B(y) \subset Y(x)$. Pe de altă parte, din (41) rezultă, pentru $x = y$, că $u \in B(y)$, deci $u \in Y(x)$ și

$$X(x) \subset Y(x). \tag{45}$$

Fie acum $v \in Y(x)$. Există $z \in E$ pentru care $v \in B(z)$ și $B(z)$ este $B$-echivalentă cu $B(x)$. Avem $B(v) = B(z)$, deci, ținînd seama de (41) pentru $x = v$, avem $A(v) \subset B(z)$. Ținînd seama din nou de relația (41), constatăm că sînt îndeplinite toate ipotezele din lema 5 (cu $z$ în rolul lui $y$ și $x$ în rolul lui $u$), deci $A(x)$ este $A$-echivalentă cu $A(v)$. Rezultă că $A(v) \subset X(x)$ și $v \in X(x)$. Așadar

$$Y(x) \subset X(x). \tag{46}$$

Din (45) și (46) rezultă egalitatea (44) și suficiența condiției este demonstrată.

COROLAR 2. *Pentru orice partiție $P$ avem $P' = P''$.*

Demonstrație. Prin însăși definiția partițiilor derivate, $P'$ este o mărire regulată a lui $P$. Aplicînd teorema 1 (suficiența condiției) rezultă că $P' = (P')' = P''$.

*Observație.* Corolarul 2 a fost stabilit, pentru prima dată, de către O. S. Kulaghina (teorema 1 din [3]).

LEMA 6. *Dacă $E(V, \theta)$ este o limbă adecvată, atunci partiția $T$ este o mărire a partiției $R$.*

Demonstrație. Din faptul că $E(V, \theta)$ este adecvată rezultă că $S(x) \subset T(x)$ iar din faptul că $V' = T$ rezultă că $V(x) \subset T(x)$, oricare ar fi $x \in E$. Să punem $R_1(x) = S(x) \cup V(x)$. Avem deci $R_1(x) \subset T(x)$. Să punem

$$S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x), \qquad V(M) = \bigcup_{x \in M} V(x),$$

$$R(M) = S(M) \cup V(M)$$

și să definim prin inducție mulțimile

$$R_2(x) = R(R_1(x)), \ldots, R_{n+1}(x) = R(R_n(x)), \ldots$$

Însă este ușor de văzut, pe baza incluziunii $R_1(x) \subset T(x)$ stabilite mai sus, că dacă $M \subset T(x)$ atunci $R(M) \subset T(x)$. De aici rezultă că

$R_n(x) \subset T(x)$ pentru orice $x \in E$. Dar se verifică imediat că (a se vedea şi [5], p. 503)

$$R(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(x),$$

deci

$$R(x) \subset T(x)$$

şi lema 6 este stabilită.

LEMA 7. *Dacă $E(V, \theta)$ este o limbă adecvată, atunci partiţia $T$ este o mărire regulată a partiţiei $R$.*

Demonstraţie. Fie $x \in E$, $y \in E$, $u \in E$ astfel încît

$$R(x) \subset T(u), \tag{47}$$

$$R(y) \subset T(u). \tag{48}$$

Trebuie să arătăm că

$$R(x) \underset{R}{\sim} R(y). \tag{49}$$

Fie

$$R(z_1) \ldots R(z_{i-1})\ R(x)\ R(z_{i+1}) \ldots R(z_n) \tag{50}$$

o $R$-structură marcată. Există deci o frază marcată

$$w_1 \ldots w_{i-1}\ w_i\ w_{i+1} \ldots w_n \tag{51}$$

care are ca $R$-structură pe (50); aşadar

$$R(w_j) = R(z_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i), \tag{52}$$

$$R(w_i) = R(x). \tag{53}$$

Pe de altă parte $V(w_j) \subset R(w_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant n$, deci $V$-structura

$$V(w_1) \ldots V(w_{i-1})\ V(w_i)\ V(w_{i+1}) \ldots V(w_n) \tag{54}$$

este marcată, ca urmare a faptului că fraza (51) este marcată.

Din (52) şi (53) rezultă

$$V(w_j) \subset R(z_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i), \tag{55}$$

$$V(w_i) \subset R(x). \tag{56}$$

Din (55), (56), (47) şi (48) deducem, în baza lemei 6, următoarele incluziuni:

$$V(w_j) \subset T(z_j) \supset V(z_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i), \tag{57}$$

$$V(w_i) \subset T(u) \supset V(y). \tag{58}$$

Din (57) și (58) rezultă, în baza faptului că $V' = T$, următoarele relații:

$$V(w_j) \underset{V}{\sim} V(z_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i), \tag{59}$$

$$V(w_i) \underset{V}{\sim} V(y). \tag{60}$$

Din (59), (60) și din faptul că $V$-structura (54) este marcată, rezultă că $V$-structura

$$V(z_1) \ldots V(z_{i-1})\ V(y)\ V(z_{i+1}) \ldots V(z_n) \tag{61}$$

este marcată. Ținînd seama că $V(a) \subset R(a)$ pentru orice $a \in E$ și folosind lema 1 și faptul că $V$-structura (61) este marcată, rezultă că $R$-structura

$$R(z_1) \ldots R(z_{i-1})\ R(y)\ R(z_{i+1}) \ldots R(z_n) \tag{62}$$

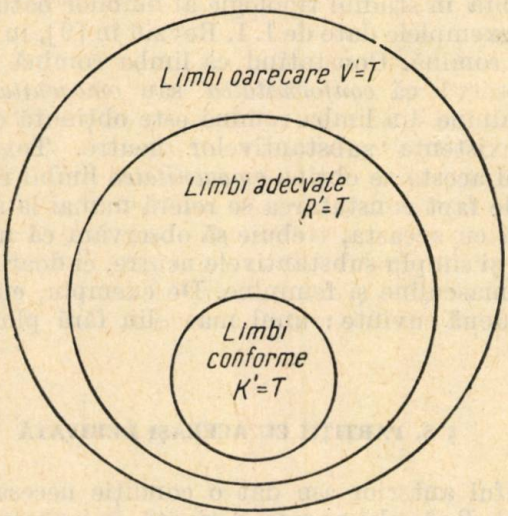
este marcată. Însă $R$-structura (62) se obține din $R$-structura (50) înlocuind pe $R(x)$ cu $R(y)$, deci o astfel de înlocuire păstrează marcarea și avem

$$R(x) \underset{R}{\rightarrow} R(y).$$

Deoarece ipotezele (47) și (48) sînt simetrice în $x$ și $y$, rezultă că are loc relația (49) și lema 7 este complet demonstrată.

COROLARUL 3. *Dacă $E(V, \theta)$ este o limbă adecvată, atunci $R' = T$.*

Demonstrație. În baza lemei 6, $T$ este o mărire regulată a lui $R$. În baza teoremei 1 (suficiența condiției) avem $R' = T''$. Însă, deoarece prin definiție $T = V'$, rezultă, în baza corolarului 2, că $T' = V'' = V' = T$, deci $R' = T$.




*Observație.* Corolarul 3 coincide cu teorema β a lui V. A. Uspenski, teoremă dată în [11] fără demonstrație (a se vedea teorema β din § 4).

COROLARUL 4. *Dacă* $E(V, \theta)$ *este o limbă conformă, atunci* $T$ *este derivata partiției în clase* : $K' = T$.

Demonstrație. Conform propoziției 6 și ținînd seamă de faptul că $E(V, \theta)$ este o limbă conformă, rezultă că secțiunile coincid cu clasele, deci că $R = K$. Conform teoremei $\gamma$, $E(V, \theta)$ este o limbă adecvată. Aplicînd acum corolarul 3 de mai sus, rezultă $K' = T$.

*Observație.* Corolarul 4 coincide cu propoziția 8, stabilită pe altă cale în § 4. În același timp, corolarul 4 generalizează teorema 3 din [3] (a se vedea teorema $\gamma$ din § 4).

Cu ajutorul unui desen, putem sintetiza diferitele moduri de obținere a partiției în tipuri, în funcție de natura limbii cu care se lucrează (a se vedea figura).

## § 7. CÎTEVA PROBLEME ȘI UNELE OBSERVAȚII LINGVISTICE

O problemă interesantă este aceea de a se studia în ce măsură relațiile $K' = T$, $R' = T$ sînt caracteristice pentru limbile conforme, respectiv pentru limbile adecvate. În legătură cu aceasta, este interesant să se studieze situația limbilor care nu sînt adecvate precum și situația limbilor care sînt adecvate fără a fi conforme. Pe de altă parte, după cum a observat I. I. Revzin [9], se poate întîmpla ca unii termeni ai partiției $T$ să coincidă cu unii termeni ai partiției $R$ și chiar ca $R = T$. În limba rusă, substantivele formează nu numai un tip, ci și o secțiune, deoarece toate substantivele plurale, de același caz, formează o singură familie. În schimb, în limba franceză, substantivele de genuri diferite aparțin aceluiași tip, dar unor secțiuni diferite.

În ceea ce privește noțiunea de *limbă conformă*, ea s-a dovedit deosebit de interesantă în studiul tipologic al limbilor naturale. În acest sens, sînt interesante exemplele date de I. I. Revzin în [9], în legătură cu limbile cehă, polonă și română. Constatînd că limba română nu este conformă, I. I. Revzin observă că *conformitatea* sau *omogenitatea* substantivelor masculine și feminine din limba română este obținută de îndată ce se face abstracție de existența substantivelor neutre. Textual, I. I. Revzin afirmă că în felul acesta se obține *omogenitatea* limbii române, însă rezultă din context că de fapt constatarea se referă numai la substantive.

În legătură cu aceasta, trebuie să observăm că nici nu este necesar să excludem pur și simplu substantivele neutre, ci doar să le descompunem în *componentele* masculine și feminine. De exemplu, cuvîntul *scaun* se va descompune în două cuvinte : unul masculin fără plural și unul feminin fără singular.

## § 8. PARTIȚII CU ACEEAȘI DERIVATĂ

În paragraful anterior am dat o condiție necesară și suficientă ca două partiții $A$ și $B$ să aibă aceeași derivată, în ipoteza că $B$ este o mărire a partiției $A$. În paragraful de față vom aborda problema coincidenței derivatelor în cazul a două partiții arbitrare.

TEOREMA 2. *Necesar și suficient ca două partiții $A$ și $B$ ale lui $E$ să aibă aceeași derivată este să existe o partiție $T$ care-i o mărire regulată atît a lui $A$ cît și a lui $B$.*

Demonstrație. *Condiția este necesară.* Fie $A' = B'$. Să punem $T = A'$. $T$, ca derivată atît a lui $A$ cît și a lui $B$, este o mărire regulată atît a lui $A$ cît și a lui $B$.

*Condiția este suficientă.* Fie $T$ o mărire regulată a partițiilor $A$ și $B$. Aplicînd teorema 1 (suficiența condiției) partițiilor $A$ și $T$ obținem $A' = T'$; aplicînd teorema 1 (suficiența condiției) partițiilor $B$ și $T$ obținem $B' = T'$. Deci $A' = B'$.

TEOREMA 3. *Fie* $A : E = \bigcup_i A_i$ *și* $B : E = \bigcup_j B_j$ *două partiții arbitrare ale lui $E$. Necesar și suficient ca*

$$A' = B' \tag{1}$$

*este ca următoarea condiție să fie îndeplinită:*
*dacă*

$$A_i \cap B_j \neq 0 \tag{2}$$

*și*

$$A_k \cap B_l \neq 0 \tag{3}$$

*atunci din*

$$A_i \underset{A}{\sim} A_k \tag{4}$$

*rezultă*

$$B_j \underset{B}{\sim} B_l \tag{5}$$

*și din (5) rezultă (4).*

Demonstrație. *Condiția este necesară.* Fie (1) îndeplinită. Să punem

$$T = A' = B'. \tag{6}$$

$T$ este deci o mărire regulată a lui $A$. Presupunînd că relația (4) este satisfăcută, există o mulțime $G$, termen al partiției $T$, pentru care

$$A_i \subset G \supset A_k. \tag{7}$$

Din (2) rezultă existența unei mulțimi $H$, termen al partiției $T$, pentru care

$$B_j \subset H \supset A_i. \tag{8}$$

Din (7) și (8) rezultă $H = G$, deci

$$B_j \subset G. \tag{9}$$

Din (3) rezultă existența unei mulțimi $L$, termen al partiției $T$, pentru care

$$A_k \subset L \supset B_l. \tag{10}$$

Din (7) și (10) rezultă $L = G$, deci

$$B_l \subset G. \tag{11}$$

Din (9) și (11) rezultă (5), deci din (4) rezultă (5).

Deoarece ipotezele sînt simetrice în raport cu partițiile $A$ și $B$, se demonstrează în mod asemănător că din (5) rezultă (4).

*Condiția este suficientă.* Să admitem că au loc relațiile (2) și (3) și să presupunem că din (4) rezultă (5) și din (5) rezultă (4).

Fie $x$ și $y$ două cuvinte din $E$ pentru care există un termen $M$ al partiției derivate $A'$ astfel încît

$$x \in M, \tag{12}$$

$$y \in M. \tag{13}$$

Ca și altă dată, notăm prin $A(x)$ și $A(y)$ termenii din $A$ cărora le aparțin $x$ și $y$ și prin $B(x)$ și $B(y)$ termenii din $B$ cărora le aparțin $x$ și $y$. Avem, evident,

$$A(x) \cap B(x) \neq 0 \tag{14}$$

$$A(y) \cap B(y) \neq 0. \tag{15}$$

Din (12) și din faptul că $x \in A(x)$ rezultă

$$A(x) \subset M. \tag{16}$$

Din (13) și din faptul că $y \in A(y)$ rezultă

$$A(y) \subset M. \tag{17}$$

Din (16) și (17) rezultă

$$A(x) \underset{A}{\sim} A(y). \tag{18}$$

Din (14), (15) și (18) rezultă, conform ipotezei,

$$B(x) \underset{B}{\sim} B(y), \tag{19}$$

deci există un termen $N$ al partiției $B'$ astfel încît

$$x \in N \text{ și } y \in N. \tag{20}$$

Am demonstrat astfel că din (12) și (13) rezultă (20), deci din faptul că două cuvinte aparțin aceluiași termen din $A'$ rezultă că ele aparțin aceluiași termen din $B'$. Deoarece ipotezele sînt simetrice în raport cu partițiile $A$ și $B$, se demonstrează pe o cale asemănătoare că din apartenența a două cuvinte la același termen din $B'$ rezultă apartenența lor la același termen din $A'$. Deci $M = N$ și $A' = B'$. Teorema este complet demonstrată.

Din teorema 3 rezultă imediat

COROLARUL 5. *Fie $B$ o mărire a partiției $A$. Necesar și suficient ca $A' = B'$ este ca următoarea condiție să fie îndeplinită :*

*dacă*

$$A_i \subset B_j, \tag{21}$$

$$A_k \subset B_l, \tag{22}$$

*atunci din*

$$A_i \underset{A}{\sim} A_k \tag{23}$$

*rezultă*

$$B_j \underset{B}{\sim} B_l \tag{24}$$

*și din (24) rezultă (23).*

Să observăm acum că din corolarul 1 și lema 5 din § 6 rezultă

COROLARUL 6. *Fie $B$ o mărire regulată a partiției $A$. Dacă au loc incluziunile (21) și (22), atunci din (23) rezultă (24) și din (24) rezultă (23).*

Corolarele 5 și 6 conduc imediat la teorema 1, obținută în paragraful precedent.

### § 9. DEPENDENȚA PARTIȚIILOR DERIVATE DE MULȚIMEA DE FRAZE MARCATE

Este evident că derivata unei partiții $P$ a mulțimii $E$ depinde nu numai de $E$ și de $P$, ci și de mulțimea $\theta$ a frazelor marcate ; cu alte cuvinte, în timp ce partiția $P$ este asociată doar lexicului $E$ al limbii $E(V, \theta)$, derivata $P'$ angajează și sintaxa limbii prin intermediul mulțimii $\theta$. Oricărui triplet $(E, P, \theta)$ format dintr-o mulțime finită $E$, o partiție $P$ a lui $E$ și o mulțime $\theta$ de fraze marcate formate cu elemente din $E$, i se asociază, în mod unic, o partiție derivată $P'$. După cum s-a văzut în paragrafele anterioare, reciproca acestei afirmații nu este adevărată ; unei partiții $Q$ nu-i corespunde totdeauna un singur triplet $(E, P, \theta)$ cu proprietatea $P' = Q$. Din teorema 1, de exemplu, rezultă că dacă $E$ și $\theta$ sînt fixate iar $S$ este partiția în familii, atunci există cel puțin două triplete $(E, P_1, \theta)$ și $(E, P_2, \theta)$ cărora li se asociază partiția derivată $S$, $P_1$ fiind partiția unitate iar $P_2$ fiind chiar partiția $S$ (presupunem că $S$ nu coincide cu partiția unitate).

Pe de altă parte, este ușor de văzut că nu pentru orice triplet $(E, Q, \theta)$ există o partiție $P$ cu proprietatea $P' = Q$, cu alte cuvinte, nu orice partiție este o partiție derivată. Este suficient pentru aceasta ca mulțimea $\theta$ să fie astfel încît să existe o familie care să conțină cel puțin două cuvinte iar $Q$ să fie partiția unitate. Pentru ca să existe, în acest caz, o partiție $P$ cu proprietatea $P' = Q$ este necesar, după însăși definiția derivatei unei partiții, ca $Q$ să fie o mărire a lui $P$ sau să coincidă cu $P$. Însă $Q$ nu poate fi o mărire a lui $P$, deoarece $Q$ este partiția unitate ; rezultă că $Q = P$, deci $Q' = Q$. Însă, prin definiție, partiția în familii este derivata partiției unitate, deci $Q$ este partiția în familii. Dar aceasta înseamnă că fiecare familie este alcătuită dintr-un singur cuvînt, în contradicție cu faptul că cel puțin o familie conține mai mult decît un singur

cuvînt. Deci, presupunerea că ar exista o partiție $P$ cu proprietatea $P' = Q$ este falsă; $Q$ nu este o partiție derivată. Am stabilit astfel

Propoziția 9. *Partiția unitate este o partiție derivată dacă și numai dacă fiecare familie este formată dintr-un singur cuvînt.*

*Observație.* Pentru utilizarea propoziției 9 este comod să se țină seama că familiile pot fi definite și fără a se recurge explicit la operația de derivare, anume în felul următor:

Fie $\varphi$ o relație binară definită în $E$ după cum urmează: pentru $x \in E$ și $y \in E$ avem $x \varphi y$ dacă în orice frază marcată care-l conține pe $x$ înlocuirea lui $x$ cu $y$ conduce la o frază marcată și în orice frază marcată care-l conține pe $y$ înlocuirea lui $y$ cu $x$ conduce de asemenea la o frază marcată. Este ușor de văzut că $\varphi$ este o relație de echivalență în $E$. Clasele de $\varphi$-echivalență sînt tocmai familiile. În acest fel, se constată că o familie este ceea ce se numește în lingvistica descriptivă o *clasă de distribuție.*

Este oare orice partiție a lui $E$ o partiție derivată, pentru cel puțin o mulțime $\theta$ de fraze marcate? Răspunsul este afirmativ și este conținut în

Propoziția 10. *Fie $P$ o partiție a lui $E$. Se poate defini mulțimea $\theta$ a frazelor marcate în așa fel încît $P$ să fie derivata partiției unitate (deci $P = S$).*

Demonstrație. Fie

$$P : E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Vom defini frazele marcate în felul următor: fraza $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ este marcată dacă $x_i \in E_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$. Utilizînd caracterizarea dată familiilor în observația de mai sus, rezultă că termenii partiției $P$ sînt tocmai familiile.

Fiind dată o limbă $E(V, \theta)$, $E$ definește *lexicul*, $V$ definește *morfologia* iar $\theta$ definește *sintaxa*. Despre două limbi care au același lexic vom spune că au același *suport*.

Din propoziția 10 rezultă

Propoziția 10′. *Fie $P$ o partiție a mulțimii $E$. Există o limbă cu suportul $E$, pentru care $P$ este o partiție derivată.*

Este interesant să se studieze următoarea

PROBLEMĂ. *Fie $P$ o partiție a lui $E$ și fie $E(V, \theta)$ o limbă cu suportul $E$. Care este condiția necesară și suficientă ca $P$ să fie o partiție derivată în raport cu $E(V, \theta)$? Presupunînd că $P$ este o partiție derivată în raport cu $E(V, \theta)$, care este condiția necesară și suficientă ca să existe o singură partiție $T$ cu proprietatea $T' = P$?*

O altă problemă este aceea a existenței partițiilor derivate, în ipoteza că sintaxa $\theta$ este definită în mod arbitrar. Pentru a rezolva această problemă, introducem următoarea noțiune: o partiție

$$P : E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

este *proprie* dacă $n \geqslant 2$; în cazul contrar $(n = 1)$ partiția $P$ se numește *improprie.* Este clar că există o singură partiție improprie a lui $E$.

P r o p o z i ț i a 11. *Fie $E$ ($V$, $\theta$) o limbă cu suportul $E$. Necesar și suficient ca nici o partiție proprie a lui $E$ să nu fie o partiție derivată în raport cu $E$ ($V$, $\theta$) este ca una din următoarele două condiții să fie îndeplinită: 1) $\theta$ este vidă; 2) orice frază formată cu elemente din $E$ aparține lui $\theta$.*

D e m o n s t r a ț i e. Să presupunem că singura partiție a lui $E$ care este o derivată în raport cu $E$ ($V$, $\theta$) este partiția improprie. Vom arăta că este îndeplinită una dintre condițiile 1 și 2. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că dacă există o frază marcată atunci toate frazele sînt marcate. Să admitem, prin reducere la absurd, existența unei fraze nemarcate $a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n$. Notînd prin $\mu$ partiția unitate, rezultă că $\mu$-structura $\{a_1\}\ \{a_2\} \ldots \{a_i\} \ldots \{a_n\}$ este nemarcată. Însă, prin ipoteză, $\mu$ este partiția improprie, deci

$$\{a_i\} \underset{\mu}{\sim} \{a_j\}$$

pentru orice valori ale lui $i$ și $j$, cu alte cuvinte în orice $\mu$-structură nemarcată care conține pe $\{a_i\}$ înlocuirea lui $\{a_i\}$ cu $\{a_j\}$ conduce la o $\mu$-structură nemarcată și aceasta oricare ar fi valorile lui $i$ și $j$. Cum am admis mai sus existența unei $\mu$-structuri nemarcate, rezultă că *orice* $\mu$-structură este nemarcată, în contradicție cu ipoteza existenței unei $\mu$-structuri marcate. Deci, presupunerea că ar exista o $\mu$-structură nemarcată ne-a dus la o contradicție; toate $\mu$-structurile sînt marcate și condiția 2 este îndeplinită.

Să presupunem acum că cel puțin una din condițiile 1 și 2 este îndeplinită; în acest caz este vizibil că derivata oricărei partiții este partiția improprie. Propoziția 11 este complet demonstrată.

Primită la redacție la 10 octombrie 1961

## О ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧАСТИ РЕЧИ

### РЕЗЮМЕ

Пусть $E$ конечное множество, $\mathfrak{F}$ множество конечных последовательностей из $E$. Рассматривается некоторая часть $\mathfrak{F}_m$ множества $\mathfrak{F}$. Элементы множества $\mathfrak{F}_m$ называются отмеченными фразами. Пусть $P$ разбиение $E$. Обозначим $P(x)$ элемент разбиения, содержащий элемент $x \in E$. Разбиение $P'$ будет укрупнением разбиения $P''$, если для любого $x \in E$ имеем $P''(x) \subset P'(x)$, и если, по крайней мере, для одного $x$ включение строго. Пусть задана фраза $x_1 x_2 \ldots x_n$; последовательность $P(x_1)\ P(x_2) \ldots P(x_n)$ называется $P$-структурой фразы. Произвольная последовательность элементов разбиения $P$ (в которой некоторые элементы могут повторяться) будет $P$-структурой. $P$-структура $P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_s}$ называется отмеченной, если существует отмеченная фраза $x_1 x_2 \ldots x_s$, такая, что $P(x_{ij}) = P_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ $P$-структуры можно умножить по правилу: произведение $P_1 \ldots P_k$ и $P'_1 \ldots P'_k$ будет $P$-структура $P_1 \ldots P_k$, $P'_1 \ldots P'_k$. $P$-структуры $P_1$ и $P_2$ называются $P$-эквивалентными, если для любой пары $P$-структур $P_3$ и $P_4$,

$P$-структуры $P_3$, $P_1$, $P_4$ и $P_3$, $P_2$, $P_4$ одновременно отмеченные или неотмеченные. Разбиение $P$ называется правильным укрупнением разбиения $Q$, если $P$ — укрупнение $Q$ и если два элемента разбиения $Q$, содержащиеся в том же подмножестве $P$, являются $Q$-эквивалентными. Разбиение $Q'$, элементы которого являются объединениями $Q$-эквивалентных подмножеств из $Q$, называется производным разбиением разбиения $Q$. Индукцией определяется $Q^{(n+1)} = (Q^{(n)})'$. Все эти понятия введены в [3].

Пусть $P$ разбиение $E$. Скажем, что $P(x)$ доминирует над $P(y)$ ($P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y)$), если в любой отмеченной $P$-структуре, содержащей $P(x)$, замена $P(x)$ на $P(y)$ дает опять отмеченную структуру. Вот часть результатов настоящей работы:

Лемма 2. Пусть $B$ укрупнение разбиения $A$ и $x \in E$, $y \in E$. Если из (4) следует (3) (см. § 6), то имеет место (5).

Лемма 4. Пусть $B$ правильное укрупнение разбиения $A$. Предположим, что существуют $x \in E$, $y \in E$ такие, что имеет место (17), и пусть $u \in E$, $v \in E$ такие, что имеют место (18) и (19). Тогда имеет место соотношение (20). (См. § 6).

Теорема 1. Пусть $B$ укрупнение разбиения $A$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $B' = A'$ является то, чтобы $B$ было правильным укрупнением $A$.

Следствиями этой теоремы являются теорема 1 из [3], теорема 2 из [11] и теорема 3 из [3].

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы для двух разбиений $A$ и $B$ имело место соотношение $A' = B'$, является существование разбиения $P$, являющегося правильным укрупнением как $A$, так и $B$.

Теорема 3. Пусть $A : E = \bigcup A_i$ и $B : E = \bigcup B_j$ — два разбиения множества $E$. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $A' = B'$, состоит в том, что если (2) и (3) выполняются, то (4) эквивалентно (5) (см. § 8).

## SUR UN MODÈLE LOGIQUE DE LA PARTIE DU DISCOURS

RÉSUMÉ

Soient $E$ un ensemble fini et $\mathfrak{F}$ l'ensemble de toutes les suites finies d'éléments de $E$. On considère une certaine partie $\mathfrak{F}_m$ de $\mathfrak{F}$. Les éléments de $\mathfrak{F}_m$ sont dénommés des *phrases marquées*. Soit $P$ une partition de $E$. Le terme de la partition qui contient l'élément $x \in E$ est noté $P(x)$. La partition $P'$ est une *augmentation* de la partition $P''$ si pour tout $x \in E$ nous avons $P''(x) \subset P'(x)$, l'inclusion étant stricte pour un $x$ au moins. Etant donnée une phrase $x_1 x_2, \ldots, x_n$, la *P-structure* de cette phrase est la suite $P(x_1)$ $P(x_2) \ldots P(x_n)$. Une suite finie quelconque de termes de la partition $P$

(suite dans laquelle il y a des termes pouvant se répéter) constitue une $P$-structure. La $P$-structure $P_{i_1} P_{i_2} \ldots . P_{i_s}$ este dénommée *marquée* s'il existe une phrase marquée $x_1 x_2, \ldots, x_s$ telle que $P(x_{i_j}) = P_{i_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Les $P$-structures peuvent être composées par juxtaposition. Les $P$-structures $P_1$ et $P_2$ sont *$P$-équivalentes* si pour toute paire de $P$-structures, $P_3$ et $P_4$, les $P$-structures $P_3 P_1 P_4$ et $P_3 P_2 P_4$ sont ou toutes les deux marquées, ou non marquées. La partition $P$ est une *augmentation régulière* de la partition $Q$ si $P$ est une augmentation de $Q$ et si deux termes de $Q$ contenus dans le même terme de $P$ sont $Q$-équivalents. La partition $Q'$, dont les termes sont les réunions de termes $Q$-équivalents de $Q$, est dénommée partition dérivée de $Q$. Par induction, on définit $Q^{(n+1)} = (Q^{(n)})'$.

Toutes les définitions ci-dessus sont prises de [3].

Soit $P$ une partition de $E$. Nous dirons que $P(x)$ *domine* $P(y)$ $(P(x) \underset{P}{\rightarrow} P(y))$ si dans toute $P$-structure marquée, contenant $P(x)$, le remplacement de $P(x)$ par $P(y)$ conduit à une $P$-structure marquée. Voici une partie des résultats contenus dans le présent travail :

LEMME 2. *Soit $B$ une augmentation de la partition $A$ et soient $x \in E$, $y \in E$. Si* (4) *implique* (3) (cf. le paragr. 6), *alors on a* (5).

LEMME 4. *Soit $B$ une augmentation régulière de la partition $A$. Supposons qu'il existe $x \in E$ et $y \in E$ tels qu'on ait* (17) *et soient $u \in E$, $v \in E$ tels qu'on ait* (18) *et* (19). *Dans ces conditions on a la relation* (20). (Cf. le paragr. 6).

THÉORÈME 1. *Soit $B$ une augmentation de la partition $A$. Pour que $B' = A'$ il faut et il suffit que $B$ soit une augmentation régulière de $A$.*

Comme corollaires, on obtient : le théorème 1 de [3], le théorème 2 de [11] et le théorème 3 de [3].

THÉORÈME 2. *Pour que deux partitions $A$ et $B$ donnent $A' = B'$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une partition $P$ qui soit une augmentation régulière de $A$ comme de $B$.*

THÉORÈME 3. *Soient $A : E = \bigcup A_i$ et $B : E = \bigcup B_j$ deux partitions de $E$. Pour que $A' = B'$ il faut et il suffit que* (4) *soit équivalente à* (5) *dès que les relations* (2) *et* (3) *sont vérifiées* (cf. le paragr. 8).

## BIBLIOGRAFIE


1. N. CHOMSKY, *Sintactic Structures*. Mouton & Co., s'Gravenhage, 1957, 16—17.
2. Р. Л. ДОБРУШИН, *Элементарная грамматическая категория*. Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода, 5, 19—21 (1957).
3. О. С. КУЛАГИНА, *Об одном способе определения грамматических понятий на базе теорий множеств*. Сб. „Проблемы Кибернетики" (вып. 1), Москва, 1958, 203—214.
4. J. KURYŁOWICZ, *Esquisses linguistiques*. Wrocław-Krakow, 1960, 41—50.
5. S. MARCUS, *Structures linguistiques et structures topologiques*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **VI**, *3*, 501—506 (1961).
6. — *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **VII**, *1*, (1962).
7. И. И. РЕВЗИН, *По поводу определения фонемы, данного проф. П. С. Кузнецовым*. Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода, *5* (1957).

8. И. И. Ревзин, *О логической форме лингвистических определений (на примере определения морфемы)*. сб. „Применение логики в науке и технике", Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1960, 140 — 148.
9. — *О некоторых понятиях так называемой теоретико-множественной концепции языка.* Вопросы языкознания, *6*, 88—94 (1960).
10. J. Ruvinschi, *Consignes provisoires pour la mise en diagrammes des textes scientifiques.* Rapport GRISA, *5*, Août, 1—27 (1960).
11. В. А. Успенский, *К определению части речи в теоретико-множественной системе языка.* Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода, *5*, 22—26 (1957).
12. С. К. Шаумян, *Генерализация и постулирование конструктов в изучении структуры языка.* Тезисы Совещания по математической лингвистике, Ленинград, 1959, 38—43.
13. A. A. Zinoviev, I. I. Revzin, *Modelul logic ca mijloc al investigaţiei ştiinţifice.* Probleme de filozofie, *1* (1960).

# MIŞCAREA UNUI FLUID VÎSCOS ÎN TUBURI ELASTICE, CU REFERIRE LA HEMODINAMICĂ. I

DE

L. DRAGOŞ

Hemodinamica studiază modul în care proprietăţile fizice ale sîngelui şi ale tuburilor în care acesta circulă (artere şi vene) afectează mişcarea sîngelui şi presiunea.

Studiul acesta, susceptibil de a fi transpus în expresii matematice, a fost început de Poiseuille dar pînă în momentul de faţă nu a căpătat o rezolvare satisfăcătoare. Rezultatele lui Poiseuille obţinute în ipoteze extrem de simplificatoare şi nereale (tubul în care are loc mişcarea este rigid, mişcarea fluidului se face numai longitudinal) sînt folosite şi azi în fiziologie ([1] p. 580). Experienţe recente [4] au arătat că elasticitatea arterei are un rol determinant în mişcarea fluidului; de asemenea, mişcarea fluidului este departe de a fi unidimensională.

Problema aceasta a fost în atenţia oamenilor de ştiinţă din ultima vreme, impulsul fiind dat, se pare, de rezultatele experimentale [7], [8], [9] care permit concluzii asupra gradientului de presiune. Amintim lucrările teoretice [4], [5], [6]. În special în [4] se dă o soluţie aproximativă, valabilă pentru lungime mare de undă.

În lucrarea de faţă se dă soluţia exactă a ecuaţiilor Navier-Stokes neglijîndu-se termenii neliniari, soluţie care pe pereţii interiori ai tubului se racordează cu mişcarea tubului elastic. Tubul este presupus suficient de lung astfel încît se pot neglija condiţiile limită la un capăt iar la intrare se presupune o distribuţie parabolică a vitezei.

**1.** *Formularea problemei în tubul elastic.* Lucrăm în coordonate cilindrice $r$, $\theta$, $z$. Axa $z$ fiind orientată în lungul axei tubului, $z = 0$ coincizînd cu capătul intrare a arterei, iar în partea cealaltă tubul fiind considerat suficient de lung astfel încît condiţiile la limită să nu influenţeze mişcarea.

Considerațiile noastre sînt valabile în arteră, unde mișcarea se poate considera laminară [1]. În capilare elasticitatea vasului scade, viteza fluidului crește iar mișcarea devine turbulentă.

Presupunem de asemenea grosimea vasului finită, ceea ce va face ca în soluția problemei să intervină și masa tubului, condiție absolut necesară. Tubul se presupune omogen și izotrop, iar mișcarea axial simetrică. În aceste condiții, notînd $u_r$, $u_z$ componentele vectorului deplasare, $\rho$ densitatea tubului, $\lambda$ și $\mu$ constantele elastice ale tubului, ecuațiile de mișcare [10]

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r},$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{t^2} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r},$$

se scriu :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Pentru sistemul (1) căutăm o soluție periodică în $t$ și $z$ cu variabile separate, de forma

$$\begin{aligned} u_r &= u(r)\ e^{i\alpha(z - c't)}, \\ u_z &= v(r)\ e^{i\alpha(z - c''t)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$\alpha$, $c'$, $c''$ fiind constante nedeterminate. Soluția de sus reprezintă unde călătoare avînd viteza $c'$, respectiv $c''$, iar amplitudinea funcțiune de punct. Pentru simplitatea calculelor ce urmează ne limităm la o soluție de această formă, sugerată de modul de propagare în artere. În [12] vom da soluția exactă a sistemului (1).

Se deduce că soluția sistemului (1) este

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{A}{r} e^{i\alpha(z - c't)}, \\ u_z &= B\ e^{i\alpha(z - c''t)}, \end{aligned} \tag{3}$$

$A$ și $B$ fiind constantele nedeterminate, iar $c'$ și $c''$ rezultă a fi :

$$c' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c'' = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \tag{4}$$

adică tocmai viteza de propagare a undelor elastice transversale și longitudinale.

Aici se impune următoarea precizare : dat fiind condițiile specifice de mișcare ale fluidului și ale tubului va trebui să găsim o mișcare de regim, condițiile inițiale fiind greu de precizat. În consecință, soluția (3) se justifică. În plus ea va permite să putem scrie condițiile la limită pe mediul deformat, ceea ce corespunde întru totul caracterului problemei.

Condițiile la limită pe suprafața interioară a tubului se vor scrie impunînd racordarea celor două mișcări : a fluidului și a tubului elastic. Notînd $v_r$, $v_z$ componentele vitezei fluidului, vom avea următoarele condiții la limită (condiții de racordare) :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad \text{pentru } r = R + u_r(R, z, t), \\ v_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad \text{pentru } r = R + u_r(R, z, t), \\ -p &+ 2\nu\rho' \frac{\partial v_r}{\partial r} = \sigma_{rr}, \; r = R + u_r(R, z, t), \end{aligned} \tag{5}$$

unde

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = \left(\lambda B i \alpha e^{-i\alpha c'' t} - \frac{2\mu A}{r^2} e^{-i\alpha c' t}\right) e^{i\alpha z} \tag{5'}$$

iar $R$ este raza tubului nedeformat.

**2.** *Formularea problemei de hidrodinamică și soluția ei.* Notăm $p$ presiunea în fluid, $\rho'$ densitatea fluidului fiind presupusă constantă, $P = \frac{p}{\rho'}$, $\nu$ coeficientul de viscozitate cinematică. Presupunînd mișcarea axial simetrică, ecuațiile Navier-Stokes, în care am neglijat termenii neliniari, se scriu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= g_1 - \frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= g_2 - \frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$g_1$ și $g_2$ fiind componentele greutății.

Avem de asemenea ecuația de continuitate

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_z)}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

*Condiții la limită* : pe suprafața interioară a tubului mișcarea fluidului se racordează cu mișcarea tubului elastic deci avem condițiile (5). La intrare ($z = 0$) putem impune următoarele condiții sugerate de experiență :

$$\begin{aligned} &v_r(r, 0, t) = 0, \\ &v_z(r, 0, t) = a(1 - \cos \beta t)\ (R'^2 - r^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Am luat pentru $v_z$ o distribuție parabolică periodică în timp, momentele de extincție și de aflux maxim succedîndu-se ritmic. Am notat $R'$ raza tubului deformat, adică $R' = R + u_r(R, 0, t)$, iar $a$ o constantă.

Presupunem de asemenea

$$\lim_{z \to \infty} (v_r, v_z) = \text{finit}. \tag{9}$$

*Condiții inițiale* : deși nu cunoaștem datele inițiale în problema noastră totuși metoda de integrare permite să considerăm și aceste condiții sub o formă generală, încă neprecizată. Luăm

$$\begin{aligned} &v_r(r, z, 0_+) = f_1(r, z), \\ &v_z(r, z, 0_+) = f_2(r, z), \\ &\lim_{t \to \infty} (v_r, v_z) = \text{finit}. \end{aligned} \tag{10}$$

Determinarea practică a funcțiilor $f_1(r, z)$ și $f_2(r, z)$ rămîne să fie precizată.

În particular, se poate lua $f_1 = f_2 = 0$ dacă mișcarea pornește din repaus.

*Soluția problemei de hidrodinamică.* Admitem că în intervalul $0 \leqslant t < \infty$ $v_r$, $v_z$, $P$ sînt astfel încît

$$\int_0^\infty e^{-ct} \mid v_r(r, z, t) \mid dt, \quad \int_0^\infty e^{-ct} \mid v_z \mid dt, \quad \int_0^\infty e^{-ct} \mid P \mid dt$$

sînt finite pentru o valoare pozitivă $c$.

De asemenea, presupunem că $v_r$, $v_z$, $P$ împreună cu derivatele lor temporale de ordin întîi sînt continue pe toată axa $t$ în afară de $t = 0$ unde pot avea discontinuități de prima speță. Se presupune de asemenea că pentru $t$ negativ, $v_r$, $v_z$, $P$ sînt nule.

În aceste condiții se introduce transformata Laplace :

$$\begin{aligned} &u(r, z, p) = \int_0^\infty v_r(r, z, t)\, e^{-pt}\, dt, \quad w(r, z, p) = \int_0^\infty v_z\, e^{-pt}\, dt, \\ &\Pi(r, z, p) = \int_0^\infty P\, e^{-pt}\, dt, \end{aligned} \tag{11}$$

unde $p = \gamma + i\eta$ cu condiția $\gamma > c$. Se poate considera și cazul $\eta = 0$.

Se ştie [11] că în aceste condiţii avem teorema de inversiune :

$$v_r(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} u(r, z, p)\, e^{pt}\, dp,\quad v_z(r, z, t) = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} w(r, z, p)\, e^{pt}\, dp,\quad P(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \pi(r, z, p)\, e^{pt}\, dp.$$

Aplicăm deci sistemului (6), (7) o transformare Laplace. Sistemul transformat, ţinînd seama de notaţiile (11) şi condiţiile (10), devine:

$$-\frac{g_1}{p} - f_1(r, z) + pu = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2}\right), \tag{13.I}$$

$$-\frac{g_2}{p} - f_2(r, z) + pw = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{13.II}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{13.III}$$

Condiţiile la limită (5) devin :

$$u = h_1(r, z, p), \qquad r = R + \frac{p h_1(R, z, p)}{i\alpha c'} = R^*(z, p), \tag{14.I}$$

$$h_1(r, z, p) = -\frac{i\alpha c'}{i\alpha c' + p}\frac{A}{r} e^{i\alpha z},$$

$$w = h_2(r, z, p), \qquad r = R^*,\ h_2(r, z, p) = -\frac{i\alpha c''}{i\alpha c'' + p} B\, e^{i\alpha z}, \tag{14.II}$$

$$-\Pi + \nu\frac{\partial u}{\partial r} = T_1(r, z, p), \qquad r = R^*, \tag{14.III}$$

$T_1$ avînd expresia cunoscută dacă se foloseşte (5′), (3) şi (4).

Condiţiile la intrare (8) se scriu :

$$u(r, 0, p) = 0, \tag{15.I}$$

$$w(r, 0, p) = h(r, p), \tag{15.II}$$

$$h(r, p) = a\int_0^\infty (1 - \cos \beta t)\left[\left(R + \frac{A}{R} e^{-i\alpha c' t}\right)^2 - r^2\right] e^{-pt}\, dt.$$

Mai departe vom construi soluţia sistemului (13) făcînd din nou o transformare integrală. Evident se impune ca forma soluţiei sistemului (13) să fie susceptibilă de determinări numerice.

Vom presupune că necunoscutele $u$, $w$, $\Pi$ satisfac, relativ la variabila $r$ în intervalul $(0, R^*)$, condițiile lui Dirichlet. Vom nota $s$ o rădăcină a ecuației transcendente

$$J_0(Rs) = 0, \tag{16}$$

$J_0(x)$ fiind funcția Bessel de speța întîi, ordinul zero. Notăm transformatele integrale relative la $r$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s, z, p) &= \int_0^R r\, u(r, z, p)\, J_1(rs)\, dr, \\ \bar{w}(s, z, p) &= \int_0^R rw(r, z, p)\, J_0(rs)\, dr, \\ \overline{\Pi}(s, z, p) &= \int_0^R r\, \Pi(r, z, p)\, J_0(rs)\, dr. \end{aligned} \tag{17}$$

Atunci [3] în orice punct de continuitate din intervalul $(0, R)$ avem:

$$\begin{aligned} w(r, z, p) &= \frac{2}{R^2} \sum_i \bar{w}(s_i, z, p) \frac{J_0(rs_i)}{[J_1(Rs_i)]^2}, \\ \Pi(r, z, p) &= \frac{2}{R^2} \sum_i \overline{\Pi}(s_i, z, p) \frac{J_0(rs_i)}{[J_1(Rs_i)]^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

sumele luîndu-se pe toate rădăcinile pozitive ale ecuației (16). Seriile sînt uniform convergente [13].

În lucrarea de față vom scrie condițiile la limită pe mediul nedeformat, deoarece satisfacerea acestor condiții pe mediul deformat presupune un studiu prealabil al rădăcinilor ecuației $J_0(R^* s)$ care vor depinde de $z$. Metoda care o dezvoltăm permite, pornind de la (16), (17) și (18) în care $R$ este înlocuit cu $R^*$, să satisfacem condițiile și pe mediul deformat însă, în sistemul de ecuații diferențiale la care se ajunge intervine $s(z)$, $s'(z)$, $s''(z)$ expresii ce nu se cunosc. Într-o altă lucrare vom arăta cum se poate evita această dificultate.

Sistemul (13) se transpune asupra necunoscutelor $\tilde{u}$, $\bar{w}$, $\overline{\Pi}$ dacă se înmulțește prima ecuație cu $rJ_1(rs)\,dr$, a doua și a treia cu $rJ_0(rs)\,dr$ și se integrează pe $(0, R)$. În prima ecuație se va ține cont de următorul calcul:

$$-\int_0^R r \frac{\partial \Pi}{\partial r} J_1(rs)\, dr = -r\Pi J_1(rs)\Big|_0^R + s\overline{\Pi};$$

am folosit relația de recurență

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

pentru $\nu = 1$. Apoi:

$$\int_0^R r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_1(rs)\,dr = r\frac{\partial u}{\partial r}J_1(rs)\Big|_0^R - s\int_0^R r\frac{\partial u}{\partial r}J_1'(rs)\,dr =$$

$$= RJ_1(Rs)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} - sRJ_1'(Rs)\,u(R,z,t) + s\int_0^R u\,[rsJ_1''(rs)+J_1'(rs)]\,dr.$$

Mai departe vom ține seama că $J_1(rs)$ satisface ecuația diferențială Bessel:

$$J_1''(rs)+\frac{1}{rs}J_1'(rs)+\left(1-\frac{1}{r^2s^2}\right)J_1(rs)=0.$$

Astfel, avem în definitiv

$$\int_0^R r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)J_1(rs)\,dr = RJ_1(Rs)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} -$$

$$-sRJ_1'(Rs)\,u(R,z,p) - s^2\tilde{u}.$$

Cu aceste calcule ecuația (13.I) devine

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dz^2}-\omega^2\tilde{u} = -\frac{s}{\nu}\overline{\Pi}+f(z). \tag{19}$$

Am notat

$$\omega^2 = s^2+\frac{p}{\nu},$$

$$f(z) = sRJ_1'(Rs)\,u(R,z,p) - RJ_1(Rs)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} + \tag{20}$$

$$+\frac{1}{\nu}RJ_1(Rs)\,\Pi(R,z,p)+\frac{1}{\nu}\int_0^R r\left[-\frac{g_1}{p}-f_1(r,z)\right]J_1(rs)\,dr.$$

Dacă ținem seama de condițiile la limită (14.I), (14.III) și condițiile inițiale (10), rezultă că $f(z)$ este cunoscut.

Calcule analoge permit să transformăm ecuațiile (13.II) și (13.III). Avem, ținînd seama de ecuația (16),

$$\int_0^R r\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)J_0(rs)\,dr = Rs\,w(R,z,p)\,J_1(Rs) - s^2\overline{w}.$$

Astfel, ecuația (13.II) devine

$$\frac{d^2\overline{w}}{dz^2}-\omega^2\overline{w} = \frac{1}{\nu}\frac{d\overline{\Pi}}{dz}+g(z); \tag{21}$$

$$g(z) = -Rsw(R,z,p)\;J_1(Rs)+\frac{1}{\nu}\int_0^R r\left[-\frac{g_2}{p}-f_2(r,z)\right]J_0(rs)\,dr,$$

$g(z)$ fiind de asemenea o funcție cunoscută.

Ecuaţia de continuitate (13.III) devine

$$s\tilde{u} + \frac{d\overline{w}}{dz} = 0. \tag{22}$$

Sistemul (19), (21), (22) ne dă, eliminînd $\tilde{u}$ şi $\overline{\Pi}$, următoarea ecuaţie :

$$\frac{d^4\overline{w}}{dz^4} - (\omega^2 + s^2)\frac{d^2\overline{w}}{dz^2} + \omega^2 s^2 \overline{w} = -s^2 g(z) - sf'(z). \tag{23}$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$\overline{w}(s, z, p) = C_1(s, p)\, e^{\omega z} + C_2(s, p)\, e^{-\omega z} + C_3(s, p)\, e^{sz} + C_4(s, p) e^{-sz} + \\ + \frac{s\nu}{p}\left(\frac{\operatorname{sh} sz}{s} - \frac{\operatorname{sh} \omega z}{\omega}\right)\int [sg(z) + f'(z)]\, dz. \tag{24}$$

Din condiţia (9) rezultă, în virtutea transformărilor (11) şi (17), că $\lim_{z\to\infty} \overline{w} =$ finit, deci $C_1 = C_3 = 0$. Din ecuaţia (22) avem

$$\tilde{u} = \frac{\omega}{s} C_2(s, p)\, e^{-\omega z} + C_4(s, p)\, e^{-sz} - \frac{\nu}{p}\left(\frac{\operatorname{sh} sz}{s} - \frac{\operatorname{sh} \omega z}{\omega}\right)\int [sg(z) + f'(z)]\, dz.$$

Condiţiile la limită (15.I), (15.II) ne determină funcţiile $C_2(s, p)$, $C_4(s, p)$. Avem :

$$C_2 = \frac{sH(s,p)}{s - \omega}, \quad C_4 = -\frac{\omega H(s, p)}{s - \omega}. \tag{25}$$

Am notat

$$H(s, p) = \int_0^R rh(s, p)\, J_0(rs)\, dr = \frac{4\, Ra\, \beta^2}{ps^3(p^2 + \beta^2)} J_1(Rs), \tag{26}$$

presupunînd, în acest calcul, raza la intrare constantă.

Se obţine soluţia definitivă folosind (18) şi (12) :

$$v_z(r, z, t) = \frac{1}{\pi i R^2} \sum_j \frac{J_0(rs_j)}{[J_1(Rs_j)]^2} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Big[ (s_j e^{-\omega z} - \\ - \omega e^{-s_j z}) \frac{H(s_j, p)}{s_j - \omega} + T(s_j, z, p) \Big] e^{pz}\, dp,$$

$$P(r, z, t) = \frac{1}{\pi i R^2} \sum_j \frac{J_0(rs_j)}{[J_1(Rs_j)]^2} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Big[ -\frac{p\omega e^{-s_j z}}{s_j(s_j - \omega)} H(s_j, p) - \\ - \frac{\nu}{s_j^2}(\omega^2 T' - T''') + \frac{\nu}{s_j} f(z) \Big] e^{pz}\, dp, \tag{27}$$

unde am notat

$$T(s,\ z,\ p) = \frac{s\nu}{p}\left(\frac{\operatorname{sh} sz}{s} - \frac{\operatorname{sh}\ \omega z}{\omega}\right)\int [s\,g(z) + f'(z)]\,dz\,.$$

Suma de mai sus se ia pe toate rădăcinile pozitive ale ecuației (16), iar integrala trebuie concepută în valoare principală. Dacă se ține seama de (26) cu un calcul direct integralele din (27) iau o formă mai simplă.

Necunoscuta $v_r(r, z, t)$ se determină din ecuația de continuitate (7).

*Teorema de unicitate.* Reprezentarea soluției (27) permite să dăm și teorema de unicitate. Presupunînd că ar exista două soluții ale sistemului (13) $w_1$ și $w_2$, diferența $w = w_1 - w_2$ ar satisface același sistem în care $g_1 = g_2 = f_1 = f_2 = 0$, cu condițiile la limită (14) în care $h_1 = h_2 = T_1 = 0$ și condițiile (15) în care $h = 0$. Din (20) și (21) rezultă $f(z) = g(z) = 0$ iar din (25) $C_2 = C_4 = 0$, deci soluția este unică.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1961

## ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ТРУБАХ СО ССЫЛКОЙ НА ГЕМОДИНАМИКУ. I

### РЕЗЮМЕ

Задачи гемодинамики приводят к исследованию движения вязкой жидкости в трубах с упругими стенками. В работе интегрируются линейные уравнения Навье-Стокса (6), (7), при осесимметричном движении, в следующих условиях: предполагается, что при входе в трубу скорость жидкости является известной (8); предполагается также, что на внутренних стенках трубы движение жидкости согласуется с движением упругой трубы; следовательно, мы имеем условия (5), где $u_r$, $u_z$ — перемещения в упругой среде, а $\sigma_{rr}$ — соответствующее напряжение.

Для определения $u_r$, $u_z$ ищут периодическое решение по $t$ и $z$ с раздельными переменными (2) системы Навье (1); при этом предполагается, что трубка имеет конечную толщину. Получается решение (3), (4).

Движение жидкости определяется в начальных условиях, в общем неуточненном виде (10).

Метод интегрирования основывается на превращенной Лапласа, применяемой к системе (6), и на превращенной Ганкеля с конечными пределами (17), частично применяемой к системе (13). С использованием $\tilde{u}$ в качестве катализатора и с учетом зависимостей, которым удовлетворяют функции Бесселя, это применение приводит к системе

(19), (21), (23), а эта последняя — к легко интегрируемому уравнению (23). Получается окончательное решение задачи (23). Оно имеет затухание по $z$, как это и следовало ожидать, и, при условии некоторых превращений, может поддаваться численным определениям. Неизвестная $v_n(r, z, t)$ находится из уравнения непрерывности.

Наконец, дается теорема единственности.

## MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX DANS DES TUBES ÉLASTIQUES, DU POINT DE VUE DE L'HÉMODYNAMIQUE. I


### RÉSUMÉ

L'hémodynamique soulève des problèmes concernant l'étude du mouvement d'un fluide visqueux dans les tubes à parois élastiques. Dans ce travail, l'auteur procède à l'intégration des équations linéaires de Navier-Stokes (6), (7) pour le mouvement axial symétrique, dans les conditions suivantes : il suppose que la vitesse du fluide à l'entrée du tube est connue (8) ; et que le mouvement du fluide sur les parois intérieures du tube est lié au mouvement du tube élastique. Ceci fournit les conditions (5), où $u_r$, $u_z$ désignent les déplacements dans le milieu élastique et $\sigma_{rr}$ la contrainte respective.

Afin de déterminer $u_r$ et $u_z$, l'auteur tâche de trouver une solution périodique en $t$ et $z$ à variables indépendantes (séparées) (2) du système de Navier (1), dans l'hypothèse d'un tube d'épaisseur finie. Il obtient la solution (3), (4).

Le mouvement du fluide est déterminé dans des conditions initiales sous une forme générale non précisée (10).

La méthode d'intégration est fondée sur la transformée de Laplace, appliquée au système (6), et sur la transformée de Hankel à limites finies (17), partiellement appliquée au système (13). En utilisant $\tilde{u}$ comme catalyseur et en tenant compte des relations auxquelles satisfont les fonctions de Bessel, cette application mène au système (19), (21), (23) qui conduit, à son tour, à l'équation (23), facilement intégrable. On obtient ainsi la solution définitive du problème (23). Comme il fallait s'y attendre, cette solution est amortie en $z$ et, en recourant à certaines simplifications, susceptible de déterminations numériques. L'inconnue $v_r(r, z, t)$ est déduite de l'équation de continuité.

Pour finir, l'auteur présente le théorème de l'unicité.


### BIBLIOGRAFIE


1. G. P. FULTON, *Textbook of Physiology*. Philadelphia-London, 1950.
2. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest-Paris, 1959.
3. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*. New York-Toronto-London, 1951.

4. J. R. WOMERSLEY, The Philosophical Magazine, **46**, 199–221 (1955).
5. — Journal of Physiology, **127**, *3* (1955).
6. JOHN W. LAMBERT, Journal of the Franklin Institute, **266** (1958).
7. R. E. SHIPLEY, D. E. GREEGG, E. F. SCHRODER, Amer. Journal of Physiology, **138** (1943).
8. E. P. W. HELPS, D. A. MC DONALD, Journal of Physiology, **154**, 308 (1954).
9. J. R. WOMERSLEY, Journal of Physiology, **154**, 31 P (1954).
10. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1946.
11. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. В. ШАБАТ, *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, 1958.
12. L. DRAGOŞ, *Oscilaţiile elastice ale tubului cilindric*. Studii şi cercetări matematice (acest volum).
13. G. N. WATSON, *A treatise on the Theory of Bessel Functions*. University Press, Cambridge, 1922.

# DOUĂ EXTINDERI ALE INTEGRALELOR RIEMANN ŞI LEBESGUE. I*)

DE

ION I. CRISTEA

În această lucrare vom prezenta două extinderi succesive ale integralelor Riemann şi Lebesgue, extinderi care permit studierea noţiunii de integrală dintr-un punct de vedere nou.

Observînd că integrala Riemann, pornind de la diviziuni de pe axa absciselor, porneşte de fapt de la diviziuni de pe axa valorilor funcţiei $g(x) \equiv x$ iar integrala Lebesgue, considerînd diviziuni pe axa valorilor funcţiei de integrat $f(x)$, presupune în fond diviziuni pe axa valorilor funcţiei $g(x) \equiv f(x)$, la baza primei extinderi a fost ideea de a reuni aceste două fapte. Astfel, generalizînd simultan şi integrala Riemann şi integrala Lebesgue, vom porni de la o funcţie arbitrară $g(x)$, iar diviziunile le vom lua pe axa valorilor acestei funcţii $g(x)$.

Întrucît integrala definită de noi a unei funcţii $f(x)$ nu depinde de funcţia *suport* $g(x)$ şi este cuprinsă între integralele inferioară şi superioară (analoge celor din teoria clasică) ale funcţiei $f(x)$ relativ la două funcţii *suport* $g_1(x)$ şi $g_2(x)$, s-a trecut la cea de-a doua extindere, marcînd totodată şi locul primei extinderi faţă de această a doua extindere.

## PRIMA EXTINDERE

### § 1. DEFINIŢIE. PROPRIETĂŢI

Să considerăm mulţimea funcţiilor mărginite definite pe o mulţime măsurabilă $E$. Fie $f : E \to (a, A)$ o astfel de funcţie, nu neapărat măsurabilă, iar $g : E \to (b, B)$ o funcţie măsurabilă oarecare.

*) Prezenta lucrare este o reluare a comunicării *Asupra unor extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue*, comunicare prezentată de autor la Conferinţa pe ţară a cercurilor ştiinţifice studenţeşti din 25—26 aprilie 1959, la Universitatea din Bucureşti.

Oricare ar fi mulțimea $G$, de pe axa valorilor lui $g(x)$, vom nota

$$g^{-1}(G) = \{x \in E \mid g(x) \in G\}.$$

Considerînd atunci, o diviziune $\Delta$ a intervalului $(b, B)$ :

$$\Delta = \Delta_g = (b = g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_i < \ldots < g_n = B)$$

pentru această diviziune au sens sumele :

$$s_\Delta = s_\Delta(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(e_i) \cdot m\, e_i,$$

$$S_\Delta = S_\Delta(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(e_i) \cdot m\, e_i,$$

unde am pus $e_i = g^{-1}([g_{i-1}, g_i))$. Deoarece aceste sume au proprietățile sumelor inferioare și superioare din teoria integralelor Darboux, vom considera marginile

$$\underline{\int}_E f\, dg^{-1} = \sup_\Delta s_\Delta(f, g), \quad \overline{\int}_E f\, dg^{-1} = \inf_\Delta S_\Delta(f, g),$$

pe care le vom numi *g-integrala inferioară*, respectiv *g-integrala superioară* a funcției $f(x)$ pe mulțimea $E$. Este imediat că

$$a \cdot m\, E \leqslant \underline{\int}_E f\, dg^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\, dg^{-1} \leqslant A \cdot m\, E. \tag{1}$$

În general, cele două $g$-integrale, inferioară și superioară, nu sînt egale. Pentru aceasta este suficient să remarcăm că dacă $g(x)$ este constantă pe $E$, atunci

$$\underline{\int}_E f\, dg^{-1} = \inf f(E) \cdot m\, E, \quad \overline{\int}_E f\, dg^{-1} = \sup f(E) \cdot m\, E.$$

Definiția 1. *Dacă pentru o funcție $g(x)$ măsurabilă pe mulțimea $E$ avem*

$$\underline{\int}_E f\, dg^{-1} = \overline{\int}_E f\, dg^{-1},$$

*atunci spunem că funcția $f(x)$ este g-integrabilă pe mulțimea $E$ și vom nota cu*

$$\int_E f\, dg^{-1}$$

*valoarea comună a celor două g-integrale.*

Este evident că integrabilităţile Riemann şi Lebesgue sînt cazuri de integrabilitate în sensul acestei definiţii: integrala Riemann este o $x$-integrală, iar integrala Lebesgue a unei funcţii măsurabile $f(x)$ o $f$-integrală

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,\,b)} f\,d\,(x)^{-1}, \qquad (\mathrm{L})\int_E f(x)\,dx = \int_E f\,d\,f^{-1}.$$

Avem proprietatea de medie

$$a \cdot m\,E \leqslant \int_E f\,dg^{-1} \leqslant A \cdot m\,E. \tag{1'}$$

Din inegalităţile (1) mai rezultă că, dacă mulţimea $E$ este de măsură nulă, atunci orice funcţie $f(x)$ este $g$ -integrabilă pe $E$, pentru orice $g(x)$ măsurabilă, iar $g$-integrala respectivă este nulă.

Propoziţia 1. *Oricare ar fi descompunerea mulţimii măsurabile $E$ într-un număr finit de mulţimi măsurabile disjuncte*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad (E_j \cap E_k = \emptyset,\ j \neq k)$$

*şi oricare ar fi funcţia $g(x)$ măsurabilă, avem*

$$\underline{\int_E} f\,dg^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} \leqslant \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1}.$$

Demonstrăm propoziţia pentru cazul $n = 2$, în cazul general demonstrîndu-se prin inducţie.

În adevăr, pentru diviziunea $\Delta$ a lui $(b,\ B)$ construind mulţimile evident măsurabile

$$e_i^1 = e_i \cap E_1; \qquad e_i^2 = e_i \cap E_2,$$
$$(e_i^1 \cup e_i^2 = e_i; \qquad e_i^1 \cap e_i^2 = \emptyset)$$

avînd de exemplu

$$\inf f(e_i) \cdot m\,e_i \leqslant \inf f(e_i^1) \cdot m\,e_i^1 + \inf f(e_i^2) \cdot m\,e_i^2,$$

în cazul sumelor inferioare rezultă

$$s_\Delta(f, g) \leqslant s(_\Delta^1 f, g) + s_\Delta^2(f, g),$$

unde $s_\Delta^1$ şi $s_\Delta^2$ se referă la $E_1$ respectiv la $E_2$. De aici

$$\sup_\Delta s_\Delta(f, g) \leqslant \sup_\Delta s_\Delta^1(f, g) + \sup_\Delta s_\Delta^2(f, g)$$

adică

$$\underline{\int_E} f\,dg^{-1} \leqslant \underline{\int_{E_1}} f\,dg^{-1} + \underline{\int_{E_2}} f\,dg^{-1}.$$

Analog se demonstrează

$$\overline{\int_E} f\,dg^{-1} \geqslant \overline{\int_{E_1}} f\,dg^{-1} + \overline{\int_{E_2}} f\,dg^{-1}.$$

TEOREMA 1. *Dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$, oricare ar fi descompunerea cel mult numerabilă a lui $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două*

$$E = \bigcup_i E_i, \quad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k),$$

*atunci $f(x)$ este $g$-integrabilă pe fiecare mulțime $E_i$ și avem*

$$\int_E f\,dg^{-1} = \sum_i \int_{E_i} f\,dg^{-1}.$$

Pentru un număr finit de mulțimi $E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, în baza propoziției precedente avem

$$\underline{\int_E} f\,dg^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} \leqslant \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1}.$$

Or, prin ipoteză, termenii extremi fiind egali avem egalitatea celor mijlocii și prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} - \underline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} \right) = 0.$$

În membrul din stînga fiecare paranteză fiind nenegativă aceste paranteze sînt nule și deci

$$\underline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1} = \overline{\int_{E_i}} f\,dg^{-1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ceea ce înseamnă că $f(x)$ este $g$-integrabilă pe fiecare mulțime $E_i$.

Egalitatea

$$\int_E f\,dg^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\,dg^{-1}$$

este acum imediată.

În cazul unei descompuneri infinit numerabile

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k)$$

punînd

$$R_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i,$$

cum

$$m R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} m E_i \to 0 \quad \text{cînd} \quad n \to \infty$$

iar conform proprietăţii de medie (1′)

$$a \cdot m R_n \leqslant \int_{R_n} f \, dg^{-1} \leqslant A \cdot m R_n,$$

rezultă că pentru $n \to \infty$ avem

$$\int_{R_n} f \, dg^{-1} \to 0.$$

Aşadar, avînd

$$\int_E f \, dg^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f \, dg^{-1} + \int_{R_n} f \, dg^{-1}$$

înseamnă că

$$\int_E f \, dg^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, dg^{-1}.$$

Din demonstraţia acestei teoreme rezultă că dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$, atunci $f(x)$ are această proprietate pe orice submulţime măsurabilă $M \subset E$.

P r o p o z i ţ i a 2 a. *Oricare ar fi funcţia $g(x)$ măsurabilă şi oricare ar fi constanta $C$ avem :*

— *dacă $C > 0$, atunci*

$$\underline{\int}_E (Cf) \, dg^{-1} = C \underline{\int}_E f \, dg^{-1}; \qquad \overline{\int}_E (Cf) \, dg^{-1} = C \overline{\int}_E f \, dg^{-1};$$

— *dacă $C < 0$, atunci*

$$\underline{\int}_E (Cf) \, dg^{-1} \geqslant C \overline{\int}_E f \, dg^{-1}; \qquad \overline{\int}_E (Cf) \, dg^{-1} \leqslant C \underline{\int}_E f \, dg^{-1}. \tag{2}$$

În adevăr, inegalitatea din cazul $C > 0$ rezultă din faptul că

$$s_\Delta (Cf, g) = C \cdot s_\Delta (f, g), \quad S_\Delta (Cf, g) = C \cdot S_\Delta (f, g).$$

Apoi, în cazul $C < 0$ avînd

$$s_\Delta (Cf, g) = C \cdot S_\Delta (f, g), \quad S_\Delta (Cf, g) = C \cdot s_\Delta (f, g),$$

rezultă

$$\underline{\int}_E (Cf)\, dg^{-1} \geqslant C \cdot S_\Delta (f, g), \quad \overline{\int}_E (Cf)\, dg^{-1} \leqslant C \cdot s_\Delta (f, g),$$

inegalități care avînd loc pentru orice $\Delta$ al lui $(b, B)$, conduc la

$$\underline{\int}_E (Cf)\, dg^{-1} \geqslant C \overline{\int}_E f\, dg^{-1}, \quad \overline{\int}_E (Cf)\, dg^{-1} \leqslant C \underline{\int}_E f\, dg^{-1},$$

adică la ultimele inegalități din enunț.

Propoziția 2b. *Oricare ar fi funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ și oricare ar fi funcția $g(x)$ măsurabilă, avem*

$$\underline{\int}_E f_1\, dg^{-1} + \underline{\int}_E f_2\, dg^{-1} \leqslant \underline{\int}_E (f_1 + f_2)\, dg^{-1},$$

$$\underline{\int}_E f_1\, dg^{-1} + \overline{\int}_E f_2\, dg^{-1} \geqslant \overline{\int}_E (f_1 + f_2)\, dg^{-1}.$$

În adevăr, cum

$$\inf f_1(x) + \inf f_2(x) \leqslant \inf [f_1(x) + f_2(x)],$$

$$\sup f_1(x) + \sup f_2(x) \geqslant \sup [f_1(x) + f_2(x)],$$

aceleași inegalități le avem și între sumele inferioare, respectiv superioare, oricare ar fi diviziunea $\Delta$ a lui $(b, B)$; prin urmare avem inegalitățile propoziției.

Ca un corolar al propozițiilor precedente se pot enunța:

Teorema 2a. *Oricare ar fi constanta $C$, dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ atunci și $Cf(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ și avem*

$$\int_E (Cf)\, dg^{-1} = C \int_E f\, dg^{-1}.$$

Teorema 2b. *Dacă $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt două funcții $g$-integrabile pe $E$, atunci și funcția $f_1(x) + f_2(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ și avem*

$$\int_E f_1\, dg^{-1} + \int_E f_2\, dg^{-1} = \int_E (f_1 + f_2)\, dg^{-1}.$$

De exemplu, în cazul $C < 0$ al teoremei 2 a, este suficient să demonstrăm că dacă funcția $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ și funcția $-f(x)$ este de asemenea $g$-integrabilă pe $E$ și avem

$$\int_E (-f)\, dg^{-1} = -\int_E f\, dg^{-1}. \tag{3}$$

În adevăr, cum $f(x) + [-f(x)] = 0$, conform primei inegalităţi a propoziţiei 2b avem

$$\underline{\int}_E f\,dg^{-1} + \underline{\int}_E (-f)\,dg^{-1} \leqslant 0$$

iar în baza primei inegalităţi (2) a propoziţiei 2a pentru $C = -1$, cum $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$

$$\underline{\int}_E f\,dg^{-1} + \underline{\int}_E (-f)\,dg^{-1} \geqslant \underline{\int}_E f\,dg^{-1} - \overline{\int}_E f\,dg^{-1} = 0,$$

rezultă deci

$$\underline{\int}_E f\,dg^{-1} + \underline{\int}_E (-f)\,dg^{-1} = 0.$$

Demonstrîndu-se analog relaţia corespunzătoare pentru $g$-integralele superioare, cum $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$, rezultă că şi $-f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ şi în plus avem egalitatea (3).

Aceste două teoreme 2a şi 2b afirmă că mulţimea funcţiilor $g$-integrabile pe $E$, pentru o funcţie $g(x)$ măsurabilă dată, constituie un spaţiu liniar.

## § 2. PROBLEMA INTEGRABILITĂŢII

Într-o comunicare precedentă [3] am introdus noţiunea de *continuitate în raport cu o funcţie*: o funcţie $f(x)$ este continuă (faţă de mulţimea $E$) în punctul $x_0 \in E$ în raport cu o funcţie $g(x)$ dacă oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, aşa ca pentru orice $x \in E$, pentru care $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, să avem şi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dacă $f(x)$ este continuă în raport cu $g(x)$ în orice punct al unei mulţimi $M \subset E$, atunci funcţia $f(x)$ este *continuă în raport cu $g(x)$ pe mulţimea $M$*, iar dacă în definiţia acestei continuităţi numărul $\delta$ este acelaşi oricare ar fi $x_0 \in M$, adică $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, funcţia $f(x)$ este *uniform continuă în raport cu $g(x)$ pe mulţimea $M$*.

LEMA 1. *Dacă $f(x)$ este continuă pe $E$ în raport cu o funcţie $g(x)$, pentru care $g(E)$ este o mulţime compactă, atunci $f(x)$ este uniform continuă în raport cu $g(x)$ pe $E$.*

În adevăr, în baza continuităţii lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ într-un punct $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ fiind dat, găsim un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ aşa ca îndată ce punctul $x$ are proprietatea că $g(x) \in (g(x_0) - \delta,\ g(x_0) + \delta) \equiv I(g(x_0), \delta)$ să avem şi $|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considerînd atunci familia intervalelor $I\left(g(x_0), \frac{\delta(\varepsilon, x_0)}{2}\right)$, centrate respectiv în punctele $g(x_0)$ şi de lungime $\delta(\varepsilon, x_0)$, această familie

constituie o acoperire infinită a mulțimii $g(E)$. Cum $g(E)$ este însă compactă, în baza lemei lui Borel-Lebesgue există o acoperire finită a mulțimii $g(E)$ cu intervale ale acestei familii. Fie $(c_1, d_1)$, $(c_2, d_2)$, ..., $(c_p, d_p)$ intervalele acestei acoperiri finite. Să notăm

$$\eta = \eta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \min_{i=1}^{p} \{(d_i - c_i)\}.$$

Fie $x_0$ și $x$ două puncte în $E$ pentru care

$$| g(x_0) - g(x) | < \eta.$$

Există un interval, fie el $(c, d)$, dintre intervalele $(c_1, d_1)$, $(c_2, d_2)$, ... ..., $(c_p, d_p)$ care conține punctul $g(x_0)$. Cum evident

$$\left| g(x_0) - \frac{c+d}{2} \right| < \frac{d-c}{2}, \qquad | g(x) - g(x_0) | < \eta \leqslant \frac{d-c}{2},$$

rezultă că

$$\left| g(x) - \frac{c+d}{2} \right| < d - c.$$

Ținînd atunci seamă că în baza definiției intervalelor acoperirii $\frac{c+d}{2} \in g(E)$, dacă punem $\frac{c+d}{2} = g(x^*)$, avem

$$| f(x_0) - f(x^*) | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | f(x) - f(x^*) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci

$$| f(x_0) - f(x) | < \varepsilon$$

care demonstrează lema.

TEOREMA 3. *Dacă $f(x)$ este continuă în raport cu $g(x)$, măsurabilă, pentru care $g(E)$ este o mulțime compactă, atunci $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$.*

În adevăr, o condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie $g$-integrabilă pe $E$ este ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă o diviziune $\Delta$ a lui $(b, B)$ așa ca

$$S_\Delta(f, g) - s_\Delta(f, g) < \varepsilon$$

sau ceea ce este tot una

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i < \varepsilon,$$

unde prin $\omega_f(e_i)$ am notat oscilația funcției $f(x)$ pe mulțimea $e_i$.

Apoi, $g(E)$ fiind compactă, în baza lemei precedente $f(x)$ este uniform continuă în raport cu $g(x)$ pe $E$. Prin urmare, $\varepsilon > 0$ fiind dat putem determina un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ aşa ca $|g(x') - g(x'')| < \delta$ să implice

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{mE}, \qquad (mE \neq 0).$$

Luînd atunci o diviziune $\Delta$ a lui $(b, B)$, de normă $\nu(\Delta) < \delta$, cum pentru orice $e_i$

$$\omega_f(e_i) = \sup f(e_i) - \inf f(e_i) < \frac{\varepsilon}{mE},$$

rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i < \frac{\varepsilon}{mE} \sum_{i=1}^{n} m\, e_i = \varepsilon$$

ceea ce demonstrează teorema.

Ne punem acum problema inversă: în ce măsură continuitatea funcţiei $f(x)$ în raport cu $g(x)$ pe $E$ este esenţială pentru a avea $g$-integrabilitatea lui $f(x)$ pe $E$?

Următoarele teoreme vor da un răspuns la această întrebare.

TEOREMA 4 a. *Dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$, atunci oricare ar fi perechea de numere pozitive $\varepsilon$ şi $\sigma$, există o familie finită de intervale ale lui $(b, B)$: $I_1, I_2, \ldots, I_p$ astfel încît pe fiecare mulţime $\widetilde{e}_k = g^{-1}(I_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, p)$ să avem*

$$\omega_f(\widetilde{e}_k) \geqslant \varepsilon \quad \text{iar} \quad \sum_{k=1}^{n} m\widetilde{e}_k < \sigma.$$

Evident, avem o diviziune $\Delta$ a lui $(b, B)$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i < \varepsilon\sigma.$$

Omiţînd din sumă mulţimile $e_i$ pentru care $\omega_f(e_i) < \varepsilon$, cu atît mai mult

$$\varepsilon \cdot \sum_{\omega_f \geqslant \varepsilon} m\, e_i \leqslant \sum_{\omega_f \geqslant \varepsilon} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i < \varepsilon\sigma$$

şi deci

$$\sum_{\omega_f \geqslant \varepsilon} m\, e_i < \sigma$$

care demonstrează teorema.

Vom introduce acum o noțiune analogă noțiunii de oscilație într-un punct. Astfel, considerînd mulțimea tuturor intervalelor $I_{g_0} \subset (b, B)$ centrate în punctul $g_0 = g(x_0)$, marginea

$$\omega_f(x_0, g) = \inf_{I_{g_0}} \{\omega_f [g^{-1}(I_{g_0})]\}$$

o vom numi *oscilația funcției $f(x)$ în raport cu $g(x)$ în punctul $x_0$.*

Evident, cu această definiție teorema precedentă se poate completa astfel:

TEOREMA 4 b. *Dacă $f(x)$ este g-integrabilă pe $E$, atunci oricare ar fi perechea de numere pozitive $\varepsilon$ și $\sigma$, există o familie finită de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_p$ ale lui $(b,B)$ care să acopere toate punctele $g(x)$ pentru care $\omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon$ și astfel încît reuniunea mulțimilor $\widetilde{e}_k = g^{-1}(I_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, p)$ să fie de măsură inferioară lui $\sigma$.*

Sub această formă teorema aceasta admite o reciprocă. Să demonstrăm însă, mai întîi, următoarea lemă, care extinde cunoscuta lemă a lui Baire.

LEMA 2. *Dacă în orice punct al mulțimii $E$, oscilația funcției $f(x)$ în raport cu o funcție $g(x)$, pentru care $g(E)$ este o mulțime compactă, este inferioară unui număr $\omega$, atunci oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$ dat se poate determina un număr $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice interval $I \subset (b, B)$ de lungime inferioară lui $\lambda$ și pentru care mulțimea $g^{-1}(I) \neq \emptyset$, oscilația funcției $f(x)$ pe mulțimea $g^{-1}(I)$ să fie mai mică decît $\omega + \varepsilon$.*

Să admitem, prin absurd, că lema nu ar fi adevărată. Ar exista atunci un număr $\varepsilon > 0$ așa ca oricare ar fi $\lambda > 0$ să existe cel puțin un interval $I \subset (b, B)$ de lungime mai mică decît $\lambda$ cu proprietatea că mulțimea $g^{-1}(I) \neq \emptyset$ și pentru care

$$\omega_f(g^{-1}(I)) \geqslant \omega + \varepsilon.$$

Fie atunci șirul de numere pozitive $\lambda_n \to 0$, iar $I_n$ șirul de intervale ale lui $(b,B)$ care-i corespunde, adică lungimea intervalului $I_n$ este mai mică decît $\lambda_n$, $g^{-1}(I_n) \neq \emptyset$ iar $\omega_f(g^{-1}(I_n)) \geqslant \omega + \varepsilon$.

Conform lemei lui Cesáro, din șirul de intervale $I_n$ se poate extrage un subșir care să conveargă către un punct $g_0 \in (b, B)$. Pentru a scurta scrierea să presupunem că extragerea este deja făcută. Cum în fiecare $I_n$ există un punct $g_n \in g(E)$, căci $g^{-1}(I) \neq \emptyset$ iar $g(E)$ este compactă, rezultă că $g_0 \in g(E)$. Deci, există un $x_0 \in E$ așa ca $g(x_0) = g_0$.

Pe de altă parte, există un $N > 0$ astfel ca oricare ar fi $n > N$ să avem $g_0 \in I_n$. Cum însă, oricare ar fi $n$ avem $\omega_f(g^{-1}(I_n)) \geqslant \omega + \varepsilon$, rezultă că și $\omega_f(x_0, g) \geqslant \omega + \varepsilon$ ceea ce contrazice ipoteza $\omega_f(x, g) < \omega$ valabilă oricare ar fi $x \in E$.

Deci lema este demonstrată.

Putem demonstra atunci:

TEOREMA 5. *Dacă $g(E)$ este o mulțime compactă și dacă oricărei perechi de numere pozitive $\varepsilon$ și $\sigma$ îi corespunde o familie finită de intervale deschise $I_1, I_2, \ldots, I_p$ ale lui $(b,B)$ care să acopere punctele $g(x)$ pentru*

*care* $\omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon$ *şi astfel ca reuniunea mulţimilor* $g^{-1}(I_1), g^{-1}(I_2), \ldots, g^{-1}(I_p)$ *să fie de măsură inferioară lui* $\sigma$, *atunci* $f(x)$ *este g-integrabilă pe E.*

În adevăr, dîndu-se numerele $\varepsilon^* > 0$ şi $\sigma > 0$ să presupunem că mulţimea punctelor $g(x)$, pentru care $\omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon^*$, se poate acoperi cu o familie finită de intervale deschise, să le notăm tot $I_1, I_2, \ldots, I_p$, incluse în $(b, B)$ şi astfel ca

$$\sum_{k=1}^{p} m\, g^{-1}(I_k) < \sigma.$$

Fie $\gamma$ una din extremităţile unuia dintre intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Dacă $\gamma \in g(E)$, fie $c_0 \in E$ pentru care $g(c_0) = \gamma$. Evident, $\omega_f(c_0, g) < \varepsilon^*$. Există deci, un interval centrat în $\gamma$ : $I_\gamma = (\gamma - \delta_\gamma, \gamma + \delta_\gamma)$ inclus în $(b, B)$ astfel ca $\omega_f(g^{-1}(I_\gamma)) < 2\varepsilon^*$. Considerînd mulţimea tuturor extremităţilor $\gamma$ ale intervalelor $I_1, I_2, \ldots I_p$, aparţinînd lui $g(E)$, să notăm $\delta = \min_{\gamma} \delta_\gamma$. Cum avem cel mult $2p$ extremităţi $\gamma \in g(E)$ evident $\delta > 0$.

Să notăm cu $J_1, J_2, \ldots, J_q$ intervalele complementare intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_p$ faţă de $(b, B)$. În punctele mulţimilor $g^{-1}(J_1), g^{-1}(J_2), \ldots$ $\ldots, g^{-1}(J_q)$ oscilaţia lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ este inferioară lui $\varepsilon^*$. Cum însă intervalele $J_1, J_2, \ldots, J_q$ sînt închise, mulţimea

$$g(E) \cap \bigcup_{h=1}^{q} J_h$$

este compactă şi deci, conform lemei precedente, există nu număr $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice subinterval $J$ al intervalelor $J_1, J_2, \ldots, J_q$ de lungime mai mică decît $\lambda$, pentru care $g^{-1}(J) \neq \emptyset$, să avem

$$\omega_f(g^{-1}(J)) \leqslant 2\,\varepsilon^*.$$

Vom construi atunci o diviziune $\Delta$ a lui $(b, B)$ de normă

$$\nu(\Delta) < \eta(\varepsilon) = \min\{|I_1|, |I_2|, \ldots, |I_p|, \lambda, \delta\},$$

unde prin $|I_k|$ am notat lungimea intervalului $I_k$. Putem presupune că diviziunea $\Delta$ conţine ca puncte de diviziune şi extremităţile intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_p$, în caz contrar adăugînd aceste puncte. Atunci, suma $S_\Delta(f, g) - s_\Delta(f, g)$ referitoare la $\Delta$ se va descompune în trei părţi

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i = \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma'''$$

astfel :

— suma $\Sigma'$ se referă la intervalele $[g'_{i-1}, g'_i)$ exterioare intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_p$ care n-au nici o extremitate comună cu aceste intervale sau admit ca extremitate comună cu ele un punct care nu aparţine lui $g(E)$ ;

— suma $\Sigma''$ se referă la intervalele $[g''_{i-1}, g''_i)$ interioare intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_p$ care de asemenea n-au nici o extremitate comună cu ele sau admit ca extremitate comună un punct care nu aparţine lui $g(E)$ ;

— în fine, suma $\Sigma'''$ corespunde intervalelor $[g'''_{i-1}, g'''_i)$ ce conțin o extremitate a unuia din intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_p$, extremitate care este un punct al lui $g(E)$.

Evident

$$\Sigma' < 2\varepsilon^* \cdot \Sigma' m\, e_i < 2\varepsilon^* \cdot m\, E,$$

$$\Sigma'' < (A - a)\, \Sigma'' m\, e_i < (A - a) \cdot \sigma, \qquad (a \neq A)$$

$$\Sigma''' < 2\varepsilon^* \cdot \Sigma''' m\, e_i < 2\varepsilon^* \cdot m\, E.$$

În concluzie, dacă am fi luat $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{8 \cdot m\, E}$ și $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{2\,(A - a)}$, $(m\, E \neq 0)$, pentru diviziunea $\Delta$ determinată în mod analog am fi avut

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(e_i) \cdot m\, e_i < 4\varepsilon^* \cdot mE + (A - a)\, \sigma = \varepsilon,$$

de unde rezultă evident $g$-integrabilitatea lui $f(x)$ pe $E$.

Spunînd acum că o mulțime $M \subset E$ este (față de $E$)de *măsură Jordan nulă în raport cu o funcție $g(x)$ măsurabilă*, dacă oricărui $\sigma > 0$ îi corespunde o familie finită de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_p$ care să acopere mulțimea $g(M)$ și astfel ca

$$\sum_{k=1}^{p} m\, g^{-1}(I_k) < \sigma.$$

Cu această definiție teoremele 4b și 5 se pot scrie la un loc :

TEOREMA 6. *Dacă $g(x)$ este o funcție măsurabilă pentru care $g(E)$ este o mulțime compactă, o condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție $f(x)$ să fie $g$-integrabilă pe $E$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ mulțimea*

$$E_\varepsilon = \{x \mid x \in E,\ \omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon\}$$

*să fie de măsură Jordan nulă în raport cu $g(x)$.*

Dacă vom numi *punct de discontinuitate al unei funcții $f(x)$ în raport cu o funcție $g(x)$* un punct în care $f(x)$ nu este continuă în raport cu $g(x)$ și dacă, prin analogie cu cazul clasic, vom spune că o mulțime $M \subset E$ este (față de $E$) de *măsură Lebesgue nulă în raport cu o funcție măsurabilă $g(x)$*, dacă oricărui $\sigma > 0$ îi corespunde o familie cel mult numerabilă de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ care să acopere mulțimea $M$ și astfel ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, g^{-1}(I_n) < \sigma$$

atunci, criteriul de integrabilitate formulat de ultima teoremă se poate pune sub forma :

TEOREMA 7. *O condiție necesară și suficientă ca funcția $f(x)$ să fie $g$ - integrabilă pe $E$, $g(x)$ fiind o funcție măsurabilă pentru care $g(E)$ este o mulțime compactă, este ca mulțimea discontinuităților lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ să fie de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$.*

Demonstrația decurge analog ca în cazul teoremei cunoscute a lui Lebesgue din teoria integralei Riemann.

Să observăm mai întîi că dacă $f(x)$ este discontinuă în raport cu $g(x)$ într-un punct $x_0$, atunci există un $\varepsilon > 0$ așa ca oricare ar fi intervalul $I$ centrat în punctul $g(x_0)$ să avem $\omega_f(g^{-1}(I)) \geqslant \varepsilon$.

*Necesitatea.* Fie $D$ mulțimea discontinuităților lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ conținute în mulțimea $E$. Avem descompunerea

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{\varepsilon}{2^n}}, \quad E_\alpha = \{x \mid x \in E, \ \omega_f(x, g) \geqslant \alpha > 0\}.$$

Cum în baza teoremei 6 punctele mulțimii $g(E_\alpha)$ pot fi acoperite cu o familie finită de intervale $I_\alpha^1, I_\alpha^2, \ldots, I_\alpha^{p_\alpha}$ astfel ca

$$\sum_{k=1}^{p_\alpha} m\, g^{-1}(I_\alpha^k) < \sigma_\alpha,$$

unde $\sigma_\alpha > 0$ este un număr dat dinainte, alegînd atunci pe $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \alpha$ și făcînd pe $\alpha$ egal pe rînd cu $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$ mulțimea $g(D)$ s-a acoperit cu o mulțime numerabilă de familii finite de intervale pentru care evident

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p_{\frac{\varepsilon}{2^n}}} m\, g^{-1}\left(I_{\frac{\varepsilon}{2^n}}^k\right) < \sigma$$

căci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sigma.$$

Cum intervalele astfel obținute se pot aranja într-un șir, rezultă că mulțimea $D$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$.

*Suficiența.* Să observăm mai întîi că mulțimea $g(E_\varepsilon)$ este închisă oricare ar fi $\varepsilon > 0$. În adevăr, dacă $y_0$ este un punct de acumulare al lui $g(E_\varepsilon)$, cum $g(E_\varepsilon) \subset g(E)$ iar $g(E)$ fiind compactă, $y_0 \in g(E)$ și deci există $x_0 \in E$ așa că $g(x_0) = y_0$. Considerînd atunci un interval $I$ centrat în punctul $y_0$, în acest interval avem cel puțin un punct $y = g(x)$ aparținînd lui $g(E_\varepsilon)$. Cum însă $\omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon$ cu atît mai mult avem $\omega_f(g^{-1}(I)) \geqslant \varepsilon$ și deci $\omega_f(x_0, g) \geqslant \varepsilon$ ceea ce justifică afirmația noastră.

Cum evident

$$g(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(E_{\frac{\varepsilon}{2^n}}),$$

prin ipoteză, oricare ar fi $\sigma > 0$ dat, putem determina o familie cel mult numerabilă de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ astfel ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, g^{-1}(I_n) < \sigma$$

și care să acopere mulțimea $g(D)$. Cum $g(E_\varepsilon) \subset g(D)$, această familie de intervale acoperă cu atît mai mult mulțimea $g(E_\varepsilon)$. Or $g(E_\varepsilon)$ fiind mărginită și închisă, putem extrage o acoperire finită, astfel că dacă $J_1, J_2, \ldots, J_p$ sînt intervalele extrase, cu atît mai mult

$$\sum_{k=1}^{p} m\, g^{-1}(J_k) < \sigma.$$

Deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ mulțimea $E_\varepsilon$ este de măsură Jordan nulă în raport cu $g(x)$ și prin urmare, în baza teoremei 6, $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$.

Teorema este complet demonstrată.

Spunînd acum că o proprietate are loc *aproape peste tot pe o mulțime* $M$ (față de o mulțime $E$) *în raport cu o funcție măsurabilă* $g(x)$, dacă mulțimea punctelor lui $M$ în care proprietatea nu are loc este (față de $E$) de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$, atunci ultimei teoreme i se poate da și următoarea formulare :

TEOREMA 7'. *O condiție necesară și suficientă ca* $f(x)$ *să fie* $g$*-integrabilă pe* $E$, *unde* $g(x)$ *este o funcție măsurabilă pentru care* $g(E)$ *este o mulțime compactă, este ca* $f(x)$ *să fie continuă în raport cu* $g(x)$ *aproape peste tot pe* $E$ *în raport cu* $g(x)$.

În felul acesta, teorema 3 demonstrată la începutul acestui paragraf apare ca un simplu corolar al ultimei teoreme. Tot ca niște corolare ale teoremei 7' se obțin criteriile cunoscute de integrabilitate din teoria integralelor Riemann și Lebesgue. Astfel, în cazul integralei Riemann, luînd $E = [a, b]$, cum $g(x) \equiv x$ obținem criteriul cunoscut al lui Lebesgue : o condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este ca $f(x)$ să fie continuă aproape peste tot pe $[a, b]$. Apoi, în cazul integralei Lebesgue cum se ia $g(x) \equiv f(x)$, iar totdeauna $f(x)$ este continuă în raport cu ea însăși, măsurabilitatea este necesară și suficientă pentru a avea integrabilitatea Lebesgue a lui $f(x)$ pe E.

LEMA 3. *Dacă mulțimea* $M \subset E$ *este de măsură Lebesgue nulă în raport cu o funcție măsurabilă* $g(x)$, *atunci* $M$ *este de măsură nulă în sensul lui Lebesgue.*

În adevăr, deoarece $M$ este de măsură nulă în raport cu $g(x)$, $\sigma > 0$ fiind dat există o familie cel mult numerabilă de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ incluse în $(b, B)$ așa ca

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset g(M)$$

și pentru care

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, g^{-1}(I_n) < \sigma.$$

Cum însă $g^{-1}(I_n)$ sînt mulțimi măsurabile ale lui $E$ și mulțimea

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(I_n) = g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$$

este măsurabilă. Deci, avînd

$$m^* g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(I_n)\right] < \sum_{n=1}^{\infty} m^* g^{-1}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m\, g^{-1}(I_n) < \sigma$$

iar din faptul că

$$g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \supset M$$

rezultă cu atît mai mult

$$m^* M \leqslant m^* g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) < \sigma$$

adică

$$0 \leqslant m_* M \leqslant m^* M < \sigma;$$

cum $\sigma$ este arbitrar iar $m_* M$ şi $m^* M$ nu depind de $\sigma$, urmează că $M$ este măsurabilă şi de măsură nulă.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată decît dacă mulţimea $E$ este ea însăşi de măsură nulă în sensul lui Lebesgue.

În general, dacă $m E > 0$, fie $g(x)$ o funcţie măsurabilă care ia pe $E$ o mulţime cel mult numerabilă de valori. Dacă

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad (E_p \cap E_q = \emptyset, \quad p \neq q)$$

este desfacerea realizată de această funcţie pe mulţimea $E$, să considerăm ca mulţime $M$ mulţimea obţinută prin extragerea din fiecare mulţime $E_n$ a cîte unui singur punct (sau chiar a unei mulţimi cel mult numerabile de puncte). Evident, mulţimea $M$ fiind cel mult numerabilă, este de măsură Lebesgue nulă. Însă, mulţimea $M$ nu este (faţă de mulţimea $E$) de măsură Lebesgue nulă în raport cu funcţia $g(x)$, căci oricare ar fi intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ care acoperă punctele lui $g(M)$, avem $g^{-1}(I_n) = E_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ şi prin urmare

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, g^{-1}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m\, E_n = m E.$$

Aşadar, putem afirma:

TEOREMA 8. *O condiţie necesară ca $f(x)$ să fie $g$-integrabilă pe $E$, unde $g(x)$ este măsurabilă iar $g(E)$ compactă, este ca $f(x)$ să fie continuă în raport cu $g(x)$ aproape peste tot pe $E$.*

## § 3. ALTE PROPRIETĂŢI

Fiind dată funcţia $f(x)$ ne vom concentra acum atenţia asupra funcţiilor $g(x)$ măsurabile, în raport cu care are loc $g$-integrabilitatea funcţiei $f(x)$ pe $E$.

P r o p o z i ț i a 3. *Oricare ar fi funcțiile* $g_1(x)$ *și* $g_2(x)$ *măsurabile, avem*

$$\underline{\int}_E f\, dg_1^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\, dg_2^{-1}.$$

Evident, în cazul $g_1(x) \equiv g_2(x)$ inegalitatea este banală. De asemenea dacă una din funcțiile $g_1(x)$ sau $g_2(x)$ este constantă, inegalitatea este o consecință a proprietății de medie (1) :

$$\inf f(E)\cdot m\, E = \underline{\int}_E f\, dg_1^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\, dg_2^{-1},$$

sau

$$\underline{\int}_E f\, dg_1^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\, dg_2^{-1} = \sup f(E)\cdot m\, E.$$

Fie atunci $g_1(x) \not\equiv g_2(x)$ cu $g_1(x)$ și $g_2(x)$ neconstante pe $E$. Presupunînd că $g_1 : E \to (b_1, B_1)$ iar $g_2 : E \to (b_2, B_2)$, fie $\Delta_1$ și $\Delta_2$ două diviziuni oarecare ale intervalelor $(b_1, B_1)$, respectiv $(b_2, B_2)$ :

$$\Delta_1 = (b_1 = g_1^0 < g_1^1 < g_1^2 < \ldots < g_1^i < \ldots < g_1^n = B_1),$$

$$\Delta_2 = (b_2 = g_2^0 < g_2^1 < g_2^2 < \ldots < g_2^j < \ldots < g_2^m = B_2).$$

Asociind acestor diviziuni mulțimile

$$e_1^i = g_1^{-1}([g_1^{i-1}, g_1^i)), \quad e_2^j = g_2^{-1}([g_2^{j-1}, g_2^j)), \quad e^{ij} = e_1^i \cap e_2^j,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m)$$

mulțimile $e^{ij}$ sînt disjuncte și măsurabile iar

$$E = \bigcup_{i,j} e^{ij}, \quad m\, E = \sum_{i,j} m\, e^{ij}.$$

În baza propoziției 1, cum mulțimile $e^{ij}$ sînt în număr finit,

$$\underline{\int}_E f\, dg_1^{-1} \leqslant \sum_{i,j} \underline{\int}_{e^{ij}} f\, dg_1^{-1}$$

iar conform proprietății de medie

$$\inf f(e^{ij})\cdot m\, e^{ij} \leqslant \underline{\int}_{e^{ij}} f\, dg_1^{-1} \leqslant \sup f(e^{ij})\cdot m\, e^{ij},$$

rezultă

$$\underline{\int}_E f\, dg_1^{-1} \leqslant \sum_{i,j} \sup f(e^{ij})\cdot m\, e^{ij}.$$

Însă, $e^j = \bigcup_{i=1}^{n} e^{ij}$ iar $\sup f(e^{ij}) \leqslant \sup f(e^j)$ de unde, cu atît mai mult,

$$\underline{\int_E} f\, dg_1^{-1} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sup f(e^j) \cdot \sum_{i=1}^{n} m\, e^{ij}.$$

Or, cum

$$\sum_{i=1}^{n} m\, e^{ij} = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} e^{ij}\right) = m\, e^j,$$

ultima inegalitate se scrie

$$\underline{\int_E} f\, dg_1^{-1} \leqslant S_{\Delta_2}(f,\ g_2).$$

În fine, diviziunea $\Delta_2$ a lui $(b_2,\ B_2)$ fiind arbitrară, vom avea şi

$$\underline{\int_E} f\, dg_1^{-1} \leqslant \inf_{\Delta_2} S_{\Delta_2}(f, g_2) = \overline{\int_E} f\, dg_2^{-1}$$

adică tocmai inegalitatea propoziţiei.

Din propoziţia demonstrată rezultă cîteva consecinţe foarte importante, importanţa unora văzîndu-se chiar în acest paragraf.

Astfel, dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă, oricare ar fi funcţia $h(x)$ măsurabilă diferită de $g(x)$, avem

$$\underline{\int_E} f\, dh^{-1} \leqslant \int_E f\, dg^{-1} \leqslant \overline{\int_E} f\, dh^{-1}. \tag{4}$$

Apoi, dacă $f(x)$ este atît $g_1$-integrabilă pe $E$ cît şi $g_2$-integrabilă pe $E$, unde $g_1(x)$ şi $g_2(x)$ sînt două funcţii măsurabile, atunci

$$\int_E f\, dg_1^{-1} = \int_E f\, dg_2^{-1} \tag{5}$$

adică *g-integrala pe E a unei funcţii $f(x)$ este aceeaşi oricare ar fi funcţia măsurabilă $g(x)$ pentru care ea există.*

Observînd că în cazul integralelor clasice integrabilitatea Riemann a unei funcţii atrage integrabilitatea Lebesgue a acestei funcţii iar cele două integrale sînt egale

$$(\mathrm{R}) \int_0^1 f(x)\, dx = (\mathrm{L}) \int_0^1 f(x)\, dx,$$

sau transpunînd această egalitate cu ajutorul simbolului integral introdus de noi

$$\int_{[0,1]} f\, d(x)^{-1} = \int_{[0,1]} f\, df^{-1},$$

se pune întrebarea: în ce măsură egalitatea (5) generalizează această ultimă egalitate? Mai mult chiar, cum pentru a avea ultima egalitate este necesar și suficient ca $f(x)$ să fie aproape peste tot continuă pe intervalul [0,1], în ce raporturi stau funcțiile $g_1(x)$ și $g_2(x)$?

LEMA 4. *O condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie continuă în raport cu $g(x)$ pe o mulțime $M \subset E$ este ca oricărui interval deschis $I$ al lui $(a, A)$ să-i corespundă o familie cel mult numerabilă de intervale deschise $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ ale lui $(b, B)$ având proprietatea*

$$M \cap f^{-1}(I) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(J_n) \subseteq f^{-1}(I). \tag{6}$$

În adevăr, în baza continuității lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ pe $M$ într-un punct $x_0 \in M$, oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ așa ca pentru orice $x \in E$, pentru care $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Altfel spus, oricărui interval deschis $I_{f_0} \subset (a, A)$, cu centrul în punctul $f_0 = f(x_0) \in f(M)$, îi corespunde un interval $J_{g_0} \subset (b, B)$ cu centrul în $g_0 = g(x_0)$, așa ca să avem $f(g^{-1}(J_{g_0})) \subset I_{f_0}$ sau, ceea ce este același lucru,

$$g^{-1}(J_{g_0}) \subset f^{-1}(I_{f_0}).$$

Fie acum $I$ un interval deschis oarecare inclus în $(a, A)$. Să considerăm punctul $f_0 = f(x_0) \in I \cap f(M)$ și să notăm $g_0 = g(x_0)$. Cum $I$ este un interval deschis, punctul $f_0$ este un punct interior și deci există un subinterval deschis $I'_{f_0} \subset I$ și centrat în $f_0$. În baza continuității lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ în $x_0$, intervalului $I'_{f_0}$ îi corespunde însă un interval deschis $J'_{g_0}$ așa că $g^{-1}(J'_{g_0}) \subset f^{-1}(I'_{f_0})$. Considerînd atunci mulțimea tuturor punctelor $f_0 \in I \cap f(M)$ și a tuturor punctelor $x_0 \in M$ așa ca $f_0 = f(x_0)$, mulțimea tuturor intervalelor $J'_{g_0} \subset (b, B)$ ce se atașează respectiv fiecărui punct $x_0 \in M$, constituie o acoperire cu intervale deschise a mulțimii $g(M \cap f^{-1}(I))$. Din această acoperire, în baza teoremei lui Lindelöf, putem extrage o acoperire cel mult numerabilă $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ de intervale deschise; deci

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supseteq g(M \cap f^{-1}(I)),$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(J_n) \supseteq M \cap f^{-1}(I). \tag{7}$$

Pe de altă parte, conform construcției lor, intervalele $J_n$ au proprietatea că $g^{-1}(J_n) \subset f^{-1}(I)$ oricare ar fi $n$. Prin urmare

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(J_n) \subseteq f^{-1}(I). \tag{7'}$$

Relaţia (6) din enunţ rezultă din compararea incluziunilor (7) şi (7′).

Reciproc, dacă oricare ar fi intervalul deschis $I$ avem un şir de intervale deschise $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ incluse în $(b, B)$ aşa ca să avem incluziunile (6), presupunînd intervalul $I$ centrat în punctul $f_0 = f(x_0) \in f(M)$ să alegem dintre intervalele $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ acel interval $J$ care conţine punctul $g_0 = g(x_0)$. Intervalul $J$ conţine un subinterval deschis $J_{g_0}$ cu centrul în $g_0$. Cum din (6) avem $g^{-1}(J) \subset f^{-1}(I)$, pentru intervalul $J_{g_0}$ vom avea cu atît mai mult $g^{-1}(J_{g_0}) \subset f^{-1}(I)$. Or, aceasta înseamnă că $f(x)$ este continuă în raport cu $g(x)$ în $x_0$. Cum $x_0$ este arbitrar în $M$, lema este demonstrată.

LEMA 5. *Dacă mulţimea $N \subset E$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu o funcţie $f(x)$ şi dacă $f(x)$ este continuă în raport cu o funcţie $g(x)$ pe $N$, atunci mulţimea $N$ este de măsură Lebesgue nulă şi în raport cu $g(x)$.*

În adevăr, deoarece $N$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$, $\sigma > 0$ fiind dat există un şir de intervale deschise $I^1, I^2, \ldots I^n, \ldots$ ale lui $(a, A)$ care acoperă mulţimea $f(N)$ şi pentru care

$$\sum_{n=1}^{\infty} m f^{-1}(I^n) < \sigma. \tag{8}$$

Apoi, $f(x)$ fiind continuă în raport cu $g(x)$ pe $N$, în virtutea lemei precedente fiecărui interval deschis $I^n$ îi corespunde o familie cel mult numerabilă de intervale deschise $J_1^n, J_2^n \ldots, J_p^n, \ldots$ incluse în $(b, B)$ avînd proprietatea că

$$N \cap f^{-1}(I^n) \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} g^{-1}(J_p^n) \subseteq f^{-1}(I^n). \tag{9}$$

Considerînd atunci mulţimea tuturor intervalelor $J_p^n (n, p = 1, 2, \ldots)$ astfel obţinute, avem

$$g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty} J_p^n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty} g^{-1}(J_p^n) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N \cap f^{-1}(I^n)) =$$

$$= N \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I^n) = N \cap f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n\right) \supseteq N \cap f^{-1}(f(N)) \supseteq N \cap N = N,$$

căci am ţinut seamă de incluziunile din stînga lui (9) şi de faptul că intervalele $I^1, I^2, \ldots, I^n, \ldots$ acoperă mulţimea $f(N)$. Aşadar

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty} J_p^n \supseteq g(N)$$

adică şirul intervalelor $J_p^n$ $(n, p = 1, 2, \ldots)$ acoperă mulţimea $g(N)$.

Pe de altă parte, cum mulţimile $g^{-1}(J_p^n)$ sînt măsurabile, în baza incluziunii din dreapta a relaţiei (9) avem şi

$$\sum_{p=1}^{\infty} m g^{-1}(J_p^n) = m\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} g^{-1}(J_p^n)\right) \leqslant m f^{-1}(I^n)$$

și deci, conform cu (8),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} m\, g^{-1}(J_p^n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\, f^{-1}(I^n) < \sigma.$$

Rezumînd, $\sigma > 0$ fiind dat am găsit o familie numerabilă de intervale $J_p^n$ $(n,\ p,\ = 1,\ 2,\ \ldots)$ care acoperă mulțimea $g(N)$ și pentru care

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} m\, g^{-1}\,(J_p^n) < \sigma.$$

Or, aceasta înseamnă că mulțimea $N$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$.

În această ultimă lemă continuitatea lui $f(x)$ în raport cu $g(x)$ este esențială. În adevăr, considerînd $E = [-1,\ +\ 1]$ și funcțiile

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x \geqslant 0\,; \\ 0, & \text{pentru } x < 0, \end{cases}$$

oricare ar fi mulțimea $N \subset E$ de măsură Lebesgue nulă în raport cu $f(x)$, adică de măsură nulă în sens clasic, această mulțime $N$ nu este însă de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$. De exemplu, dacă $N$ este formată doar din două puncte : $N = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\}$, oricare ar fi intervalele $I_0$ și $I_1$ care acoperă punctele $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ și $g\left(+\frac{1}{2}\right)$, adică punctele 0 și 1, avem

$$m\, g^{-1}\,(I_0) + m\, g^{-1}(I_1) = 2.$$

Este vizibil apoi că funcția $f(x)$ este discontinuă în raport cu $g(x)$ în orice punct al lui $E$, deci și al lui $N$.

TEOREMA 9. *Dacă funcția $g(x)$ măsurabilă este continuă pe $E$ în raport cu o funcție $h(x)$ măsurabilă, pentru care $h(E)$ este o mulțime compactă, atunci din $g$-integrabilitatea unei funcții $f(x)$ pe $E$ rezultă și $h$-integrabilitatea funcției $f(x)$ pe $E$.*

Să notăm cu $D_{\varphi\psi}$ mulțimea punctelor de discontinuitate din $E$ ale funcției $\varphi(x)$ în raport cu o funcție $\psi(x)$.

Cum $g(x)$ este continuă în raport cu $h(x)$ pe $E$, iar $h(E)$ este compactă, se poate arăta imediat că și mulțimea $g(E)$ este compactă. Atunci, în baza teoremei 7′, deoarece avem $g$-integrabilitatea lui $f(x)$ pe $E$, iar $g(E)$ este compactă, rezultă că mulțimea $D_{fg}$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$. Dar, cum $g(x)$ este continuă în raport cu $h(x)$ pe $E$, deci cu atît mai mult pe $D_{fg}$, în baza lemei precedente rezultă că $D_{fg}$ este de măsură Lebesgue nulă și în raport cu $h(x)$. Apoi, în punctele în care $f(x)$ este continuă în raport cu $g(x)$, cum avem și continuitatea lui $g(x)$ în raport cu $h(x)$, rezultă că $f(x)$ este continuă și în raport cu $h(x)$. Deci, $D_{fh} \subset D_{fg}$ și cu atît mai mult $D_{fh}$ este de măsură Lebesgue nulă în raport cu $h(x)$. În concluzie, $h(E)$ fiind compactă, în baza teoremei 7′, rezultă că avem și $h$-integrabilitatea lui $f(x)$ pe $E$.

TEOREMA 10. *Dacă $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$, unde $g(x)$ este o funcţie măsurabilă pentru care $g(E)$ este o mulţime compactă, iar $g(x)$ este $h$-integrabilă pe $E$, $h(x)$ fiind de asemenea măsurabilă iar $h(E)$ o mulţime compactă, atunci $f(x)$ este şi $h$ -integrabilă pe $E$.*

Demonstraţia se bazează pe incluziunea evidentă

$$D_{fh} \subseteq D_{fg} \cup D_{gh} = (D_{fg} - D_{gh}) \cup D_{gh}. \tag{10}$$

Cum $g(E)$ şi $h(E)$ sînt mulţimi compacte şi avem $g$-integrabilitatea funcţiei $f(x)$ şi $h$-integrabilitatea funcţiei $g(x)$, rezultă că mulţimile $D_{fg}$, şi cu atît mai mult $D_{fg} - D_{gh}$, şi $D_{gh}$ sînt de măsură Lebesgue nulă în raport cu $g(x)$ şi respectiv cu $h(x)$. În punctele mulţimii $D_{fg} - D_{gh}$, $g(x)$ fiind continuă în raport cu $h(x)$, în baza lemei 5, urmează că $D_{fg} - D_{gh}$ este de măsură Lebesgue nulă şi în raport cu $h(x)$. Deci, conform incluziunii (10), şi mulţimea $D_{fh}$ fiind de măsură Lebesgue nulă în raport cu $h(x)$, cum $h(E)$ este compactă, avem $h$-integrabilitatea funcţiei $f(x)$ pe $E$ şi deci teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 8 octombrie 1961.

## ДВА ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА И ЛЕБЕГЭ. I

### РЕЗЮМЕ

Даются два последовательных обобщения интегралов Римана и Лебегэ. Первое обобщение, это $g$ — интеграл функции $f(x)$ на множестве $E$ (определение 1) использует разбиения $\Delta$ на оси значений измеримой функции $g(x)$. Если $g(x) \equiv x$ получается случай интеграла Римана, а если $g(x) \equiv f(x)$, получается случай интеграла Лебегэ.

В §§ 1, 2, 3 изучаются некоторые свойства этого $g$-интеграла и задача о $g$-интегрируемости функции $f(x)$ на множестве $E$ (теоремы 6, 7 и 7′).

Для нужд изучаемых задач определяются понятия о непрерывности относительно функции, мере относительно функции и т. д.

## DEUX EXTENSIONS DES INTÉGRALES DE RIEMANN ET DE LEBESGUE. I

### RÉSUMÉ

L'auteur présente deux extensions successives des intégrales de Riemann et de Lebesgue, extensions permettant d'étudier la notion d'intégrale en partant d'un nouveau point de vue.

La première extension, ce qu'on appelle la $g$-intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (définition 1), suppose que les divisions $\Delta$ sont prises sur l'axe des valeurs de la fonction mesurable $g(x)$. Si l'on prend $g(x) \equiv x$ on obtient le cas de l'intégrale de Riemann; mais si l'on prend $g(x) \equiv f(x)$ on arrive au cas de l'intégrale de Lebesgue. Les paragraphes 1, 2 et 3 concernent des propriétés de cette $g$-intégrale ainsi que la question de la $g$-intégrabilité d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (théorèmes 6, 7 et 7').

Le long de ce travail, l'auteur reprend une série de notions classiques qu'il transpose selon les nécessités imposées par les problèmes qu'il étudie, comme par exemple les notions de continuité par rapport à une fonction, la mesure par rapport à une fonction, etc.

BIBLIOGRAFIE

1. M. NICOLESCU, *Analiză matematică*. I, II, III. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, 1958, 1960.
2. I. P. NATANSON, *Teoria funcţiilor de variabilă reală*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. ION I. CRISTEA, *Un tip de integrală înrudită cu integrala Stieltjes*. Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *4*, 339–407 (1961).

# ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA TRANSPORTURILOR

## V. PROBLEME DE TRANSPORTURI CU PRODUCȚIE NEOMOGENĂ

DE

E. BALAȘ și P. IVĂNESCU

### § 1. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Procedeele obișnuite de rezolvare a problemelor de transporturi se utilizează la elaborarea planurilor optime de transporturi pentru produse omogene, care pot fi livrate de către oricare producător, oricărui consumator. În practică însă adesea se cere elaborarea unor planuri de transporturi pentru produse neomogene. Dacă neomogenitatea constă în existența cîtorva sortimente nesubstituibile (care nu se pot înlocui reciproc), atunci planul de transport trebuie elaborat pentru fiecare sortiment în parte și problema se transformă în mai multe probleme obișnuite de transporturi. De multe ori însă neomogenitatea produsului este însoțită de posibilitatea de substituire parțială a sorturilor, astfel că pentru o parte din consumatori produsul poate fi considerat omogen (sorturile putîndu-se înlocui reciproc) și numai pentru restul consumatorilor el trebuie considerat neomogen. Un caz foarte răspîndit de acest gen îl constituie produsele exportabile ; de obicei piața externă impune condiții de calitate, care fac ca producătorii să nu poată exporta decît o anumită parte din producția lor. Această parte poate varia de la producător la producător, sau poate fi aceeași pentru toți producătorii.

Din punct de vedere matematic această problemă (Problema I) poate fi formulată astfel :

Să se găsească valorile $x_{ij}$ ($i = 1, \ldots, m$ ; $j = 1, \ldots, n$) pentru care expresia

$$E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

își atinge minimul și care satisfac relațiile :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} \leqslant e_i \qquad (1 \leqslant r < n;\ i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Aici $c_{ij}$, $a_i$, $b_j$ și $e_i$ sînt numere nenegative date, care satisfac relațiile

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \geqslant \sum_{j=1}^{r} b_j. \tag{6}$$

Din (2) și (4) se vede că $e_i \leqslant a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

O problemă similară, dar nu identică, care în locul relației (4) conține relația $x_{ij} \leqslant e_{ij}$ este cunoscută sub numele de *problemă de transporturi cu capacități limitate* și metode de rezolvare a ei au fost date de L.V. Kantorovici, precum și de Ford și Fulkerson.

## § 2. METODA DE REZOLVARE

Să considerăm următoarea problemă (Problema II). Fie

$$a'_h = \begin{cases} e_h & (h = 1, \ldots, m) \\ a_{h-m} - e_{h-m} & (h = m+1, \ldots, 2m), \end{cases} \tag{7}$$

$$b'_j = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

$$c'_{hj} = \begin{cases} c_{hj} & (h = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \\ c_{h-m,\,j} & (h = m+1, \ldots, 2m;\ j = r+1, \ldots, n) \\ C & (h = m+1, \ldots, 2m;\ j = 1, \ldots, r), \end{cases} \tag{9}$$

$C$ fiind un număr suficient de mare pentru a satisface condiția (A) care va fi dată mai jos.

Să se determine valorile $x'_{hj}$ $(h = 1, \ldots, 2m;\ j = 1, \ldots, n)$ pentru care expresia

$$E' = \sum_{h=1}^{2m} \sum_{j=1}^{n} c'_{hj}\, x'_{hj} \tag{10}$$

îşi atinge minimul şi care satisfac relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x'_{hj} &= a'_h \qquad (h = 1, \ldots, 2m) \\ \sum_{h=1}^{2m} x'_{hj} &= b'_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$x'_{hj} \geqslant 0 \qquad (h = 1, \ldots, 2m\,;\ j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Problema II are soluţie. Într-adevăr, se vede că avem de-a face cu o problemă obişnuită de transporturi (cu $2mn$ necunoscute) deoarece $a'_i \geqslant 0$ (aceasta rezultă din faptul că $e_i \leqslant a_i$) şi deoarece

$$\sum_{i=1}^{2m} a'_i = \sum_{j=1}^{n} b'_j$$

$$\left(\text{căci } \sum_{i=1}^{2m} a'_i = \sum_{i=1}^{m} e_i + \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} e_i = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

Prin urmare există întotdeauna *) $\overline{X'} = (\overline{x}'_{ij})$ care satisface relaţiile (11), (12) şi realizează minimul expresiei (10).

*Condiţia* (A) este satisfăcută de un număr $C$, dacă în soluţia optimă a oricărei probleme de transporturi de tipul II, $x'_{hj} = 0$ pentru $m + 1 \leqslant h \leqslant 2m$ şi $1 \leqslant j \leqslant r$.

Existenţa unor numere $C$, satisfăcînd condiţia de mai sus, este garantată de relaţia (6).

LEMĂ. *Pentru orice soluţie $X$ a unei probleme de transporturi de tipul I, există o soluţie $X'$ a problemei corespunzătoare de tipul II, astfel ca*

$$x_{ij} = x'_{ij} + x'_{i+m,j} \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

*şi*

$$E(X) = E'(X'). \tag{14}$$

Într-adevăr, fie $X$ o soluţie a problemei I şi fie $\alpha_{ij}$, $\beta_{i+m,j}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ nişte numere nenegative cu proprietăţile :

$$\sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{r} x_{ij} = e_i\,,$$

$$\alpha_{i+m,j} + \beta_{i+m,j} = b_j\,;$$

existenţa acestora este evidentă. Fie acum

$$\left.\begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij} \\ x'_{i+m,j} &= 0 \end{aligned}\right\} (i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, r)$$

$$\left.\begin{aligned} x'_{ij} &= \alpha_{ij} \\ x'_{i+m,j} &= \beta_{i+m,j} \end{aligned}\right\} (i = 1, \ldots, m\,;\ j = r+1, \ldots, n). \tag{15}$$

Este clar că $X' = (x'_{ij})$ este o soluţie a problemei II care satisface relaţiile (13) şi (14).

*) S. I. Gass, *Linear Programming*. Mc Graw Hill, New York, 1958.

TEOREMA 1. *Dacă* $\overline{X}' = (\overline{x}'_{hj})$ *este soluția optimă a problemei II, atunci* $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})$, *obținut din* $\overline{X}'$ *cu ajutorul relației (13), este o soluție optimă a problemei I.*

Demonstrație.

*a*) $\overline{X}$ satisface relațiile (2), (3), (4). Într-adevăr, din relațiile (12) și (13) se vede că relația (3) este satisfăcută. Din relațiile (11) și (13) rezultă că

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} + \sum_{j=1}^{n} x'_{i+m,j} = a'_i + a'_{i+m} = a_i,$$

și

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m} x'_{i+m,j} = b'_j = b_j,$$

deci $\overline{X}$ satisface (2).

Dacă relația (4) n-ar fi verificată de soluția $\overline{X}$ ar însemna că există un $i_0$ pentru care $\sum_{j=1}^{r} \overline{x}_{i_0 j} > e_{i_0}$, deci ar exista un $\overline{x}'_{hj}$ pozitiv ($h > m$, $j \leqslant r$). Acest fapt ar contrazice condiția (A) referitoare la numărul $C$; relația (4) este deci verificată.

*b*) Soluția $\overline{X}$ realizează minimul expresiei $E$. Într-adevăr, dacă soluția $\overline{X}$ n-ar fi soluția optimă a problemei I, atunci ar exista o soluție $X_0$ astfel ca $E(X_0) < E(\overline{X})$. Fie $X'_0$ soluția problemei II obținută din $X_0$ prin (15). Ar rezulta că $E(X'_0) < E(\overline{X}')$, contrazicîndu-se optimalitatea soluției $\overline{X}'$.

## § 3. GENERALIZARE

Generalizarea problemei I ne duce la următoarea problemă (Problema III).

Să se determine valorile $x_{ij}$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) pentru care expresia

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{16}$$

își atinge minimul și care satisfac relațiile :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} \leqslant e_i \qquad (1 \leqslant r < n\,;\ i = 1, \ldots, m), \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{s} x_{ij} \leqslant f_j \qquad (1 \leqslant s < m\,;\ j = 1, \ldots, n). \tag{20}$$

Aici $c_{ij}$, $a_i$, $b_j$, $e_i$ și $f_j$ sînt numere nenegative date, care satisfac relațiile :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_i &= \sum_{j=1}^{n} b_j , \\ \sum_{i=1}^{m} e_i &\geqslant \sum_{j=1}^{r} b_j , \\ \sum_{j=1}^{n} f_j &\geqslant \sum_{i=1}^{s} a_i . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Din punct de vedere economic, problema corespunde unei situații frecvent întîlnite în practică, cînd producătorii nu pot livra pentru anumiți consumatori (de exemplu pentru export) decît o parte din producția lor, iar consumatorii la rîndul lor nu pot cumpăra de la anumiți producători (de exemplu de la cei care produc sorturi de calitate inferioară) decît o parte din consumul lor.

În acest caz se determină (Problema IV) valorile $x'_{hk}$ $(h = 1, \ldots, 2m ; k = 1, \ldots, 2n)$ pentru care expresia

$$F' = \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2n} c'_{hk} x'_{hk} \tag{22}$$

își atinge minimul și care satisfac relațiile :

$$\sum_{k=1}^{2n} x'_{hk} = a'_h \qquad (h = 1, \ldots, 2m), \tag{23}$$

$$\sum_{h=1}^{2m} x'_{hk} = b'_k \qquad (k = 1, \ldots, 2n),$$

$$x'_{hk} \geqslant 0 \qquad (h = 1, \ldots, 2m ; k = 1, \ldots, 2n), \tag{24}$$

unde

$$a'_h = \begin{cases} e_h & (h = 1, \ldots, m) \\ a_{h-m} - e_h & (h = m + 1, \ldots, 2m) \end{cases} \tag{25}$$

$$b'_k = \begin{cases} f_k & (k = 1, \ldots, n) \\ b_{k-n} - f_k & (k = n + 1, \ldots, 2n) \end{cases} \tag{26}$$

$$c'_{hk} = \begin{cases} c_{hk} & (h = 1, \ldots, m ; k = 1, \ldots, n) \\ c_{h-m,\,k} & (h = m + 1, \ldots, 2m ; k = r + 1, \ldots, 2n) \\ c_{h,\,k-n} & (h = s + 1, \ldots, m ; k = n + 1, \ldots, 2n) \\ c_{h-m,\,k-n} & (h = m + s + 1, \ldots, 2m ; k = n + r + 1, \ldots, 2n) \\ & (h = m + 1, \ldots, 2m ; k = 1, \ldots, r) \\ C & (h = m + 1, \ldots, 2m ; k = n + 1, \ldots, n + r) \\ & (h = 1, \ldots, s ; k = n + 1, \ldots, 2n) \\ & (h = m + 1, \ldots, m + s ; k = n + 1, \ldots, 2n) \end{cases} \tag{27}$$

$C$ fiind un număr care satisface o condiție analogă condiției (A).

Trecerea la soluția problemei inițiale III se face prin relația

$$x_{ij} = x'_{ij} + x'_{i+m,\,j} + x'_{i,\,j+n} + x'_{i+m,\,j+n}. \tag{28}$$

Analog cu teorema I se poate demonstra

TEOREMA 2. *Dacă* $\overline{X}' = (\overline{x}'_{hk})$ *este o soluție optimă a problemei IV, atunci* $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})$ *obținut prin relația (28) este o soluție optimă a problemei III.*

## § 4. EXEMPLE

1. Să considerăm problema I cu datele:

$$a_1 = 170,\ a_2 = 130,\ a_3 = 160,\ a_4 = 140;$$

$$b_1 = 110,\ b_2 = 150,\ b_3 = 70,\ b_4 = 120,\ b_5 = 150;$$

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 21 & 30 & 16 & 44 & 20 \\ 60 & 42 & 23 & 62 & 34 \\ 18 & 54 & 78 & 60 & 70 \\ 75 & 28 & 56 & 26 & 43 \end{bmatrix}.$$

$$e_1 = 120,\ e_2 = 70,\ e_3 = 90,\ e_4 = 100;$$

$$r = 2.$$

Aplicînd procedeul din § 2, avem:

$$a'_1 = 120,\ a'_2 = 70,\ a'_3 = 90,\ a'_4 = 100,\ a'_5 = 50,\ a'_6 = 60,\ a'_7 = 70,\ a'_8 = 40;$$

$$b'_1 = 100,\ b'_2 = 150,\ b'_3 = 70,\ b'_4 = 120,\ b'_5 = 150;$$

$$(c'_{hj}) = \left[\begin{array}{ccccc} 21 & 30 & 16 & 44 & 20 \\ 60 & 42 & 23 & 62 & 34 \\ 18 & 54 & 78 & 60 & 70 \\ 75 & 28 & 56 & 26 & 43 \\ \hline C & C & 16 & 44 & 20 \\ C & C & 23 & 62 & 34 \\ C & C & 78 & 60 & 70 \\ C & C & 65 & 26 & 43 \end{array}\right].$$

Rezolvăm problema de transporturi obișnuită, construită cu datele de mai sus, și obținem soluția care realizează minimul expresiei (10):

$$(x'_{hj}) = \left[\begin{array}{ccccc} 20 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 60 & 10 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array}\right].$$

Revenind cu ajutorul formulei (13) la problema noastră inițială, obținem soluția $\overline{X}$ care realizează minimul expresiei (1):

$$(\overline{x}_{ij}) = \left[\begin{array}{ccccc} 20 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 60 & 70 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 50 & 0 \end{array}\right].$$

2. Să considerăm acum problema III cu datele:

$$f_1 = 90,\ f_2 = 130,\ f_3 = 60,\ f_4 = 100,\ f_5 = 140;\ r = 3 \text{ și } s = 2.$$

Vom avea:

$$a'_1 = 120,\ a'_2 = 70,\ a'_3 = 90,\ a'_4 = 100,\ a'_5 = 50,\ a'_6 = 60,\ a'_7 = 70,\ a'_8 = 40;$$

$$b'_1 = 90,\ b'_2 = 130,\ b'_3 = 60,\ b'_4 = 100,\ b'_5 = 140,\ b'_6 = 20,$$

$$b'_7 = 20,\ b'_8 = 10,\ b'_9 = 20,\ b'_{10} = 10;$$

$$(c'_{hk}) = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 21 & 30 & 16 & 44 & 30 & C & C & C & C & C \\ 60 & 42 & 23 & 62 & 34 & C & C & C & C & C \\ \hline 18 & 54 & 78 & 60 & 70 & 18 & 54 & 78 & 60 & 70 \\ 75 & 28 & 56 & 26 & 43 & 75 & 28 & 56 & 26 & 43 \\ \hline C & C & C & 44 & 20 & C & C & C & C & C \\ C & C & C & 62 & 34 & C & C & C & C & C \\ \hline C & C & C & 60 & 70 & C & C & C & 60 & 70 \\ C & C & C & 26 & 43 & C & C & C & 26 & 43 \end{array}\right].$$

Rezolvînd problema astfel obţinută, ajungem la soluţia care realizează minimul expresiei (23):

$$(x'_{hk}) = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathit{20} & \mathit{80} & \mathit{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathit{40} & 0 & \mathit{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathit{70} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathit{50} & 0 & \mathit{20} & 0 & 0 & \mathit{20} & \mathit{10} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathit{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{10} \\ 0 & 0 & 0 & \mathit{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{20} & 0 \end{array}\right].$$

Revenind la problema iniţială cu ajutorul formulei (28), obţinem următoarea soluţie care realizează minimul expresiei (16):

$$(\bar{x}_{ij}) = \left[\begin{array}{ccccc} \mathit{20} & \mathit{80} & \mathit{20} & 0 & \mathit{50} \\ 0 & 0 & \mathit{40} & 0 & \mathit{90} \\ \mathit{90} & 0 & 0 & \mathit{60} & \mathit{10} \\ 0 & \mathit{70} & \mathit{10} & \mathit{60} & 0 \end{array}\right].$$

Primită la redacţie la 28 septembrie 1961

## К ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ

### V. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕОДНОРОДНОЙ ПРОДУКЦИЕЙ


### РЕЗЮМЕ

На практике часто появляется необходимость планирования транспорта продукции, которая для части потребителей неоднородна (существуют несколько сортов, которые не являются взаимно-заменимыми). Распространенный случай такого рода составляет продукция для экспорта, так как обычно внешний рынок ставит такие условия на качество, которые заставляют производителей экспортировать только часть своей продукции.

С математической точки зрения, задача состоит в определении значений $x_{ij}$, минимизирующих выражение (1) и удовлетворяющих соотношениям (2), (3) и (4).

Дается метод сведения этой задачи к обыкновенной транспортной задаче.

Обобщением этой задачи является задача об определении значений $x_{ij}$, минимизирующих выражение (16) и удовлетворяющих соотношениям (17), (18), (19) и (20).

# ON THE TRANSPORTATION PROBLEM

## V. TRANSPORTATION PROBLEMS WITH NONHOMOGENEOUS PRODUCTS

ABSTRACT

In practice, the necessity often arises of planning the transportation of certain products which are nonhomogeneous for part of their consumers (i.e. there are several not mutually substitutable sorts of the given product), while being homogeneous for the rest of the consumers (i.e. the sorts are mutually substitutable for these consumers). Export products are a typical example : producers can usually meet the quality conditions imposed by foreign markets only for part of their production.

Mathematically, the problem consists of finding those $x_{ij}$ which minimize expression (1), while being subject to (2), (3) and (4).

A method is given for the reduction of this problem to a transportation problem of the usual type.

Generalization leads then to the problem of finding those $x_{ij}$, which minimize expression (16), while being subject to (17), (18), (19) and (20).

# DESPRE CONTINUITATEA OPERAȚIEI DE INTERSECȚIE

DE

PETRU HAMBURG

Continuitatea operațiilor de adunare, înmulțire, sau înmulțire cu un scalar formează una din problemele fundamentale ale analizei funcționale, continuitatea figurînd ca axiomă în definirea grupului topologic, corpului topologic sau al spațiilor vectoriale topologice. Este firesc să se ivească problema continuității altor operații cum este reunirea, intersecția, complementul etc.

Dacă continuitatea acestor operații nu s-a studiat pînă în prezent, acest lucru se datorează în primul rînd unei deosebiri esențiale față de operațiile algebrice. Acestea din urmă se efectuează asupra *elementelor* unui spațiu topologic $S$, pe cînd intersecția este definită pentru două *părți* ale lui $S$, adică pentru două elemente din $\mathfrak{P}(S)$ *). Pentru ca să se poată vorbi despre continuitatea operației de reunire sau intersecție, trebuie ca mulțimea $\mathfrak{P}(S)$ să fie dotată cu o structură topologică. Or, problema introducerii unei topologii în $\mathfrak{P}(S)$, pornind de la o structură topologică dată în $S$, a rămas pînă astăzi foarte puțin elucidată. Pentru cazuri particulare a se vedea D. Pompeiu [6], N. Bourbaki [1] iar pentru cazul general, V. M. Ivanova [4], E. Michael [5] și P. Hamburg [2].

Problema continuității operației de intersecție joacă un important rol în definirea unei topologii în spații de funcții, dacă funcțiile sînt definite nu pe aceeași mulțime, ci pe părțile unui spațiu topologic $S$ și cu valorile într-un grup topologic $G$. Produsul a două funcții putînd fi definit, în general, numai pe intersecția mulțimilor de definiție, continuitatea produsului celor două funcții va fi strîns legată de problema continuității operației de intersecție — a se vedea [3], p. 107—113.

---

*) Notăm cu $\mathfrak{P}(S)$ totalitatea părților lui $S$.

În cele ce urmează vom alege cea mai simplă topologie a mulțimii $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(S)$ dintre cele studiate în [2]:

$S$ fiind un spațiu topologic $(T_1)$ iar $M$ o parte din $S$, vom asocia fiecărei submulțimi închise $F$ și fiecărei supramulțimi deschise $G$ ale lui $M$ o vecinătate

$$\mathfrak{V}_{F,G}(M) = \{N \in \mathfrak{L}(S): \ F \subseteq N \subseteq G\}.$$

Acest sistem de vecinătăți definește o structură topologică $\tau_1$ în $\mathfrak{L}(S)$. Dacă $\mathfrak{L}^* \subseteq \mathfrak{L}(S)$ atunci topologia din $\mathfrak{L}(S)$ induce o topologie și în $\mathfrak{L}^*$. Vom presupune că $\mathfrak{L}^*$ este închisă în raport cu intersecția, adică $M_1, M_2 \in \mathfrak{L}^*$ implică $M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{L}^*$.

Condiția de continuitate a operației de intersecție se poate formula în felul următor:

*Axioma de continuitate a intersecției. Pentru orice vecinătate* $\mathfrak{V}(M_1 \cap M_2)$ *a lui* $M_1 \cap M_2$ *să existe vecinătățile* $\mathfrak{V}(M_1)$ *respectiv* $\mathfrak{V}(M_2)$ *ale lui* $M_1$ *respectiv* $M_2$, *în așa fel încît*

$$\mathfrak{V}(M_1) \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}(M_2) \subseteq \mathfrak{V}(M_1 \cap M_2)$$

unde $\mathfrak{V}(M_1) \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}(M_2) = \{N_1 \cap N_2: \ N_1 \in \mathfrak{V}(M_1), \ N_2 \in \mathfrak{V}(M_2)\}$.

În legătură cu topologia $\tau_1$ dăm următoarele rezultate:

TEOREMA 1. *Pentru ca operația de intersecție să fie continuă în topologia* $\tau_1$ *este suficient, și dacă* $\mathfrak{L}^*$ *este dens în raport cu* $\tau_1$ *în* $\mathfrak{L}$ *este necesar, ca oricare ar fi elementele* $M_1$ *și* $M_2$ *din* $\mathfrak{L}^*$ *și oricare ar fi mulțimea deschisă* $G \supseteq M_1 \cap M_2$, *să existe părți* $G_1, G_2$ *deschise în* $S$ *pentru care să aibă loc relațiile* $G_1 \supseteq M_1$, $G_2 \supseteq M_2$, $G \supseteq G_1 \cap G_2$.

Demonstrație.

a) *Suficiența.* Fie $M_1$, $M_2$ elemente din $\mathfrak{L}^*$. Atunci $\mathfrak{L}^*$ fiind închisă în raport cu intersecția și $M_1 \cap M_2$ face parte din $\mathfrak{L}^*$. Fie mai departe $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{F,G}(M_1 \cap M_2) \cap \mathfrak{L}^*$ o vecinătate arbitrară a lui $M_1 \cap M_2$ în $\mathfrak{L}^*$. Atunci $F \subseteq M_1$, $F \subseteq M_2$ și $G \supseteq M_1 \cap M_2$. Prin ipoteză există mulțimile $G_1 \supseteq M_1$, $G_2 \supseteq M_2$ pentru care $G_1 \cap G_2 \subseteq G$. Pentru orice $N_1 \in \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_{F,G_1}(M_1) \cap \mathfrak{L}^*$ și orice $N_2 \in \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_{F,G_2}(M_2) \cap \mathfrak{L}^*$ rezultă $F \subseteq N_1 \subseteq G_1$ și $F \subseteq N_2 \subseteq G_2$ deci $F \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq G_1 \cap G_2 \subseteq G$. Pe de altă parte $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{L}^*$, deci $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{V}$. Am demonstrat că $\mathfrak{V}_1 \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}_2 \subseteq \mathfrak{V}$; intersecția este continuă în $\mathfrak{L}^*$.

b) *Necesitatea.* Fie $\mathfrak{L}^*$ dens în $\mathfrak{L}$ în raport cu topologia $\tau_1$, fie operația de intersecție continuă în $\mathfrak{L}^*$, $M_1$ și $M_2$ elemente din $\mathfrak{L}^*$ iar $G$ o supramulțime deschisă a lui $M_1 \cap M_2$ în $S$. Atunci $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{\emptyset,G}(M_1 \cap M_2) \cap \mathfrak{L}^*$ este o vecinătate a lui $M_1 \cap M_2$ din $\mathfrak{L}^*$ deci există vecinătățile $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_{F_1,G_1}(M_1) \cap \mathfrak{L}^*$ respectiv $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_{F_2,G_2}(M_2) \cap \mathfrak{L}^*$ în așa fel încît $\mathfrak{V}_1 \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}_2 \subseteq \mathfrak{V}$. Vrem să arătăm că $G_1$ și $G_2$ verifică relațiile din enunț ($G_1$ și $G_2$ sînt părți deschise). În caz contrar ar exista un punct $p$ din $S$ conținut în $G_1 \cap G_2$, străin de $G$. $S$ verifică axioma $(T_1)$, deci mulțimile $F_i' = F_i \cup \{p\}$ sînt închise iar $\mathfrak{V}_{F_i', G_i}(G_i)$ va fi o vecinătate din $\mathfrak{L}$ a mulțimii $G_i$ $(i = 1, 2)$. $\mathfrak{L}^*$ fiind dens

în $\mathfrak{L}$, va exista cîte un element $N_i$ din $\mathfrak{L}^*$ conținut în $\mathfrak{V}_{F_i', G_i}(G_i)$, adică $F_i \cup \{p\} \subseteq N_i \subseteq G_i$, deci $p \in N_i \in \mathfrak{V}_i$ $(i = 1, 2)$. Atunci însă, $\mathfrak{V}_1 \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}_2 \not\subseteq \mathfrak{V}$ căci $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{V}_1 \overset{e}{\cap} \mathfrak{V}_2$ și, $p \in N_1 \cap N_2$ implicînd $N_1 \cap N_2 \not\subseteq G$, $N_1 \cap N_2 \notin \mathfrak{V}$. Am ajuns la o contradicție. Prin urmare $G \supseteq G_1 \cap G_2$; condiția este necesară.

Dacă condiția din teoremă este verificată pentru două mulțimi $M_1$ și $M_2$ fixate, adică pentru orice mulțime deschisă $G$, care acoperă pe $M_1 \cap M_2$, să existe mulțimile deschise $G_1$ și $G_2$ care acoperă pe $M_1$ respectiv $M_2$ și $G_1 \cap G_2 \subseteq G$, atunci vom spune că $M_1$ și $M_2$ verifică condiția intersecției în $S$. Deoarece această condiție este chiar criteriul continuității în topologia $\tau_1$ a operației de intersecție, este important să clarificăm în ce condiții este ea îndeplinită.

TEOREMA 2. *Într-un spațiu topologic $S$ complet normal, pentru ca condiția intersecției să fie verificată este suficient ca să avem*

$$J(M_1 \cap \mathbf{C}M_2, M_2 \cap \mathbf{C}M_1) = \emptyset \text{ *)}$$

*dacă $S$ verifică axioma $(T_2)$ și axioma 1 de numărabilitate, atunci condiția este și necesară.*

Demonstrație.

a) *Suficiența.* Fie $J(M_1 \cap \mathbf{C}M_2, M_2 \cap \mathbf{C}M_1) = \emptyset$. Fiind dată o supramulțime deschisă $G$ a lui $M_1 \cap M_2$, $S$ fiind complet normal, vor exista mulțimile deschise $G_1'$, $G_2'$ cu proprietatea

$$G_1' \supseteq M_1 \cap \mathbf{C}M_2, \qquad G_2' \supseteq M_2 \cap \mathbf{C}M_1 \quad \text{și} \quad G_1' \cap G_2' = \emptyset.$$

Să notăm cu $G_1$, respectiv $G_2$, mulțimile $G_1' \cup G$, respectiv $G_2' \cup G$. Aceste mulțimi verifică următoarele relații:

$$G_1 \cap G_2 = (G_1' \cup G) \cap (G_2' \cup G) = G,$$

$$G_1 = G_1' \cup G \supseteq (M_1 \cap \mathbf{C}M_2) \cup (M_1 \cap M_2) = M_1 \cap (\mathbf{C}M_2 \cup M_2) = M_1$$

și în mod analog $G_2 \supseteq M_2$. Condiția intersecției este verificată.

b) *Necesitatea.* Dacă $J(M_1 \cap \mathbf{C}M_2, M_2 \cap \mathbf{C}M_1) \neq \emptyset$, atunci există un punct $p$ din $S$ făcînd parte din această joncțiune, adică

$$p \in [\overline{(M_1 \cap \mathbf{C}M_2)} \cap (M_2 \cap \mathbf{C}M_1)] \cup [(M_1 \cap \mathbf{C}M_2) \cap \overline{(M_2 \cap \mathbf{C}M_1)}].$$

Să presupunem $p \in (M_1 \cap \mathbf{C}M_2) \cap \overline{(M_2 \cap \mathbf{C}M_1)}$. (Pentru cazul simetric demonstrația este analogă). Prin urmare, $p \in M_1$, $p \notin M_2$. Notînd cu $L$ mulțimea $M_2 \cap \mathbf{C}M_1$ avem $p \in \overline{L}$, $p \notin L$, adică $p$ este un punct de acumulare a lui $L$. În baza lemei de mai jos, în cazul cînd $S$ verifică $(T_2)$ și axioma 1 de numărabilitate, există o mulțime închisă $F \subseteq L \cup \{p\}$ în care $p$ este punct de acumulare. $F$ fiind închis, acesta implică $p \in F$. Fie $G = \mathbf{C}F$. $G$ este deschis și $G = \mathbf{C}F \supseteq \mathbf{C}(L \cup \{p\}) \supseteq M_1 - \{p\} \supseteq M_1 \cap M_2$. Pentru acest $G$ nu vor exista mulțimile $G_1$ și $G_2$ cerute de condiția de intersecție.

---

*) S-a notat cu $J$ joncțiunea, adică $J(A, B) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Într-adevăr, orice supramulțime deschisă $G_1$ a lui $M_1$ va conține împreună cu $p \in M_1$ și o vecinătate a sa în care se va găsi cel puțin un punct $p_1$ din $F$, diferit de $p$. Dar atunci $p_1 \in L = M_2 \cap \complement M_1 \subseteq M_2 \subseteq G_2$, deci $p_1 \in G_1 \cap G_2$. Pe de altă parte, $G$ și $F$ fiind disjuncți, $p_1 \notin G$, deci $G_1 \cap G_2 \not\subseteq G$ pentru supramulțimea deschisă arbitrară $G_i$ a lui $M_i$ $(i = 1, 2)$, și condiția de intersecție nu este verificată. Demonstrația necesității se bazează pe următoarea

LEMĂ. *Într-un spațiu* $(T_2)$ *care verifică axioma 1 de numărabilitate,* $p$ *fiind un punct de acumulare al mulțimii* $L$, *există o mulțime închisă* $F \subseteq L \cup \{p\}$ *în care* $p$ *este punct de acumulare.*

Demonstrație. Fie $(V_n(p))_{n \in N}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului $p$ din spațiul $S$ ($N$ mulțimea numerelor naturale), $p$ un punct de acumulare al mulțimii $L$, adică $V_n(p) \cap (L - \{p\}) \neq \emptyset$. Notînd cu $p_n$ un punct din această intersecție, mulțimea $\{p\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \ldots \cup \{p_n\} \cup \ldots$ va satisface proprietățile din enunț.

Într-adevăr, prin construcție $p$ este punct de acumulare al lui $F$. El este singurul punct de acumulare al lui $F$, căci șirul $(p_n)_{n \in N}$ este convergent, iar $S$ verifică axioma $(T_2)$. Prin urmare $F$ este închis; lema este demonstrată.

Lema prezintă interes și în sine, pentru că ridică problema *aproximării* punctelor de acumulare ale unei mulțimi cu ajutorul nu al unor șiruri, ci al unei mulțimi închise.

Lema pare să rămînă valabilă și în condiții mai largi. În acest caz și condițiile privind cazul necesității din teorema 2 se generalizează.

Criteriul dat în teorema 2 este prea greoi. Este util să dăm un criteriu necesar și altul suficient mai simplu.

TEOREMA 3. *S fiind un spațiu topologic regulat, pentru ca condiția de intersecție să fie verificată este necesar să avem*

$$J(M_1, M_2) \subseteq \overline{M_1 \cap M_2}$$

*iar dacă S este complet normal este suficient ca*

$$J(M_1, M_2) \subseteq M_1 \cap M_2.$$

Prima condiție nu este suficientă, iar a doua nu este necesară.

Demonstrație.

a) *Necesitatea.* Dacă $J(M_1, M_2) \not\subseteq \overline{M_1 \cap M_2}$, atunci există un punct $p$ din $J(M_1, M_2)$ — vom presupune $p \in M_1 \cap \overline{M}_2$ — pentru care $p \notin \overline{M_1 \cap M_2}$. Dacă $S$ este regulat, există mulțimi deschise $G$ și $V$ pentru care $G \supseteq \overline{M_1 \cap M_2}$, $V \ni p$ și $G \cap V = \emptyset$. Arătăm că pentru această supramulțime deschisă $G$ a lui $M_1 \cap M_2$ nu există mulțimile $G_i$ cerute de condiția de intersecție.

Într-adevăr, $G_i$ fiind o supramulțime deschisă arbitrară a lui $M_i (i = 1, 2)$, $U = G_1 \cap V$ va fi o mulțime deschisă care va conține punctul $p$. $G_1 \cap G_2 \supseteq U \cap M_2$. Dar $U \cap M_2 \neq \emptyset$ căci $p \in \overline{M}_2$ deci

$U \cap M_2 \not\subseteq G$ având în vedere că $U \cap G \subseteq V \cap G = \emptyset$. Prin urmare $G_1 \cap G_2 \not\subseteq G$, și condiția de intersecție nu este îndeplinită.

b) *Suficiența* rezultă ușor din teorema 2 dacă demonstrăm că $J(M_1, M_2) \subseteq M_1 \cap \overline{M_2}$ implică $J(M_1 \cap \mathbf{C}M_2,\ M_2 \cap \mathbf{C}M_1) = \emptyset$.

Într-adevăr, dacă $J(M_1, M_2) \subseteq M_1 \cap M_2$, atunci $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \subseteq M_1 \cap M_2$, deci $M_1 \cap \overline{M_2} \cap \mathbf{C}M_2 \subseteq M_1 \cap M_2 \cap \mathbf{C}M_2 = \emptyset$. La fel $\overline{M_1} \cap M_2 \cap \mathbf{C}M_1 = \emptyset$. Atunci însă $(\overline{M_1 \cap \mathbf{C}M_2}) \cap (M_2 \cap \mathbf{C}M_1) \subseteq \overline{M_1} \cap M_2 \cap \mathbf{C}M_1 = \emptyset$ și $(M_2 \cap \mathbf{C}M_1) \cap (\overline{M_1 \cap \mathbf{C}M_2}) \subseteq M_2 \cap \mathbf{C}M_1 \cap \overline{M_1} = \emptyset$, deci

$$J(M_1 \cap \mathbf{C}M_2,\ M_2 \cap \mathbf{C}M_1) = \emptyset.$$

Pentru a verifica că $J(M_1, M_2) \subseteq M_1 \cap M_2$ nu este necesar, fie $S$ mulțimea numerelor reale cu topologia euclidiană, $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (0, 1]$. Condiția de intersecție este verificată pentru $M_1$ și $M_2$, căci oricare ar fi supramulțimea deschisă $G$ a lui $M_1 \cap M_2 = M_1$, alegînd $G_1 = G$, vom avea $G_1 \cap G_2 \subseteq G$. Totuși, $J(M_1, M_2) \not\subseteq M_1 \cap M_2$ căci $J(M_1, M_2) = (0, 1]$, $M_1 \cap M_2 = (0, 1)$.

Condiția $J(M_1, M_2) \subseteq \overline{M_1 \cap M_2}$ nu este suficientă pentru ca condiția de intersecție să fie verificată, deoarece pentru mulțimile $M_1 = (0, 2]$ $M_2 = (1,2) \cup (2,3)$ avem $J(M_1, M_2) = [1,2]$, $M_1 \cap M_2 = (1,2)$, $\overline{M_1 \cap M_2} = [1,2]$ deci $J(M_1, M_2) = \overline{M_1 \cap M_2}$, totuși condiția de intersecție nu este verificată, deoarece pentru $G = M_1 \cap M_2$ nu există mulțimi $G_i$ cerute de această condiție, orice supramulțime deschisă $G_1$ a lui $M_1$ conținînd numere mai mari decît 2, conținute și în $M_2$ deci și în $G_2$, de unde rezultă $G_1 \cap G_2 \not\subseteq G$.

*Exemple*: Dacă $\mathfrak{T}^*$ este format din totalitatea mulțimilor închise din planul euclidian, atunci $\mathfrak{T}^*$ va fi dens în $\mathfrak{T}(S)$.

Condiția de intersecție este verificată în $S$ pentru orice pereche de mulțimi închise, deoarece $J(F_1, F_2) = F_1 \cap F_2$ (a se vedea teorema 3). De aici rezultă, în baza teoremei 1, că operația de intersecție este continuă în $\mathfrak{T}^*$ în raport cu $\tau_1$. Teorema 2 ne mai arată că pentru orice pereche de mulțimi închise $F_1$, $F_2$ vom avea

$$J(F_1 \cap \mathbf{C}F_2,\ F_2 \cap \mathbf{C}F_1) = \emptyset,$$

formulă a cărei verificare directă nu este imediată. Dar atunci, $G_1$, $G_2$ fiind două mulțimi deschise arbitrare, are loc

$$J(G_1 \cap \mathbf{C}G_2,\ G_2 \cap \mathbf{C}G_1) = \emptyset.$$

Prin urmare și totalitatea $\mathcal{O}$ a mulțimilor deschise verifică condiția de intersecție în $S$ și operația de intersecție este continuă în $\mathcal{O}$ în raport cu topologia $\tau_1$.

Primită la redacție la 15 martie 1961

## О НЕПРЕРЫВНОСТИ СТЕПЕНИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ


### РЕЗЮМЕ

Пусть $S$-топологическое пространство ($T_1$), а $\mathfrak{L}(S)$ — семейство частей $S$. Топология вводится на $\mathfrak{L}(S)$ следующим образом: пусть $F$—замкнутое множество $F \subset M$, а $G$—открытое ($G \supset M$). Тогда, если $\mathfrak{V}_{F,G}(M)$ является множеством частей $N (N \in \mathfrak{L}(S))$ с $F \subset N \subset G$, то $\mathfrak{V}_{F,G}(M)$ образует систему соседств $M$.

В работе исследуется непрерывность операции пересечения по отношению к данной топологии.


## SUR LA CONTINUITÉ DE L'OPÉRATION D'INTERSECTION


### RÉSUMÉ

Soit $S$ un espace topologique ($T_1$) et $\mathfrak{L}(S)$ la famille des parties de $S$. On introduit sur $\mathfrak{L}(S)$ une topologie, de la façon suivante : soit $F$ un ensemble fermé $F \subset M$, et $G$ un ensemble ouvert, $G \supset M$. Dans ces conditions, si $\mathfrak{V}_{F,G}(M)$ est l'ensemble des parties $N (N \in \mathfrak{L}(S))$ avec $F \subset N \subset G$, $\mathfrak{V}_{F,G}(M)$ constitue un système de voisinages de $M$.

Dans ce travail, l'auteur étudie la continuité de l'opération d'intersection, par rapport à cette topologie.


### BIBLIOGRAFIE


1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques. Topologie générale.* II. A.S.I. 1142.
2. P. Hamburg, *Despre spaţiul părţilor unui spaţiu topologic.* Studii şi cercetări de matematică, Cluj, **11**, 23—33 (1960).
3. — *Despre structura algebrică şi topologică a spaţiilor generalizate Fantappiè.* Teză. Cluj, 1960.
4. V. M. Ivanova, *Despre teoria spaţiilor de submulţimi.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **101**, 601—604 (1955).
5. E. Michael, *Topologies on spaces of subsets.* Trans. A.M.S., **71**, 152—182 (1951).
6. D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes.* Ann. Fac. Toulouse, **7**, *2*, 264—315 (1905).

# OPERATORI ÎN MULȚIMI DE PĂRȚI

DE

M. BALÁZS, D. BORȘAN, M. FRODA-SCHECHTER și P. HAMBURG

## § 1. INTRODUCERE

Notînd cu $\mathfrak{P}(E)$ mulțimea părților unei mulțimi arbitrare $E$, vom considera, în cele ce urmează, aplicații univoce ale lui $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ în el însuși, deci funcții $\mathfrak{L}' = F(\mathfrak{L})$, prin care unei mulțimi $\mathfrak{L}$ de părți ale lui $E$, $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, i se asociază o altă mulțime de părți $\mathfrak{L}' \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$.

În topologie, în teoria filtrelor, a gratiilor etc. intervin adesea asemenea operatori.

Se știe, de exemplu, că $\mathfrak{B} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ fiind o bază de filtru, filtrul $\mathfrak{F} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ generat de această bază este format din totalitatea supramulțimilor lui $\mathfrak{B}$, adică

$$\mathfrak{F} = f(\mathfrak{B}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{B \in \mathfrak{B}}{\exists} B \subset E^*\}.$$

Putem vorbi, așadar, despre operatorul

$$f : \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)),$$

care asociază fiecărei baze de filtru, filtrul corespunzător.

De asemenea, fiind dat un filtru $\mathfrak{F}$, definit asupra lui $E$, prin gratie peste filtrul $\mathfrak{F}$ se înțelege totalitatea părților $E^*$ ale lui $E$ care intersectează fiecare mulțime $F \in \mathfrak{F}$, deci

$$\mathfrak{G} = g(\mathfrak{F}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{F \in \mathfrak{F}}{\forall} F \cap E^* \neq \emptyset\}$$

și $g$ este deci operatorul prin care unui filtru $\mathfrak{F}$ îi corespunde gratia pe care o generează.

Vom considera anumiţi operatori definiţi în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ şi luînd valori în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$. Ne vom limita la următorii doi operatori determinaţi cu ajutorul unei relaţii binare $R$, definite în $\mathfrak{P}(E)$, deci $R \subset \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ *) :

$$R(\mathfrak{L}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} (L, E^*) \in R\},$$

$$R[\mathfrak{L}] = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} (L, E^*) \in R\},$$

unde $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, primul fiind tăietura de speţa întîia iar celălalt tăietura de speţa a doua a relaţiei $R$ (a se vedea de exemplu [1]).

Numeroase proprietăţi ale tăieturilor unei relaţii $S \subset E \times E$, sînt cunoscute din teoria relaţiilor (a se vedea articolul de sinteză [2]). Aici se consideră cazul particular cînd relaţia este definită în $\mathfrak{P}(E)$, ridicîndu-se astfel probleme particulare. Vom dezvolta în mod deosebit proprietăţile tăieturilor, considerate ca operatori, adică corespondenţa dintre $\mathfrak{L}$ şi $R(\mathfrak{L})$, respectiv $R[\mathfrak{L}]$, pentru un $R$ fixat, analizînd în special cazul unor operatori particulari larg utilizaţi în diferite ramuri ale matematicii **).

În prealabil, precizăm anumite noţiuni din calculul mulţimilor. Operaţiile de reuniune, intersecţie, complement sînt bine definite pentru elementele lui $\mathfrak{P}(E)$, $E^* \in \mathfrak{P}(E)$ fiind mulţimi. Cum însă $\mathfrak{L} \ni L \ni l$, în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ se pot introduce două feluri de operaţii, după cum avem în vedere numai prima sau ambele apartenenţe. În primul caz avem operaţiile obişnuite cu mulţimi de părţi; în al doilea, definim operaţiile marcate cu $e$ (de la cuvîntul *element*).

Anume :

$$\mathfrak{L} \cup \mathfrak{L}' = \{L^* \in \mathfrak{P}(E) : L^* \in \mathfrak{L} \vee L^* \in \mathfrak{L}'\},$$

$$\mathfrak{L} \overset{e}{\cup} \mathfrak{L}' = \{L \cup L' \in \mathfrak{P}(E) : L \in \mathfrak{L} \wedge L' \in \mathfrak{L}'\},$$

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{L^* \in \mathfrak{P}(E) : L^* \in \mathfrak{L} \wedge L^* \in \mathfrak{L}'\},$$

$$\mathfrak{L} \overset{e}{\cap} \mathfrak{L}' = \{L \cap L' \in \mathfrak{P}(E) : L \in \mathfrak{L} \wedge L' \in \mathfrak{L}'\},$$

$$\mathbf{C}\mathfrak{L} = \{L^* \in \mathfrak{P}(E) : L^* \notin \mathfrak{L}\},$$

$$\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L} = \{\mathbf{C}L \in \mathfrak{P}(E) : L \in \mathfrak{L}\}.$$

Aceste definiţii se extind imediat pentru familii de mulţimi $\mathfrak{L}$.

---

*) Pentru a ajunge la o astfel de relaţie se poate pleca, de exemplu, de la o relaţie $S \subset E \times E$ (a se vedea [3]).

**) Pentru unitatea expunerii dăm, fără demonstraţie, unele rezultate cunoscute.

De asemenea, pe lîngă incluziunea în sens obișnuit $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}' \Leftrightarrow \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} L \in \mathfrak{L}'$, vom defini

$$\mathfrak{L} \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}' \Leftrightarrow \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} \underset{L' \in \mathfrak{L}'}{\exists} L \subset L',$$

$$\mathfrak{L} \underset{e}{\subset} \mathfrak{L}' \Leftrightarrow \underset{L' \in \mathfrak{L}'}{\forall} \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} L \subset L'.$$

Relațiile $\overset{e}{\subset}$ și $\underset{e}{\subset}$ sînt preordini în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ (adică sînt reflexive și tranzitive), care definesc cîte o relație de echivalență $\underline{\underline{e}}$ și $\overline{\overline{e}}$. Relația de ordonare parțială $\subset$ este mai puțin fină decît $\overset{e}{\subset}$, adică

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}' \Rightarrow \mathfrak{L} \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}'. \tag{1.1}$$

Vom reveni, cu altă ocazie, asupra proprietăților operațiilor și incluziunilor definite; reținem doar proprietăți pe care le vom utiliza și anume:

$$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \Rightarrow \overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}_1 \subset \overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}_2. \tag{1.2}$$

În adevăr, dacă $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2$ atunci $A \in \overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}_1 \Rightarrow \mathbf{C}A \in \mathfrak{L}_1 \Rightarrow \mathbf{C}A \in \mathfrak{L}_2 \Rightarrow A \in \overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}_2$.

$$\mathbf{C}\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L} = \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathfrak{L} \text{ oricare ar fi } \mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)). \tag{1.3}$$

Demonstrație.

$$A \in \mathbf{C}\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L} \Leftrightarrow A \notin \overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L} \Leftrightarrow \mathbf{C}A \notin \mathfrak{L} \Leftrightarrow \mathbf{C}A \in \mathbf{C}\mathfrak{L} \Leftrightarrow A \in \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathfrak{L}.$$

Se verifică cu ușurință și formula

$$\overset{e}{\mathbf{C}}\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \text{ valabilă pentru orice } \mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)). \tag{1.4}$$

## § 2. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE OPERATORILOR $R(\mathfrak{L})$, $R[\mathfrak{L}]$

În paragraful precedent am definit operatorii $R(\mathfrak{L})$ și $R[\mathfrak{L}]$. Vom folosi notația:

$$R^{(n)}(\mathfrak{L}) = R(R^{(n-1)}(\mathfrak{L}))$$

și $R^{(n)}[\mathfrak{L}] = R[R^{(n-1)}[\mathfrak{L}]]$, $R^{(1)}(\mathfrak{L}) = R(\mathfrak{L})$, $R^{(1)}[\mathfrak{L}] = R[\mathfrak{L}]$.

De asemenea, vom adopta notațiile: $\emptyset$ pentru partea vidă a mulțimii $E$ și $\emptyset_{\mathfrak{P}}$ pentru mulțimea vidă de părți ale lui $E$, adică partea vidă a lui $\mathfrak{P}(E)$.

După cum se ştie

$$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \Rightarrow R(\mathfrak{L}_1) \subset R(\mathfrak{L}_2), \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \Rightarrow R[\mathfrak{L}_1] \supset R[\mathfrak{L}_2]. \tag{2.2}$$

Dacă $\mathfrak{L}$ se reduce la o singură parte $L$ a lui $E$, adică $\mathfrak{L} = \{L\}$, avem evident

$$R(\{L\}) = R[\{L\}]. \tag{2.3}$$

Se observă că, pentru $\mathfrak{L} = \emptyset_{\mathfrak{L}}$, $R(\mathfrak{L}) = \emptyset_{\mathfrak{L}}$ şi $R[\mathfrak{L}] = \mathfrak{L}(E)$.
Dacă însă $\mathfrak{L} \neq \emptyset_{\mathfrak{L}}$ atunci

$$R[\mathfrak{L}] \subset R(\mathfrak{L}). \tag{2.4}$$

Pentru unele familii $\mathfrak{L}$ în (2.4) poate avea loc egalitatea. Relativ la aceste familii afirmăm:

$$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \wedge R(\mathfrak{L}_2) = R[\mathfrak{L}_2] \Rightarrow R(\mathfrak{L}_1) = R[\mathfrak{L}_1] \text{ dacă } \mathfrak{L}_1 \neq \emptyset_{\mathfrak{L}}. \tag{2.5}$$

Demonstraţie.
După (2.4) $R[\mathfrak{L}_1] \subset R(\mathfrak{L}_1)$; rămîne de stabilit incluziunea contrară. Avînd în vedere condiţiile din enunţ şi formulele (2.1) şi (2.2) avem

$$R(\mathfrak{L}_1) \subset R(\mathfrak{L}_2) = R[\mathfrak{L}_2] \subset R[\mathfrak{L}_1].$$

În privinţa iteratelor unei mulţimi de părţi $\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$, în raport cu operatorul $R[\ ]$ se cunoaşte următorul rezultat:

$$R = R^{-1} \Leftrightarrow \mathfrak{L} \subset R^{(2)}[\mathfrak{L}] \Rightarrow R^{(2k+1)}[\mathfrak{L}] = R[\mathfrak{L}] \text{ şi } R^{(2n)}[\mathfrak{L}] = R^{(2)}[\mathfrak{L}]. \tag{2.6}$$

Pentru iteratele mixte vom arăta că au loc incluziunile:

$$R[R(\mathfrak{L})] \subset R[R[\mathfrak{L}]] \subset R(R[\mathfrak{L}]) \subset R(R(\mathfrak{L})) \tag{2.7}$$

pentru orice $\mathfrak{L} \neq \emptyset_{\mathfrak{L}}$ şi $R[\mathfrak{L}] \neq \emptyset_{\mathfrak{L}}$.

Demonstraţie.
După (2.4) $R[\mathfrak{L}] \subset R(\mathfrak{L})$ de unde după (2.2)

$$R[R[\mathfrak{L}]] \supset R[R(\mathfrak{L})]. \tag{a}$$

Aplicînd formula (2.4) lui $R[\mathfrak{L}]$ obţinem

$$R[R[\mathfrak{L}]] \subset R(R[\mathfrak{L}]). \tag{b}$$

Avînd în vedere $R[\mathfrak{L}] \subset R(\mathfrak{L})$ şi aplicînd (2.1) avem incluziunea

$$R(R[\mathfrak{L}]) \subset R(R(\mathfrak{L})). \tag{c}$$

Folosind (a), (b), (c) obţinem (2.7).
Mai amintim cazul cînd $R[\mathfrak{L}]$ *degenerează*:

$$R[\mathfrak{L}] = \mathfrak{L}(E) \Leftrightarrow R \supset \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}(E). \tag{2.8}$$

În adevăr, $R[\mathfrak{L}] = \mathfrak{L}(E) \Leftrightarrow \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} \underset{E^* \in \mathfrak{L}(E)}{\forall} (\mathfrak{L}, E^*) \in R \Leftrightarrow \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}(E) \subset R.$

## § 3. OPERATORI PARTICULARI

Introducem în $\mathfrak{P}(E)$ următoarele relații particulare:

$$(A, B) \in R_1 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset, \qquad (A, B) \in R_3 \Leftrightarrow A \subset B,$$
$$(A, B) \in R_2 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset, \qquad (A, B) \in R_4 \Leftrightarrow A \supset B,$$

unde $A$, $B$ sînt submulțimi ale lui $E$.

Corespunzător acestora obținem operatorii $R_i(\ )$ și $R_i[\ ]$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$:

$$R_1(\mathfrak{L}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^* \neq \emptyset\},$$

$$R_1[\mathfrak{L}] = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* \neq \emptyset\},$$

$$R_2(\mathfrak{L}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^* = \emptyset\},$$

$$R_2[\mathfrak{L}] = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* = \emptyset\},$$

$$R_3(\mathfrak{L}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} L \subset E^*\},$$

$$R_3[\mathfrak{L}] = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} L \subset E^*\},$$

$$R_4(\mathfrak{L}) = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\exists} L \supset E^*\},$$

$$R_4[\mathfrak{L}] = \{E^* \in \mathfrak{P}(E) : \underset{L \in \mathfrak{L}}{\forall} L \supset E^*\}.$$

În afara proprietăților generale enumerate în paragraful precedent, au loc pentru operatorii $R_i(\ )$ și $R_i[\ ]$, proprietăți particulare. Insistăm îndeosebi asupra proprietăților operatorilor $R_1(\ )$ și $R_1[\ ]$, deoarece ceilalți operatori pot fi exprimați cu ajutorul primilor doi prin formulele:

$$\begin{aligned}
&a_1)\ R_2(\mathfrak{L}) = \mathbf{C}\, R_1[\mathfrak{L}]; \qquad a_2)\ R_3(\mathfrak{L}) = \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}\, R_1[\mathfrak{L}];\\
&b_1)\ R_2[\mathfrak{L}] = \mathbf{C}\, R_1(\mathfrak{L}); \qquad b_2)\ R_3[\mathfrak{L}] = \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}\, R_1(\mathfrak{L});\\
&a_3)\ R_4(\mathfrak{L}) = \mathbf{C}\, R_1[\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}];\\
&b_3)\ R_4[\mathfrak{L}] = \mathbf{C}\, R_1(\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstraţie.

$a_1)$ $E^* \in R_2(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^* = \emptyset \Leftrightarrow E^* \notin R_1[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}R_1[\mathfrak{L}]$;

$b_1)$ $E^* \in R_2[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* = \emptyset \Leftrightarrow E^* \notin R_1(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}R_1(\mathfrak{L})$;

$a_2)$ $E^* \in R_3(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \subset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \cap \mathbf{C}E^* = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{C}E^* \in R_2(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \mathbf{C}E^* \in \mathbf{C}R_1[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow E^* \in \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}R_1[\mathfrak{L}]$, unde ne-am folosit de cele demonstrate la $a_1)$;

$b_2)$ $E^* \in R_3[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \subset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap \mathbf{C}E^* = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{C}E^* \in R_2[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow \mathbf{C}E^* \in \mathbf{C}R_1(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow E^* \in \overset{e}{\mathbf{C}}\mathbf{C}R_1(\mathfrak{L})$, unde am avut în vedere şi formula $b_1)$;

$a_3)$ folosind din nou egalitatea $a_1)$ obţinem

$$E^* \in R_4(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \supset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} \mathbf{C}L \cap E^* = \emptyset \Leftrightarrow E^* \in R_2(\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}R_1[\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}];$$

$b_3)$ $E^* \in R_4[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \supset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} \mathbf{C}L \cap E^* = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E^* \in R_2[\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L}] \Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}R_1(\overset{e}{\mathbf{C}}\mathfrak{L})$.

Observăm că în cazul relaţiei $R_1$ avem, pentru orice $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, $\emptyset \notin R_1(\mathfrak{L})$ şi dacă $\mathfrak{L} \neq \emptyset_{\mathfrak{P}}$ atunci $\{\emptyset\} \notin R_1[\mathfrak{L}]$. Pe de altă parte, dacă $\emptyset \in \mathfrak{L}$ atunci $R_1[\mathfrak{L}] = \emptyset_{\mathfrak{P}}$.

Pentru operatorii $R_1(\ )$ şi $R_1[\ ]$ dăm mai întîi formule care îi reduc la operatorul clasic $\mathfrak{P}$.

$$R_1(\mathfrak{L}) = \mathbf{C}^{\mathfrak{P}}(\mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} L) \tag{3.2}$$

Demonstraţie.

$$E^* \in R_1(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^* \neq \emptyset \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} \mathbf{C}L \not\supset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\cap} \mathbf{C}L \not\supset E^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} L \not\supset E^* \Leftrightarrow \mathfrak{P}(\mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} L) \ni E^* \Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}^{\mathfrak{P}}(\mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} L);$$

$$R_1[\mathfrak{L}] = \mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} \mathfrak{P}(\mathbf{C}L); \tag{3.3}$$

$$E^* \in R_1[\mathfrak{L}] \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* \neq \emptyset \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} \mathbf{C}L \not\supset E^* \Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} \mathfrak{P}(\mathbf{C}L) \ni E^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} \mathfrak{P}(\mathbf{C}L) \ni E^* \Leftrightarrow E^* \in \mathbf{C}\underset{L\in\mathfrak{L}}{\cup} \mathfrak{P}(\mathbf{C}L).$$

Relativ la structura imaginii unui element $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ avem

$$\left.\begin{aligned} E^* \in R_1(\mathfrak{L}) \wedge E^* \subset E^{**} \Rightarrow E^{**} \in R_1(\mathfrak{L}) \\ E^* \in R_1[\mathfrak{L}] \wedge E^* \subset E^{**} \Rightarrow E^{**} \in R_1[\mathfrak{L}] \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$E^* \in R_1(\mathfrak{L}) \Rightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^* \neq \emptyset$ de aici și din ipoteza $E^* \subset E^{**}$ urmează $\underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L \cap E^{**} \neq \emptyset \Rightarrow E^{**} \in R_1(\mathfrak{L})$. Fie acum $E^* \in R_1[\mathfrak{L}] \Rightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^{**} \neq \emptyset \Rightarrow E^{**} \in R_1[\mathfrak{L}]$.

Deoarece $\underset{L\in\mathfrak{P}(E)-\{\emptyset\}}{\forall} (L, L) \in R_1$ urmează

$$\mathfrak{L} \subset R_1(\mathfrak{L}) \Longleftrightarrow \mathfrak{L} \ni \emptyset. \tag{3.5}$$

Într-adevăr, $\mathfrak{L} \subset R_1(\mathfrak{L}) \Rightarrow \underset{L^*\in\mathfrak{L}}{\forall} \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L^* \cap L \neq \emptyset \Rightarrow \underset{L^*\in\mathfrak{L}}{\forall} L^* \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{L} \ni \emptyset$.
Invers, fie $\emptyset \notin \mathfrak{L} \Rightarrow \underset{L^*\in\mathfrak{L}}{\forall} L^* \cap L^* \neq \emptyset \Rightarrow \underset{L^*\in\mathfrak{L}}{\forall} \underset{L\in\mathfrak{L}}{\exists} L^* \cap L \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{L} \subset R_1(\mathfrak{L})$.

Avem de asemenea:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L} \subset R_1[\mathfrak{L}] \Longleftrightarrow \mathfrak{L} \overset{e}{\cap} \mathfrak{L} \ni \emptyset, \\ &\mathfrak{L} \subset R_1[\mathfrak{L}] \Longleftrightarrow \underset{L^*\in\mathfrak{L}}{\forall} \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L^* \cap L \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathfrak{L} \overset{e}{\cap} \mathfrak{L} \ni \emptyset. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Generalizînd formula (2.1) avem

$$\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2 \Rightarrow R_1(\mathfrak{L}_1) \subset R_1(\mathfrak{L}_2). \tag{3.7}$$

Demonstrație.

Presupunem $\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2$ și fie $E^* \in R_1(\mathfrak{L}_1) \Rightarrow \underset{L_1\in\mathfrak{L}_1}{\exists} L_1 \cap E^* \neq \emptyset$; dar din $\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2$ urmează că $\underset{L_1\in\mathfrak{L}_1}{\forall} \underset{L_2\in\mathfrak{L}_2}{\exists} L_1 \subset L_2$ deci $\underset{L_2\in\mathfrak{L}_2}{\exists} L_2 \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow E^* \in R_1(\mathfrak{L}_2)$.

Precizînd formula (2.2) obținem

$$\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2 \Longleftrightarrow R_1[\mathfrak{L}_1] \subset R_1[\mathfrak{L}_2]. \tag{3.8}$$

Demonstrație.

$\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2 \Longleftrightarrow \underset{L_2\in\mathfrak{L}_2}{\forall} \underset{L_1\in\mathfrak{L}_1}{\in} L_1 \subset L_2$ și fie $E^* \in R_1[\mathfrak{L}_1]$, adică $\underset{L\in\mathfrak{L}_1}{\forall} L \cap E^* \neq \emptyset$.
Atunci $\underset{L_2\in\mathfrak{L}_2}{\forall} L_2 \cap E^* \neq \emptyset$ deci $E^* \in R_1[\mathfrak{L}_2]$.

Am stabilit deci implicația $\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2 \Rightarrow R_1[\mathfrak{L}_1] \subset R_1[\mathfrak{L}_2]$. Presupunem acum $R_1[\mathfrak{L}_1] \subset R_1[\mathfrak{L}_2]$ și ne propunem să arătăm că $\mathfrak{L}_1 \overset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2$, deci că $\underset{L_2\in\mathfrak{L}_2}{\forall} \underset{L_1\in\mathfrak{L}_1}{\exists} L_1 \subset L_2$.

Demonstraţie.

Demonstrăm prin contradicţie: fie $L_2 \in \mathfrak{L}_2$ şi presupunem că $\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\forall} L_1 \not\subset L_2$. Atunci $\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\forall} \underset{p_{L_1} \in E}{\exists} p_{L_1} \in L_1 \wedge p_{L_1} \notin L_2$. Fie $E^* = \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} p_{L_1}$. Pentru acestă mulţime avem $\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\forall} E^* \cap L_1 \neq \emptyset \wedge E^* \cap L_2 = \emptyset$ deci $E^* \in R_1[\mathfrak{L}_1]$ şi $E^* \notin R_1[\mathfrak{L}_2]$ ceea ce contrazice ipoteza.

Pentru o relaţie dată $R$, $R(\mathfrak{L}_1) = R(\mathfrak{L}_2)$ defineşte o relaţie de echivalenţă în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$. În cazul de faţă această relaţie este de următorul tip:

$$R_1(\mathfrak{L}_1) \subset R_1(\mathfrak{L}_2) \Longleftrightarrow \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 \subset \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2. \tag{3.9}$$

Demonstraţie.

Fie $\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 \subset \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2$; atunci $E^* \in R_1(\mathfrak{L}_1) \Rightarrow \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\exists} L_1 \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow (\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1) \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow (\underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2) \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\exists} L_2 \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow E^* \in R_1(\mathfrak{L}_2)$, deci $R_1(\mathfrak{L}_1) \subset R_1(\mathfrak{L}_2)$.

Să arătăm acum că $R_1(\mathfrak{L}_1) \subset R_1(\mathfrak{L}_2) \Rightarrow \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 \subset \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2$. Vom raţiona prin contradicţie:

$$\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 \not\subset \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2 \Rightarrow \underset{e_1 \in \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1}{\exists} e_1 \notin \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2 \Rightarrow \underset{L_1^0 \in \mathfrak{L}_1}{\exists} \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\forall} e_1 \in L_1^0 \wedge e_1 \notin L_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{e_1\} \cap L_1^0 \neq \emptyset \wedge \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\forall} \{e_1\} \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow \{e_1\} \in R_1(\mathfrak{L}_1) \wedge \{e_1\} \notin R_1(\mathfrak{L}_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_1(\mathfrak{L}_1) \not\subset R_1(\mathfrak{L}_2).$$

Din (3.8) şi (3.9) rezultă imediat

$$\left.\begin{aligned} R_1(\mathfrak{L}_1) = R_1(\mathfrak{L}_2) &\Longleftrightarrow \underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 = \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2 \\ R_1[\mathfrak{L}_1] = R_1[\mathfrak{L}_2] &\Longleftrightarrow \mathfrak{L}_1 \underset{e}{=} \mathfrak{L}_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

unde $\mathfrak{L}_1 \underset{e}{=} \mathfrak{L}_2 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2 \wedge \mathfrak{L}_2 \underset{e}{\subset} \mathfrak{L}_1$.

De remarcat că oricare dintre egalităţile (3.10) nu o implică pe cealaltă.

Din (3.10) luînd $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$ şi $\mathfrak{L}_2 = \{\underset{L \in \mathfrak{L}}{\cup} L\}$ urmează, pentru orice $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$:

$$R_1(\mathfrak{L}) = R_1(\{\underset{L \in \mathfrak{L}}{\cup} L\}) \tag{3.11}.$$

deoarece în acest caz $\underset{L_1 \in \mathfrak{L}_1}{\cup} L_1 = \underset{L_2 \in \mathfrak{L}_2}{\cup} L_2$.

Rezultă că în studiul operatorului $R_1(\ )$ ne putem limita la familii $\mathfrak{L}$ *solitare* adică reduse la un singur element.

Relativ la familia complementară dăm formulele:

$$\complement R_1(\mathfrak{L}) \subset R_1[\overset{e}{\complement}\mathfrak{L}] \cup \emptyset; \tag{3.12}$$

$$\complement R_1[\mathfrak{L}] \subset R_1(\overset{e}{\complement}\mathfrak{L}) \cup \emptyset. \tag{3.13}$$

Demonstrație.

$$\emptyset \neq E^* \in \complement R_1(\mathfrak{L}) \Rightarrow E^* \notin R_1(\mathfrak{L}) \Rightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} L \cap E^* = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} \complement L \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow \underset{\complement L\in\complement\mathfrak{L}}{\forall^e} \complement L \cap E^* \neq \emptyset \Rightarrow E^* \in R_1[\overset{e}{\complement}\mathfrak{L}].$$

Formula (3.13) rezultă din (3.12) și din (1.3):

$$\complement R_1(\overset{e}{\complement}\mathfrak{L}) \subset R_1[\mathfrak{L}] \quad \text{deci} \quad \complement R_1[\mathfrak{L}] \subset R_1(\overset{e}{\complement}\mathfrak{L}).$$

Pentru operatorii suprapuși se obțin următoarele rezultate:

$$R_1[R_1[\mathfrak{L}]] = R_3(\mathfrak{L}). \tag{3.14}$$

Fie $E^* \in R_3(\mathfrak{L})$ adică $\underset{L^0\in\mathfrak{L}}{\exists} E^* \supset L^0$ și să alegem un element arbitrar $E^{**}$ din $R_1[\mathfrak{L}]$. Atunci $E^{**} \cap L^0 \neq \emptyset$ deci $E^{**} \cap E^* \neq \emptyset$ adică $E^* \in R_1[R_1[\mathfrak{L}]]$.

Pe de altă parte, dacă $E^* \notin R_3(\mathfrak{L})$ atunci $\underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} E^* \not\supset L$, adică $\underset{L\in\mathfrak{L}}{\forall} \underset{e_L\in L}{\exists} e_L \notin E^*$. Mulțimea $E^{**}$ formată din elementele $(e_L)_{L\in\mathfrak{L}}$ aparține lui $R_1[\mathfrak{L}]$, dar $E^* \cap E^{**} = \emptyset$ deci $E^* \notin R_1[R_1[\mathfrak{L}]]$,

$$R_1[R_1(\mathfrak{L})] = R_3(\{L_0\}), \tag{3.15}$$

unde $L_0 = \bigcup_{L\in\mathfrak{L}} L$.

Într-adevăr, după (3.11) și (2.3) $R_1(\mathfrak{L}) = R_1(\{L_0\}) = R_1[\{L_0\}]$ de unde, aplicînd (3.14) obținem formula din enunț.

Dacă $\mathfrak{L} \ni \emptyset$ atunci

$$R_1(R_1[\mathfrak{L}]) = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}. \tag{3.16}$$

Incluziunea $R_1(R_1[\mathfrak{L}]) \subset \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ este imediată, avînd în vedere că operatorul $R_1(\ )$ ia valori în $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ și nu poate conține pe $\emptyset$, cum s-a observat mai sus.

Pe de altă parte, pentru orice $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ pentru care $\emptyset \notin \mathfrak{L}$ avem $E \in R_1[\mathfrak{L}]$, deci $E^* \in R_1(R_1[\mathfrak{L}])$ pentru orice $E^* \in \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ căci $E \cap E^* = E^*$.

Dacă $\mathfrak{L}$ conține cel puțin un element diferit de $\emptyset$, atunci

$$R_1(R_1(\mathfrak{L})) = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}. \tag{3.17}$$

Într-adevăr, după (3.11) și (2.3)

$$R_1(\mathfrak{L}) = R_1(\{L_0\}) = R_1[\{L_0\}],$$

avînd în vedere că $L_0 \neq \emptyset$ și aplicînd (3.16) rezultă formula din enunț.

Pentru cazurile extreme avem următoarele relații:

$$R_1(\mathfrak{L}) = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\} \Longleftrightarrow \bigcup_{L\in\mathfrak{L}} L = E. \tag{3.18}$$

Demonstraţie.

Presupunem $R_1(\mathfrak{L}) = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ şi să arătăm că $L_0 = \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} L = E$; $L_0 \subset E$ (ca reuniune a unei familii de părţi ale lui $E$); rămîne de stabilit incluziunea contrară. Pentru aceasta, fie $e \in E$ deci $\{e\} \in \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$. Conform ipotezei $\exists_{L \in \mathfrak{L}} L \cap \{e\} \neq \emptyset$. Atunci însă $L_0 \cap \{e\} \neq \emptyset$ de unde urmează $e \in L_0$ deci $E \subset L_0$.

Reciproc, fie $L_0 = E$. Cum $R_1(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ rămîne de stabilit incluziunea contrară:

$$E^* \in \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\} \Rightarrow \emptyset \neq E^* \subset E = L_0 \Rightarrow E^* \cap L_0 \neq \emptyset \Rightarrow E^* \in R_1(\mathfrak{L})$$

avînd în vedere relaţia (3.11)

$$R_1[\mathfrak{L}] = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\} \Longleftrightarrow \mathfrak{L} = \{E\}. \tag{3.19}$$

Fie $\mathfrak{L} = \{E\}$. Atunci, pe de o parte, $R_1[\mathfrak{L}] \subset \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ şi pe de altă parte $E^* \in \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\} \Rightarrow E^* \cap E \neq \emptyset \Rightarrow E^* \in R_1[\{E\}] \Rightarrow$ $\Rightarrow E^* \in R_1[\mathfrak{L}]$. Deci $R_1[\mathfrak{L}] = \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$. Dacă în schimb $\mathfrak{L} \neq \{E\}$, adică $E \neq E^* \in \mathfrak{L}$, atunci $\complement E^* \in \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$ şi $\complement E^* \notin R_1[\mathfrak{L}]$, deci $R_1[\mathfrak{L}] \neq \mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$.

$$R_1[\mathfrak{L}] = \{E\} \Longleftrightarrow \mathfrak{S} \subset \mathfrak{L} \wedge \emptyset \notin \mathfrak{L}, \tag{3.20}$$

unde $\mathfrak{S}$ este totalitatea părţilor din $E$ formate dintr-un singur element.

Într-adevăr, dacă $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ atunci nici o parte proprie $E^*$ a lui $E$ nu aparţine lui $R_1[\mathfrak{L}]$, căci dacă $e \in \complement E^*$ atunci $\{e\} \cap E^* = \emptyset$ şi $\{e\} \in \mathfrak{L}$. $\emptyset \notin \mathfrak{L}$ implică $\{E\} = R_1[\mathfrak{L}]$.

Invers, $R_1[\mathfrak{L}] = \{E\}$ este incompatibil cu $\emptyset \in \mathfrak{L}$ şi, oricare ar fi $e \in E$, $E - \{e\} \notin R_1[\mathfrak{L}]$ implică $\exists_{L \in \mathfrak{L}} L \cap (E - \{e\}) = \emptyset$, deci $\{e\} \in \mathfrak{L}$, adică $R_1[\mathfrak{L}] = \{E\}$ implică $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$.

În sfîrşit,

$$R_1(\mathfrak{L}) = \{E\} \text{ este imposibil.} \tag{3.21}$$

Într-adevăr, $E \in R_1(\mathfrak{L})$ implică $\exists_{L \in \mathfrak{L}} L \cap E \neq \emptyset$. Atunci $L$ şi orice parte nevidă din $L$ face parte din $R_1(\mathfrak{L})$ şi $R_1(\mathfrak{L}) \neq \{E\}$.

## §. 4. APLICAŢII

Dăm acum cîteva aplicaţii ale celor expuse.

Operaţiile şi incluziunile $e$ sînt mult utilizate în matematică, în special în studii mai recente de algebră şi topologie (a se vedea [4], [5]).

De exemplu, axiomele filtrului:

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & F_1 \in \mathfrak{F} \wedge F_2 \supset F_1 \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}, \\ \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} & F_1 \in \mathfrak{F} \wedge F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}, \\ \mathfrak{F}_{\mathrm{III}} & \emptyset \in \mathfrak{F},\ \mathfrak{F} \neq \emptyset_{\mathfrak{L}} \end{cases}$$

și cele ale bazei de filtru

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_{\mathrm{I}} & B_1 \in \mathfrak{B} \wedge B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \underset{B_3 \in \mathfrak{B}}{\exists} B_3 \subset B_1 \cap B_2, \\ \mathfrak{B}_{\mathrm{II}} & \emptyset \notin \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \neq \emptyset_{\mathfrak{L}}, \end{cases}$$

se scriu mai precis cu aceste notații și anume:

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{F} \overset{e}{\cup} \mathfrak{L}(E) = \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{B}_{\mathrm{I}} \qquad \mathfrak{B} \underset{e}{\subset} \mathfrak{B} \overset{e}{\cap} \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{F} \supset \mathfrak{F} \overset{e}{\cap} \mathfrak{F}. \end{cases}$$

Incluziunile $\underset{e}{\subset}$ și $\overset{e}{\subset}$ sînt strîns legate de operatorul $R_3(\mathfrak{L})$. Într-adevăr, se verifică ușor că $\mathfrak{L} \overset{e}{\subset} R_3(\mathfrak{L})$ și $\mathfrak{L} = R_3(\mathfrak{L})$, iar pentru orice $\mathfrak{L}^* \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))$, pentru care are loc $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}^*$, avem $\mathfrak{L}^* \underset{e}{\subset} R_3(\mathfrak{L})$. Vom numi pe $R_3(\mathfrak{L})$ *e-majoranta* lui $\mathfrak{L}$. $R_1[\overset{e}{\mathfrak{L}}]$ se numește *gratia* definită peste $\mathfrak{L}$. Dacă $\mathfrak{B}$ este o bază de filtru, atunci *e*-majoranta lui $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{F} = R_3(\mathfrak{B})$ este filtrul generat de această bază.

Teoreme fundamentale din topologie și teoria filtrelor și gratiilor sînt consecințe imediate ale proprietăților operatorilor introduși.

De exemplu, prin definiție, două baze de filtru $\mathfrak{B}_1$ și $\mathfrak{B}_2$ sînt echivalente atunci și numai atunci cînd

$$R_3(\mathfrak{B}_1) = R_3(\mathfrak{B}_2).$$

Utilizînd formula (3.1 $a_2$) și teorema (3.10) obținem o condiție necesară și suficientă: $\overset{e}{\mathbf{CC}} R_1[\mathfrak{B}_1] = \overset{e}{\mathbf{CC}} R_1[\mathfrak{B}_2]$ care este echivalentă cu $R_1[\mathfrak{B}_1] = R_1[\mathfrak{B}_2]$ și mai departe echivalent cu $\mathfrak{B}_1 \underset{e}{=} \mathfrak{B}_2$, regăsind astfel teorema binecunoscută din teoria filtrelor.

La fel cazul gratiilor: gratiile peste bazele de filtru $\mathfrak{B}_1$ și $\mathfrak{B}_2$ sînt echivalente atunci și numai atunci cînd $\mathfrak{B}_1 \underset{e}{=} \mathfrak{B}_2$.

În tolopogie, o topologie $\mathfrak{T}_2$ se zice mai fină decît alta $\mathfrak{T}_1$, dacă și numai dacă pentru orice $x$ avem

$$R_3(\mathfrak{V}_1(x)) \underset{e}{\subset} R_3(\mathfrak{V}_2(x)),$$

unde $\mathfrak{V}_1(x)$ și $\mathfrak{V}_2(x)$ sînt sisteme fundamentale de vecinătăți ale lui $x$ în tolologia $\mathfrak{T}_1$, respectiv $\mathfrak{T}_2$.

Folosind proprietăţile operatorilor introduşi se poate stabili cu uşurinţă

$$R_3(\mathcal{P}_1(x)) \subset R_3(\mathcal{P}_2(x)) \iff \mathcal{P}_2(x) \underset{e}{\subset} \mathcal{P}_1(x)$$

rezultat cunoscut din topologie.

Într-adevăr, presupunînd $R_3(\mathcal{P}_1(x)) \subset R_3(\mathcal{P}_2(x))$ din (3.1 $a_2$) rezultă $\overset{e}{C}\overset{e}{C} R_1[\mathcal{P}_1(x)] \subset \overset{e}{C}\overset{e}{C} R_1[\mathcal{P}_2(x)]$, din (1.2) urmează $C R_1[\mathcal{P}_1(x)] \subset C R_1[\mathcal{P}_2(x)]$ care implică $R_1[\mathcal{P}_1(x)] \supset R_1[\mathcal{P}_2(x)]$ şi aplicînd (3.8) obţinem $\mathcal{P}_2(x) \underset{e}{\subset} \mathcal{P}_1(x)$. Raţionamentul se poate inversa.

Demonstraţiile noastre arată totodată că aceste criterii se aplică nu numai la baze de filtru, ci şi unei mulţimi arbitrare de părţi:

$$R_3(\mathfrak{L}_1) \supset R_3(\mathfrak{L}_2) \iff R_1[\mathfrak{L}_1] \subset R_1[\mathfrak{L}_2] \iff \mathfrak{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2,$$

adică putem enunţa următoarea teoremă: $\mathfrak{L}_1$ şi $\mathfrak{L}_2$ fiind două mulţimi de părţi ale lui $E$, condiţia $\mathfrak{L}_1 \underset{e}{\subset} \mathfrak{L}_2$ (adică pentru orice mulţime conţinută în $\mathfrak{L}_2$ să existe o submulţime conţinută în $\mathfrak{L}_1$) este necesară şi suficientă pentru ca: a) $e$-majorantele lui $\mathfrak{L}_1$ şi $\mathfrak{L}_2$ să coincidă; b) gratiile definite peste $\mathfrak{L}_1$ şi $\mathfrak{L}_2$ să coincidă.

În mod analog se pot interpreta şi alte teoreme din § 3. De exemplu, $e$-majoranta unei gratii este mulţimea $R_3(R_1[(\mathfrak{L}])$. Cum însă $E^* \in R_1[\mathfrak{L}]$ şi $E^{**} \supset E^*$ implică $E^{**} \in R_1[\mathfrak{L}]$ (a se vedea (3.4)) mulţimea astfel obţinută coincide cu gratia însăşi.

Gratia $e$-majorantei lui $\mathfrak{L}$: $R_1[R_3(\mathfrak{L})]$ coincide cu gratia peste $\mathfrak{L}$, avînd în vedere că $\mathfrak{L} \underset{e}{=} R_3(\mathfrak{L})$. Deci operatorii gratie şi $e$-majoranta sînt permutabili între ei.

Din (3.14) rezultă că gratia peste gratia lui $\mathfrak{L}$ este $e$-majoranta lui $\mathfrak{L}$.

Primită la redacţie la 5 septembrie 1961

## ОПЕРАТОРЫ В МНОЖЕСТВАХ ПОДМНОЖЕСТВ

### РЕЗЮМЕ

Обобщая переход от базиса фильтра к обобщенному фильтру, порожденному им, соответственно переход от фильтра к решетке, определенной им, в заметке изучается важный класс операторов, которые ставят в соответствие множеству подмножеств множества $E$ другое множество подмножеств $E$; это операторы, которые определяются сечениями первого и второго рода соотношения $R \subset \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$. Даются некоторые новые свойства этих операторов, особенно относительно их итерированных. В частности, устанавливаются свойства операторов, определяемых соотношениями $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \subset B$,

соответственно $A \supset B$, первый из которых представляет собой обобщение оператора „решетка", третий — обобщение перехода от базиса фильтра к фильтру (переход к $e$-мажоранте). Устанавливаются связи между этими операторами: формулы (3.1) дают переход от одного к другому.

Даются также ряд свойств этих операторов и непосредственные применения к топологии и теории фильтров. Показывается, например, что произведение $e$-мажоранты на оператор „решетка" перестановочно и равняется оператору „решетка". Квадрат оператора „решетка" дает оператор $e$-мажоранты, последний будучи идемпотентен.

## OPÉRATEURS DANS DES ENSEMBLES DE PARTIES


### RÉSUMÉ

Généralisant le passage d'une base de filtre au filtre généralisé par celle-ci, respectivement le passage d'un filtre à la grille engendrée par celui-ci, les auteurs étudient un important type d'opérateurs, qui associent à un ensemble de parties de l'ensemble $E$, un autre ensemble de parties de $E$, à savoir l'opérateur défini par la coupure des première et seconde espèces d'une relation $R \subset \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$. Les auteurs indiquent quelques nouvelles propriétés de ces opérateurs, plus particulièrement en ce qui concerne les itérées. Ils développent plus spécialement les propriétés de certains opérateurs particuliers, définis par les relations $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \subset B$ respectivement $A \supset B$, la première donnant une généralisation de l'opérateur «grille», la troisième celle du passage d'une base de filtre au filtre, passage dit à l'$e$-majorante. Ils établissent les rapports entre ces opérateurs et ils indiquent les formules de passage de l'un à l'autre (3.1) ainsi qu'une série de propriétés de ces opérateurs.

Ils présentent quelques applications immédiates à la topologie et à la théorie des filtres. Ils montrent, par exemple, que le produit de l'$e$-majorante par l'opérateur-grille est permutable et égal à l'opérateur grille. Le carré de l'opérateur-grille donne l'opérateur d'$e$-majorante, ce dernier étant idempotent.


### BIBLIOGRAFIE


1. P. Dubreil, *Algèbre.* I, Paris, 1954.
2. T. Riguet, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois.* Bull. Soc. Math. de France, **LXXVI**, 1—4 (1948).
3. M. Balázs, D. Borșan, M. Froda-Schechter, P. Hamburg, *Relations entre parties d'ensemble.* Rev. Math. pures et appl., **VII**, 2 (1962).
4. C. Berge, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* Paris, 1959.
5. Á. Császár, *Fondements de la topologie générale.* Budapest, 1960.

# CURBE ITERATE

DE

NICOLAE O. ZAHARIA

Familia iteratelor naturale ale unei funcții $f$ a fost considerată de J. Wolff [4], [5], A. Denjoy [1], G. Valiron [3], M. Heins [2] și alții, care au presupus că $f$ este o funcție analitică de o variabilă complexă, definită și cu valori într-un semiplan. O teoremă a lui Wolff și Denjoy arată că în acest caz, *dacă șirul iteratelor este convergent* și dacă $f$ nu este o funcție omografică, limita șirului este o constantă $C$. Convergența se consideră în sensul că pentru fiecare $z$ din semiplanul considerat, șirul numeric $f(z), f[f(z)], \ldots$ tinde către $C$.

În prezenta lucrare studiem familia de curbe $y = f_i(x)$ ce se obține pornind de la o curbă $y = f(x)$ și considerînd iteratele sale unitare (sau naturale) : $y = f[f(x)], \ldots$ și iteratele de tip mai general : $y = f\{\mu[f(x)]\}, \ldots$

Datorită unei interpretări geometrice simple a operației de iterare, printr-o reflexie dreptunghică față de directoarea iterației, arătăm că în vecinătatea fiecărei soluții a sistemului : $y = x$, $f(x) = x$, pentru iteratele naturale, și a sistemului : $y = \tau(x)$, $f(x) = \tau(x)$, pentru iteratele cu directoarea curbă, șirul curbelor iterate $y = f_i(x)$ este infinit și tinde către o paralelă la axele de coordonate, limita considerîndu-se după direcția celeilalte axe. Această proprietate conduce la un rezultat global, care arată că șirul iteratelor tinde către o linie poligonală, formată din laturi paralele cu axele de coordonate.

## I. ITERATE UNITARE (NATURALE)

**1.** Definiție. *Fiind dată funcția primitivă, continuă pe intervalul* $[a, b]$, $y = f(x)$, *se numește iterată unitară* (*naturală*) *de ordinul întîi funcția*

$$f_1(x) = f[f(x)]$$

*și iterată unitară de ordinul i, funcția*

$$f_i(x) = f[f_{i-1}(x)].$$

*Dacă* $y = f(x)$ *este ecuația unei curbe* $f$, *ecuația*

$$y = f_1(x)$$

*reprezintă curba iterată de ordinul întîi* $f_1$, *iar* $y = f_i(x)$ *este ecuația curbei iterate de ordinul* $i$.

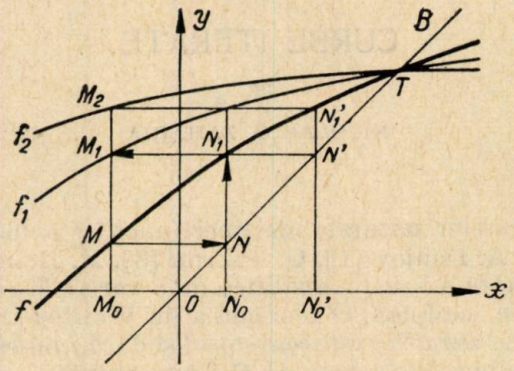



Fig. 1

Unui punct $M$, de abscisă $x_0$, de pe curba primitivă $f$, îi corespunde punctul $M_1$ de pe curba iterată $f_1$, situat pe aceeași ordonată $M_0M$ (fig. 1). Ordonata punctului $M_1$ este, conform definiției,

$$y_1^0 = f[f(x_0)] = f(M_0M).$$

Se ia $ON_0 = M_0M$. Rezultă că ordonata punctului $M_1$ este $M_0M_1 = f(ON_0) = N_0N_1$.

Întrucît $ON_0 = N_0N$, punctul $N$ se găsește pe prima bisectoare a axelor de coordonate $OB$. Deci : *Punctul* $M_1$ *de pe iterata* $f_1$ *se obține din punctul* $M$ *de pe curba primitivă* $f$ *printr-o reflexie dreptunghică* : $MN \parallel Ox$, $NN_1 \parallel Oy$, $N_1M_1 \parallel Ox$.

Pornind de la $M_1$, de pe iterata de ordinul întîi $f_1$, prin reflexia dreptunghică în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate : $M_1N' \parallel Ox$, $N'N_1' \parallel Oy$, $N_1'M_2 \parallel Ox$, se obține punctul $M_2$ de pe iterata de ordinul al doilea $f_2$ etc.

*Prima bisectoare a axelor de coordonate se numește directoarea iterației naturale.*

*Exemple. a*) Dacă curba primitivă $f$ este o dreaptă $y = ax + b$, iteratele unitare succesive sînt de asemenea drepte.

*b*) Dacă curba pimitivă este o elipsă cu centrul în origine, iteratele de ordin impar sînt arce de hiperbole iar cele de ordin par sînt arce de elipse.

**2.** *a*) Dacă funcția primitivă este definită pe intervalul [a, *b*], iterata de ordinul întîi există numai pentru acele valori $x_i \in [a, b]$ pentru care

$$f(x_i) \in [a, b].$$

*b*) Orice valoare reală a iteratei de ordinul întîi $f_1(x_i) = f[f(x_i)]$ trebuie să se găsească printre valorile pe care le poate lua funcția primitivă $f(x)$, adică trebuie să existe un $x_j \in [a, b]$ pentru care să avem

$$f[f(x_i)] = f(x_j).$$

În general trebuie să avem

$$f_n(x_i) = f(x_j).$$

Deci, valorile pe care le pot lua iteratele succesive sînt cel mult egale cu cea mai mare valoare a primitivei și nu mai mici decît cea mai mică valoare a ei.

*c*) Conform definiției avem

$$f_n = \underbrace{f[f(\ldots f}_{n-k}(f_k)\ldots)],$$

unde $n$-$k$ arată că simbolul $f$ se repetă de $n$-$k$ ori. Deci :

$$f_n = f_{n-k-1}(f_k)$$

și punînd : $n-k-1 = \alpha$, $k = \beta$, deci $n = \alpha + \beta + 1$, obținem relația

$$f_\alpha(f_\beta) = f_{\alpha+\beta+1},$$

care, împreună cu $f_1 = f(f)$, definește șirul iteratelor naturale.

**3.** Se observă ușor că, dacă curba primitivă $y = f(x)$ are un punct $T(x_t, x_t)$ de intersecție cu prima bisectoare a axelor de coordonate (direc-toarea iterației), ea are o infinitate de iterate succesive. Această situație se prezintă deci atunci cînd ecuația $f(x) = x$ are cel puțin o rădăcină reală Punctul $T$ se numește *punct fix* al curbei primitive.

Toate iteratele succesive $f_i$ ale curbei $f$ trec prin punctele fixe ale primitivei, deoarece avem : $f(x_t) = x_t$ ; $f_1(x_t) = f[f(x_t)] = f(x_t) = x_t$ etc.

**4.** D e f i n i ț i e. *Fiind dat un șir infinit de curbe* $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ *și o curbă* $L$, *curba* $L$ *se numește limita șirului de curbe* $C_n$ (*cînd* $n \to \infty$), *dacă există o direcție* $\Delta$ *ale cărei puncte de intersecție cu curbele* $C_i$ *formează pe dreapta* $\Delta$ *un șir infinit de puncte a căror limită este punctul* $P$ *de intersecție a curbei* $L$ *cu dreapta* $\Delta$ ; *aceasta poate avea loc pentru toată curba* $L$, *sau pentru toate punctele unei porțiuni finite de arc al curbei* $L$, *pentru orice dreaptă* $\Delta_i$, *paralelă cu* $\Delta$, *care intersectează pe* $L$ *în interiorul acestui arc* (*fig. 2*).

În general, limita unui șir de curbe $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, cînd aceasta există, va fi un contur, închis sau deschis, format dintr-un număr finit de arce ale unor curbe $L_1, L_2, L_3, \ldots$ corespunzătoare fasciculelor de drepte paralele respectiv cu direcțiile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ (fig. 3).

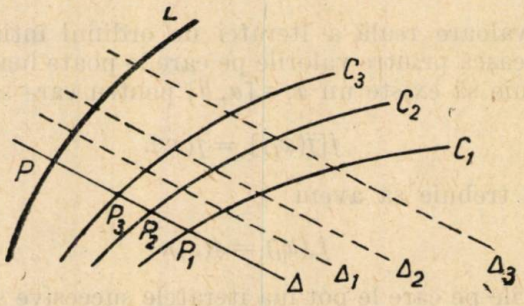



Fig. 2

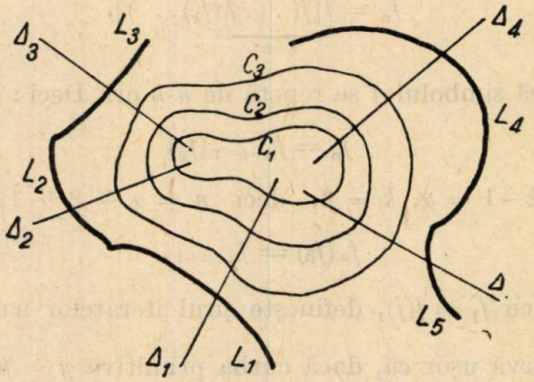



Fig. 3

**5.** TEOREMA 1. *Fiind dată o curbă primitivă $f$, de ecuație $y = f(x)$ (funcția $f(x)$ fiind continuă și derivabilă în intervalul de existență), care are puncte fixe, șirul infinit al iteratelor succesive $y = f_n(x)$, cînd $n \to \infty$, tinde către o limită, care este un contur poligonal format din drepte, semidrepte sau segmente de drepte paralele cu axele de coordonate.*

*a*) Fie $y = f(x)$ ecuația curbei primitive, $x_t$ o rădăcină reală a ecuației $f(x) = x$ și $T(x_t, x_t)$ punctul fix corespunzător. Dacă

$$0 < f'(x_t) < 1,$$

poziția curbei primitive $f$, în vecinătatea punctului fix $T$ este cea din figura 4 (sau fig. 5), $T'T''$ fiind tangenta în punctul fix $T$.

Un punct $M(x_0, y_0)$ de pe curba primitivă $(f)$ se transformă, prin operații succesive de iterație (reflexii dreptunghice față de directoarea $OB$), în punctele $M_1$, $M_2$, $M_3$, ..., respectiv de pe curbele iterate de ordinul întîi $(f_1)$, doi $(f_2)$, trei $(f_3)$ etc.; mulțimea punctelor $M_i$ este infinită.

Ordonatele punctelor $M_i$ cresc o dată cu indicele și nu există nici un punct $M_j$ care să aibă ordonata mai mare decît ordonata $x_t$ a punctului fix $T$. Șirul ordonatelor punctelor $M_i$ fiind un șir crescător și mărginit superior, este convergent și are ca limită pe $x_t$. Deci, mulțimea infinită a

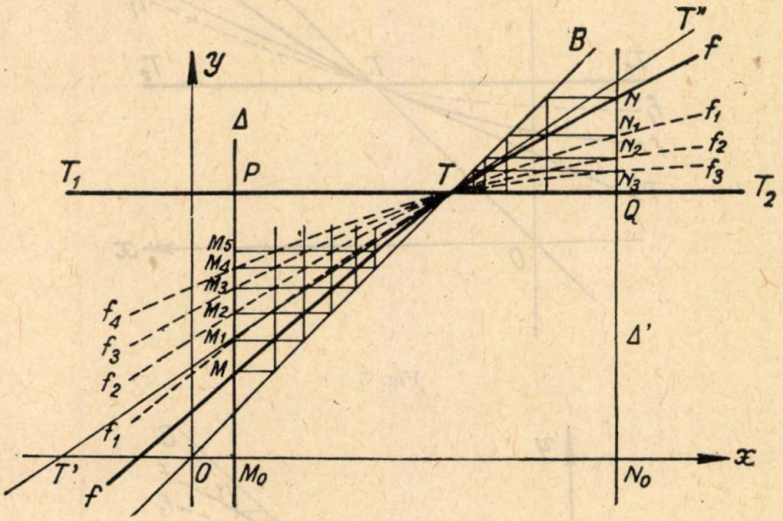



Fig. 4

punctelor $M_i$ tinde către punctul limită $P$, de pe dreapta $\Delta$. Orice alt punct $M'$ de pe curba primitivă generează o mulțime de puncte $M'_i$, pe iteratele succesive, care tind către un punct limită $P'$ a cărei ordonată este $x_t$.

Deci: curbele iterate $f_n$ tind, pentru punctele cu abscisa $x < x_t$, cînd $n \to \infty$, către semidreapta $T_1T$, de ecuație $y = x_t$.

Se vede ușor că se obține același rezultat pentru toate punctele $N$, de pe curba primitivă, cu abscisa $x > x_t$, întrucît ordonatele punctelor corespunzătoare $N_1$, $N_2$, $N_3$, ... de pe iteratele succesive, formează un șir descrescător și mărginit inferior de ordonata punctului fix, $x_t$.

În concluzie, limita șirului infinit al curbelor iterate $f_n$ tinde, în vecinătatea punctului fix $T$, către dreapta paralelă cu axa $Ox$

$$y = x_t.$$

În cazul cînd concavitatea curbei primitive $f$, în vecinătatea punctului $T$, este întoarsă spre $y$-ii pozitivi (fig. 5, în care s-a trasat numai iterata de ordinul întîi $f_1$) se vede ușor, prin repetarea întocmai a raționamen-

telor de mai sus, că şirul infinit al curbelor iterate tinde de asemenea către dreapta $y = x_i$.

*b*) Dacă

$$f'(x_i) = 1,$$

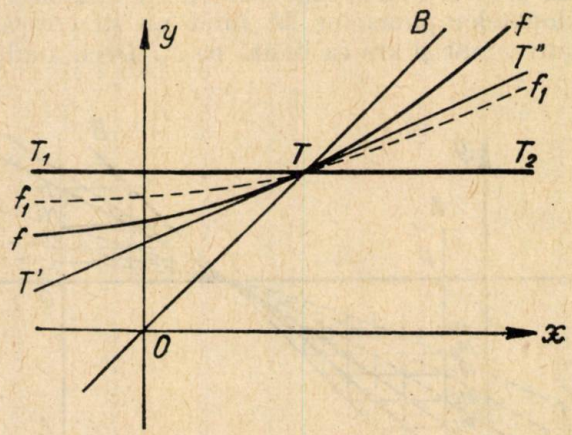



Fig. 5

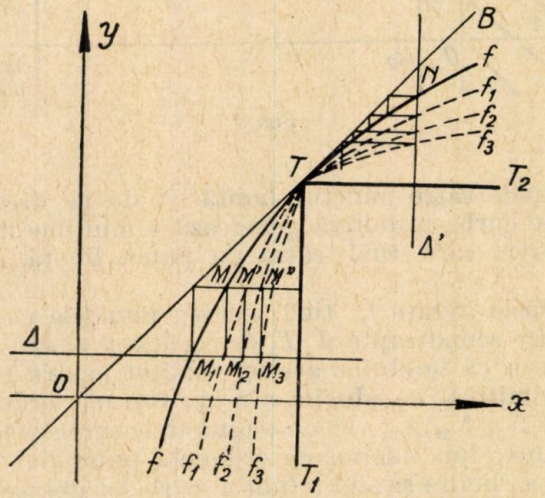



Fig. 6

tangenta la curba primitivă în punctul fix $T$ este însăşi *directoarea* iteraţiei (prima bisectoare a axelor de coordonate). În poziţia din figura 6, punctele $N$ de pe arcul de curbă, cu abscisele $x > x_i$, generează, ca şi în cazul anterior, şirul iteratelor care tind la limită către dreapta $y = x_i$ (porţiunea $x \geqslant x_i$).

Fie $M$ un punct de pe curba primitivă, cu abscisa $x < x_t$. Prin iterare, $M$ generează punctul $M_1$, de pe iterata de ordinul întîi $f_1$. Fie $M'$ punctul de pe iterata $f_1$ care are aceeaşi ordonată ca punctul $M$. Prin iterare (reflexie dreptunghică), punctul $M'$ generează punctul $M_2$ de pe iterata de ordinul doi $f_2$, punctele $M_1$ şi $M_2$ avînd aceeaşi ordonată. La fel, un punct $M''$ de pe iterata de ordinul al doilea $f_2$, va da naştere unui punct $M_3$, de pe iterata de ordinul al treilea $f_3$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ fiind situate pe aceeaşi paralelă la axa $Ox$, dreapta $\Delta$. Punctele $M_i$ formează pe dreapta $\Delta$ un şir infinit

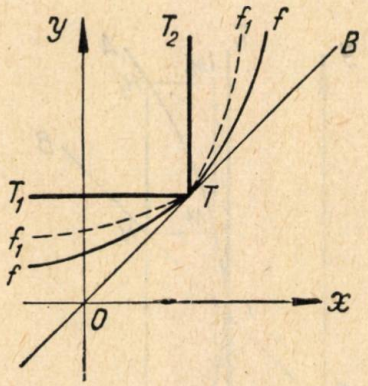



Fig. 7

de puncte ale căror abscise sînt termenii unui şir crescător şi mărginit superior de abscisa $x_t$ a punctului fix $T$. Deci, limita şirului infinit de curbe iterate, pentru $x \leqslant x_t$, în vecinătatea punctului $T$, este dreapta $x = x_t$ (porţiunea pentru care $y \leqslant x_t$).

În concluzie, iteratele succesive ale curbei $f$, au drept curbă limită conturul format de laturile unghiului drept $T_1TT_2$, cu vîrful în punctul fix $T$.

În cazul cînd curba primitivă $f$ are, în vecinătatea punctului de tangenţă $T$, concavitatea întoarsă spre $y$-ii pozitivi (fig. 7), limita şirului iteratelor este conturul format din laturile unghiului drept $T_1TT_2$.

*c*) Dacă

$$f'(x_t) = \pm\infty,$$

tangenta în punctul fix $T$ la curba primitivă este paralelă cu axa $Oy$ (fig. 8). Observăm de la început că nici un punct de pe porţiunea $TB$ nu are iterată, deci curba $f$ se itereză numai prin punctele de pe porţiunea de arc $TA$.

Un punct $M$ de pe arcul $TA$ determină punctul $M_1$ de pe iterata de ordinul întîi $f_1$, prin reflexia dreptunghică : $MN \parallel Ox$, $NN_1 \parallel Oy$ şi $N_1M_1 \parallel Ox$. Dar punctul $M$ determină şi un alt doilea punct $M'_1$, aparţinînd tot iteratei de ordinul întîi, $f_1$, prin reflexia dreptunghică : $MN \parallel Ox$, $NN' \parallel Oy$, $N'M'_1 \parallel Ox$.

Limita curbelor iterate $f_n$, cînd $n \to \infty$, va fi deci, în acest caz, în vecinătatea punctului fix $T$, dreapta paralelă la axa $Oy$ : $x = x_t$.

Acelaşi rezultat se obţine dacă concavitatea curbei primitive este îndreptată spre $x$-ii negativi, în acest caz porţiunea care generează iteratele succesive fiind cea de sub bisectoarea axelor.

*d*) Dacă

$$f'(x_t) < 0,$$

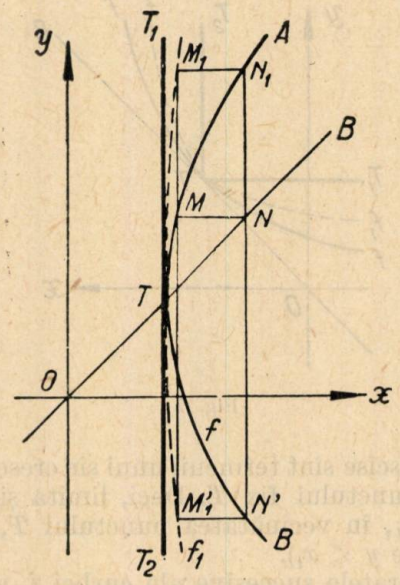



Fig. 8

curba primitivă $f$ are poziţia din figura 9, cu tangenta $T'T''$ în punctul fix $T$.

Unui punct $M(x, y)$ de pe curba primitivă îi corespunde punctul $M_1$ de pe prima iterată $f_1$, prin reflexia dreptunghică : $MN \| Ox$, $NN_1 \| Oy$ şi $N_1M_1 \| Ox$. Punctul $M_1$ este de cealaltă parte a dreptei $T_1T_2$ (de ecuaţie $y = x_t$). Punctul $M_1$ la rîndul său dă naştere punctului $M_2$, de pe iterata de ordinul al doilea, prin reflexia : $M_1N_1' \| Ox$, $N_1'N_1'' \| Oy$, $N_1''M_2 \| Ox$, punctul $M_2$ găsindu-se de aceeaşi parte a dreptei $T_1T_2$ ca şi $M$. Punctul $M_2$ dă naştere punctului $M_3$, de pe iterata de ordinul al treilea, prin reflexia : $M_2N_2 \| Ox$, $N_2N_2' \| Oy$, $N_2'M_3 \| Ox$ şi care se găseşte de aceeaşi parte a dreptei $T_1T_2$ ca şi punctul $M_1$ de pe prima iterată. Punctele $M_i$ sînt deci dispuse de o parte şi de alta a dreptei $y = x_t$, aşa fel încît ordonatele punctelor $M_{2i+1}$ de pe iteratele de ordin impar sînt crescătoare şi mărginite superior de $x_t$, iar ordonatele punctelor $M_{2i}$, de pe curbele iterate de ordin par, sînt descrescătoare şi mărginite inferior de aceeaşi ordonată.

Același lucru se întîmplă cu iteratele porțiunii $TA'$ a curbei $f$.

În concluzie, șirul iteratelor succesive tinde către dreapta $T_1TT_2$ de ecuație $y = x_t$.

Același rezultat se obține cînd curba $f$ este cu concavitatea îndreptată spre $y$-ii negativi.

*e*) Dacă

$$f'(x_t) = 0,$$

tangenta în punctul fix $T$ este paralelă cu axa $Ox$ (fig. 10).

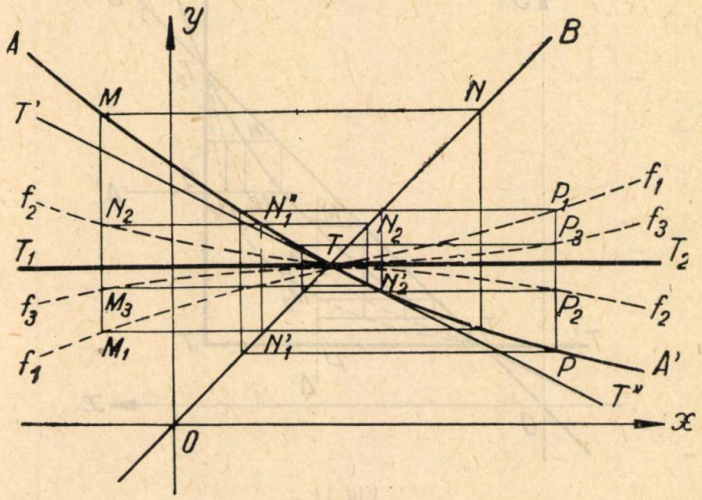



Fig. 9

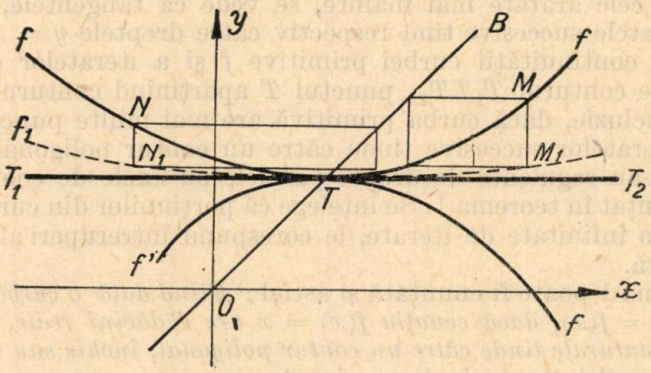



Fig. 10

Se vede ușor că iteratele succesive se apropie și tind, cînd $n \to \infty$, către dreapta $T_1TT_2$, paralelă cu axa $Ox$. Tot către dreapta $y = x_t$ tinde și șirul iteratelor curbei $f'$, cu tangenta în punctul fix paralelă cu axa $Ox$, dar cu concavitatea întoarsă spre $y$-ii negativi.

*f*) Din cele de mai sus rezultă că, în general, în vecinătatea unui punct fix al curbei primitive, șirul iteratelor unitare $(f_n)$ tinde, cînd $n \to \infty$, către

o dreaptă paralelă cu una din axele de coordonate, sau către laturile, paralele cu axele de coordonate, ale unui unghi cu vîrful în punctul fix.

O curbă primitivă poate avea în general mai multe puncte fixe, cînd ecuația $f(x) = x$ are mai multe rădăcini reale, izolate.

Să vedem care este curba limită a șirului iteratelor succesive pentru o porțiune din curba primitivă $f$, cuprinsă între două puncte fixe. Fie $T_1(x_1, x_1)$ și $T_2(x_2, x_2)$ două puncte fixe vecine (fig. 11).

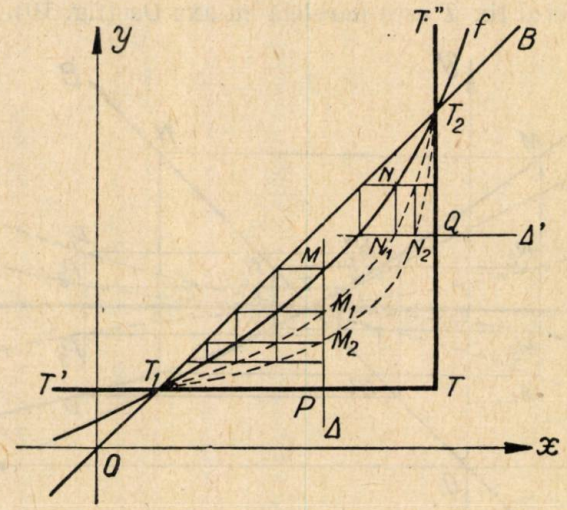



Fig 11

După cele arătate mai înainte, se vede că tangentele, în punctele fixe, la iteratele succesive tind respectiv către dreptele $y = x_1$ și $x = x_2$. În virtutea continuității curbei primitive $f$ și a iteratelor ei $f_n$, limita acestora este conturul $T_1TT_2$, punctul $T$ aparținînd conturului.

În concluzie, dacă curba primitivă are mai multe puncte fixe, șirul infinit al iteratelor succesive tinde către un contur poligonal format din semidrepte sau segmente de drepte paralele cu axele de coordonate, așa cum s-a enunțat în teorema 1. Se înțelege că porțiunilor din curba primitivă care nu au o infinitate de iterate, le corespund întreruperi ale liniei poligonale limită.

Teorema 1 poate fi enunțată și astfel: *Fiind dată o curbă primitivă $f$, de ecuație $y = f(x)$, dacă ecuația $f(x) = x$ are rădăcini reale, șirul infinit al iteratelor naturale tinde către un contur poligonal, închis sau nu, ale cărui laturi sînt paralele cu axele de coordonate.*

**6.** *Exemple.* *a*) Fie parabola $y = ax^2$ (fig. 12), $(a > 0)$, curba primitivă $f$. Rădăcinile ecuației $ax^2 = x$ fiind: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{a}$, punctele fixe ale iterației sînt: $T_1(0,0)$ și $T_2\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

Limita şirului iteratelor succesive este dreptunghiul indefinit $ABCD$.

*b*) Şirul iteratelor elipsei $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(\alpha>0)$, tinde către un dreptunghi *înscris* în elipsa primitivă, cu laturile paralele cu axele de coordonate.

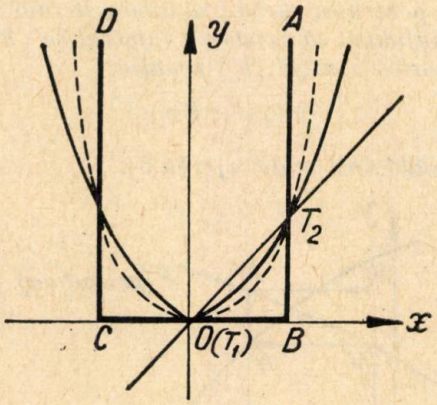



Fig. 12

## II. ITERATE CU DIRECTOARE CURBĂ

**1.** D e f i n i ţ i e. *Fiind dată funcţia primitivă* $y=f(x)$, *continuă şi derivabilă pe intervalul* $[a, b]$ *şi funcţia directoare* $y=\tau(x)$, *continuă şi derivabilă pe intervalul* $[\alpha, \beta]$, *în care admite o funcţie inversă* $x=\mu(y)$, *numim iterată de ordinul întîi a funcţiei primitive* $f$, *în raport cu funcţia directoare* $\tau$, *funcţia*

$$y_1=f_1(x)=f[\mu(y)]=f\{\mu[f(x)]\}$$

*şi iterată de ordinul i funcţia*

$$y_i=f_i(x)=f[\mu(y_{i-1})]=f\{\mu[f_{i-1}(x)]\}.$$

*Dacă* $y=f(x)$ *este ecuaţia unei curbe* $f$, *ecuaţia* $y=f_i(x)$ *reprezintă curba iterată de ordinul i a curbei primitive,* $f$, *în raport cu curba directoare* $\tau$.

Cazul iteratelor naturale sau unitare, din capitolul precedent, corespunde curbei directoare $y=\tau(x)=x$ (adică primei bisectoare a axelor de coordonate), deoarece $\mu(x)=x$.

Definiţia de mai sus este conformă definiţiei geometrice a iterării prin reflexie dreptunghică (fig. 13).

Într-adevăr, punctul $M$ de pe curba primitivă are ordonata $f(x)$, abscisa $x_1$ a punctului $N$ va fi dată de

$$\tau(x_1)=f(x),$$

deci $x_1=\mu[f(x)]$ şi, în consecinţă, ordonata punctului $M_1$, de pe iterata de ordinul întîi, va fi $y_1=f\{\mu[f(x)]\}$.

**2.** *a*) Din relația de definiție (II, **1**) și din interpretarea geometrică a iteratei, rezultă : dacă $x_0 \in [a, b]$, avem pentru $f(x_0)$ cel puțin o valoare reală. Pentru a avea o valoare reală și pentru $\mu[f(x_0)] = \mu_0$, este necesar ca ecuația $\tau(x) = f(x_0)$ să aibă cel puțin o rădăcină reală ($\mu_0$). În sfîrșit, pentru a avea o valoare reală pentru $y_1 = f\{\mu[f(x_0)]\}$ este necesar ca $x = \mu_0 \in [a, b]$. Deci : *pentru ca curba f să aibă o iterată în raport cu directoarea* $\tau$, *este necesar și suficient să existe un interval* $[a', b']$, *conținut în* $[a, b]$, *așa fel încît pentru orice* $x_i \in [a', b']$ *ecuația*

$$\tau(x) = f(x_i)$$

*să aibă cel puțin o rădăcină reală* $x_j \in [a,b]$.

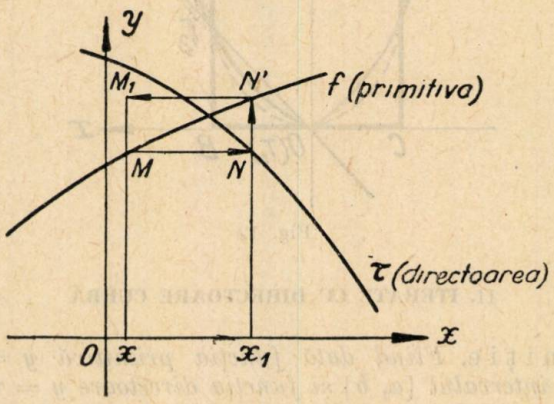



Fig. 13

*b*) Conform definiției avem

$$f_n = \underbrace{f\{\mu\,[f \ldots f}_{n-k}(\mu(f_k))\ldots]\},$$

unde $n-k$ arată că simbolul $f$ se repetă de $n-k$ ori. Deci

$$f_n = f_{n-k-1}[\mu(f_k)].$$

Punînd : $n-k-1 = \alpha$, $k = \beta$, deci $n = \alpha + \beta + 1$, avem relația

$$f_\alpha[\mu\,(f_\beta)\,] = f_{\alpha+\beta+1},$$

care, împreună cu $f_1 = f[\mu(f)]$, definește șirul iteratelor cu directoarea curbă $\tau$.

**3.** Prin analogie cu cele arătate în capitolul precedent (I, **3**), dacă curba primitivă $f$ are cel puțin un punct fix, adică dacă ecuația $f(x) = \tau(x)$ are cel puțin o rădăcină reală, curba $f$ are o infinitate de iterate succesive în raport cu directoarea $\tau$.

Toate iteratele succesive $f_n$ ale curbei $f$ trec prin punctul fix. Dacă $x_t$ este abscisa acestui punct, avem : $f(x_t) = \tau(x_t)$ ; $f_1(x_t) = f\{\mu[f(x_t)]\} = f\{\mu[\tau(x_t)]\}$ și ținînd seama că $\mu$ și $\tau$ sînt funcții inverse, avem $f_1(x_t) = f(x_t) = \tau(x_t)$ ; $f_2(x_t) = f\{\mu[f_1(x_t)]\} = f\{\mu[\tau(x_t)]\} = f(x_t) = \tau(x_t)$ etc.

4. TEOREMA 2. *Fiind dată o curbă primitivă $f$, de ecuație $y = f(x)$ și curba directoare $\tau$, de ecuație $y = \tau(x)$, dacă ecuația $f(x) = \tau(x)$ are cel puțin o rădăcină reală, șirul iteratelor succesive ale curbei $f$, în raport cu curba $\tau$, $y = f_n(x)$, cînd $n \to \infty$, tinde către o limită, care este un contur poligonal format din drepte, semidrepte sau segmente de drepte paralele cu axele de coordonate.*

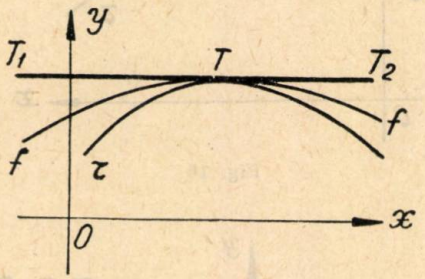



Fig. 14

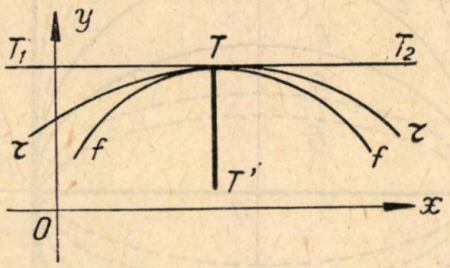



Fig. 15

Pentru demonstrație trebuie considerate mai multe cazuri de poziții relative ale primitivei $f$ și directoarei $\tau$, în vecinătatea unui punct fix $T$ :

*a*) toate cazurile (analoge cu I, 5*a-e*) determinate de pozițiile caracteristice ale tangentei, în punctul fix, la curba directoare $\tau$ ;

*b*) pentru fiecare poziție de la punctul *a*) a curbei directoare vom avea tot atîtea poziții caracteristice ale curbei primitive după diferitele pante ale tangentei la curba primitivă $f$, în punctul fix.

Demonstrațiile, analoge celor din cap. I, nu prezintă nici o nouă dificultate, afară de o mai mare varietate a soluțiilor (dreptelor limită) provenită din diversitatea mai mare a pozițiilor relative ale curbelor primitivă ($f$) și directoare ($\tau$), din clasificarea de mai sus.

De exemplu, dacă curbele $f$ și $\tau$ au ca punct fix un punct de tangență, cu tangenta comună paralelă cu axa $Ox$, ambele curbe fiind de aceeași

parte a tangentei (fig. 14) și dacă $f$ este curba cu curbura mai mică (mai aproape de tangentă), limita șirului iteratelor succesive $f_n$ este dreapta $y = x_t$.

Dacă însă curba $f$ este cea cu curbura mai mare (fig. 15), limita șirului iteratelor succesive ale curbei $f$ față de directoarea $\tau$ este semidreapta $TT'$ $(x = x_t)$.

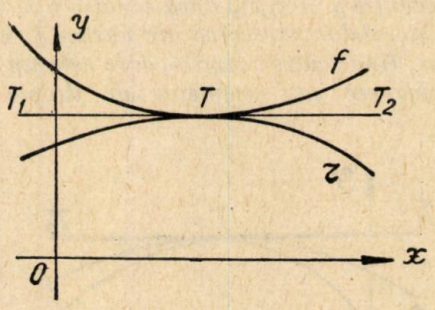



Fig. 16

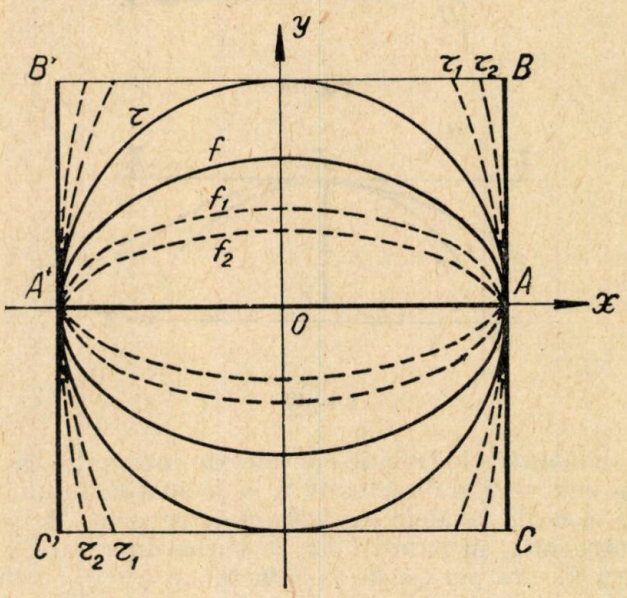



Fig. 17

Dacă curbele $f$ și $\tau$ sînt de o parte și de alta a tangentei comune $T_1T_2$ (fig. 16), curba $f$ nu are iterate față de directoarea $\tau$, deoarece nu este îndeplinită prima condiție de la II, **2** și anume, ecuația $\tau(x) = f(x_i)$ nu are nici o rădăcină reală, pentru nici un $x_i \in [a, b]$, în afară de $x = x_i = x_i$.

*Exemplu.* Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$, curba primitivă $f$ și cercul $x^2+y^2=a^2$, curba directoare $\tau$ (fig. 17). Punctele fixe sînt $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$. Toate iteratele elipsei $f$, în raport cu cercul $\tau$, trec prin punctele fixe $A$, $A'$. Limita șirului infinit al curbelor iterate este segmentul de dreaptă $AA'$ de pe axa $Ox$.

Dacă însă operăm iterația cercului $\tau$, considerat curbă primitivă, în raport cu elipsa $f$, considerată ca directoare, limita curbelor iterate $\tau_1$, $\tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ va fi formată din cele două segmente $BC$, $B'C'$, de pe dreptele $x=a$ și $x=-a$, ale căror puncte au ordonatele cuprinse între $+a$ și $-a$.

Este de observat că funcția inversă $\mu(x)$ există separat pe fiecare interval pe care funcția directoare $\tau(x)$ este continuă și monotonă.

Primită la redacție la 15 mai 1961

## ИТЕРИРОВАННЫЕ КРИВЫЕ

### РЕЗЮМЕ

Если задана кривая $y=f(x)$, определяются естественные итерированные $y=f_i(x)$, где $f_1(x)=f[f(x)], \ldots f_n(x)=f[f_{n-1}(x)], \ldots$. Геометрический смысл таков: с точки $M$ кривой $f$ рассматривается параллельная к оси $Ox$ до пересечения с первой биссектрисой осей (директрисса итерации) в точке $N$; потом рассматриваются $NN_1 \| Oy$ и $N_1M_1 \| Ox$ до пересечения с $MM_1 \| Oy$ (рис. 1) и получается точка $M_1$ на кривой $f_1$.

*Определение*: *Кривая $L$ называется пределом последовательности кривых $C_n$, если точки пересечения прямой $\Delta$ с кривыми $C_i$ образуют на $\Delta$ последовательность точек, сходящую к точке $P$ пересечения кривой $L$ с прямой $\Delta$* (рис. 2, 3).

*Теорема 1. Если уравнение $y=f(x)$ имеет действительные корни, последовательность естественных итерированных стремится к многоугольному контуру, стороны которого параллельны осям координат.*

Определяются общие итерированные с кривой директриссой

$$f_1(x): f\{\mu[f(x)]\}, \ldots f_i=f\{\mu[f_{i-1}(x)]\},$$

где $\mu(x)$ — обратная директриссе $\tau(x)$ и устанавливается теорема 2, обобщающаяя теорему 1. Неподвижные точки итерации являются в этом случае корнями уравнения $f(x)=\tau(x)$.

# COURBES ITÉRÉES


## RÉSUMÉ

Etant donné la courbe $y=f(x)$, l'auteur définit les courbes itérées unitaires (ou naturelles) $y=f_i(x)$, où $f_1(x)=f[f(x)], \ldots, f_n(x)=f[f_{n-1}(x)], \ldots$. Il donne l'interprétation géométrique suivante de l'opération d'itération : d'un point $M$ situé sur la courbe primitive $f$ on mène une parallèle à l'axe $Ox$ jusqu'à ce qu'elle rencontre la première bissectrice des axes de coordonnées (la *directrice* de l'itération) en un point $N$ ; puis on trace $NN_1 \| Ox$ et $N_1M_1 \| Ox$ jusqu'à l'intersection avec $MM_1 \| Oy$ (fig. 1 ) et on obtient ainsi le point correspondant $M_1$, situé sur la courbe itérée du premier ordre.

On donne la définition : *Etant donné une suite infinie de courbes* $C_1, C_2, \ldots$, *une courbe* $L$ *este la limite de la suite de courbes* $C_n$, *si les points d'intersection d'une direction* $\Delta$ *avec les courbes* $C_i$ *déterminent sur la droite* $\Delta$ *une suite infinie de points dont la limite est le point* $P$ *de l'intersection de la courbe* $L$ *avec la droite* $\Delta$ (fig. 2, 3).

On prouve ensuite le théorème 1 : *Etant donné une courbe primitive* $f$, *d'équation* $y = f(x)$, *si l'équation* $f(x) = x$ *a des racines réelles, la suite infinie des courbes itérées naturelles tend vers un contour polygonal, fermé ou non, dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées.*

En définissant les courbes itérées d'un type plus général, *à directrice courbe* : $f_1(x) = f\{\mu[f(x)]\}, \ldots, f_i(x) = f\{\mu[f_{i-1}(x)]\}$ où $\mu(x)$ est l'inverse de la fonction directrice $\tau(x)$, on établit le théorème 2, qui étend à ces courbes itérées, le théorème 1, — les points fixes de l'itération étant donnés cette fois-ci par les racines de l'équation $f(x) = \tau(x)$.


## BIBLIOGRAFIE


1. A. DENJOY, *Sur l'itération des fonctions analytiques.* C.R. Acad. Sci. Paris, **182**, 255 (1926).
2. M. HEINS, *On the iteration of fonctions which are analytic and single-valued in a given multiply-connected region.* Am. Journ. of Math., **63**, 461 (1941).
3. G. VALIRON, *Fonctions analytiques.* Paris, 1954, 130.
4. J. WOLFF, *Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région.* C.R. Acad. Sci. Paris, **182**, 42 (1926).
5. — *Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan.* Bul. Soc. Math. **57**, 195 (1929).

# OSCILAȚIILE ELASTICE ALE TUBULUI CILINDRIC

DE

L. DRAGOȘ

Problemele de hemodinamică conduc, în esență, la studiul mișcării unui fluid vîscos în tuburi elastice de grosime finită. În [1] am folosit pentru ecuațiile dinamice ale elasticității (ec. lui Navier), valabile în mediul elastic ce formează tubul, o soluție particulară periodică în $z$ și $t$ și cu variabile separate. Ne propunem în lucrarea de față să dăm soluția exactă a acestor ecuații în anumite condiții la limită, soluție care să fie susceptibilă a fi folosită în aplicațiile respective.

**1.** *Formularea problemei.* Vom presupune că tubul elastic este circular de raze $a$, $b$ $(a<b)$ semiinfinit, omogen și izotrop. Presupunem de asemenea mișcarea axial simetrică și luăm ca axă $Oz$ axa de simetrie a tubului. În coordonate cilindrice $(r, \theta, z)$, mediul elastic este conținut în domeniul $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$.

Tensorul deformației se scrie astfel:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{r\theta} = e_{z\theta} = 0,$$
$$e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \tag{1}$$

iar ecuațiile de mișcare [2]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r},$$
$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r}. \tag{2}$$

Folosind legea Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad \theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{3}$$

sistemul (2) capătă forma :

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2},$$
$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \tag{4}$$

$u_r$, $u_z$ fiind componentele deplasării, $\lambda$ și $\mu$ constantele elastice, iar $\rho$ densitatea mediului.

În lucrarea de față vom rezolva două probleme în legătură cu sistemul (4) și anume : vom da soluția exactă a sistemului (4) cunoscînd tensiunile la capătul tubului, adică

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} = T_1(r,t), \quad z = 0;$$
$$\sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = T_2(r,t), \quad z = 0. \tag{5}$$

Presupunem în plus

$$\lim_{z\to\infty}\left(u_r, u_z, \frac{\partial u_r}{\partial t}, \frac{\partial u_z}{\partial t}\right) = 0. \tag{6}$$

Pe suprafața laterală vom pune următoarele condiții :

$$u_r|_{r=a} = h_1(z,t), \quad u_r|_{r=b} = h_2(z,t),$$
$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\Big|_{r=a} = \sigma_1(z,t), \quad \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\Big|_{r=b} = \sigma_2(z,t). \tag{7}$$

Integrarea o vom face în condiții inițiale oarecare, adică :

$$\lim_{t\to 0+} u_r = f_1(r,z), \quad \lim_{t\to 0+} u_z = f_2(r,z),$$
$$\lim_{t\to 0+}\frac{\partial u_r}{\partial t} = g_1(r,z), \quad \lim_{t\to 0+}\frac{\partial u_z}{\partial t} = g_2(r,z). \tag{8}$$

În particular vom considera cazul $f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = 0$.

Problema a doua constă în integrarea sistemului (4) cînd se cunosc deplasările la capătul $z = 0$, adică presupunem

$$u_r = H_1(r,t), \quad u_z = H_2(r,t); \quad z = 0, \tag{9}$$

celelalte condiții fiind aceleași ca mai sus.

În privința condițiilor la limită (7) trebuie să facem cîteva precizări. Se știe că problemele la limită clasice în elasticitate sînt trei :

— se dau deplasările pe frontieră și se cere să se integreze ecuațiile de mișcare (problema Dirichlet) ;

— se dau tensiunile pe frontieră (problema Neumann) ;

— pe o porțiune a frontierei se dau deplasările, pe altă porțiune se dau tensiunile (problema mixtă). În aceste condiții soluția problemei este determinată.

Condițiile (7) pe care le impunem sînt condiții mixte de un tip special : pe aceeași frontieră condițiile limită sînt date o parte prin tensorul tensiune iar altă parte prin vectorul deplasare. Din modul cum vom construi soluția va rezulta că aceste condiții sînt suficiente pentru determinarea soluției și nu sînt supra-abundente. Vom demonstra și teorema de unicitate pentru sistemul (4) în aceste condiții la limită.

**2.** *Determinarea soluției.* Admitem că în intervalul $0 \leqslant t < \infty$ deplasările $u_r$, $u_z$ sînt astfel încît

$$\int_0^\infty e^{-ct} | u_r(r, z, t) | dt, \qquad \int_0^\infty e^{-ct} | u_z(r, z, t) | dt$$

sînt finite pentru o valoare pozitivă $c$.

De asemenea, presupunem că $u_r$, $u_z$ împreună cu derivatele lor temporale de ordin întîi sînt continue pe toată axa $t$, în afară de punctele limită în care pot avea discontinuități de prima speță.

Se presupune de asemenea că pentru $t$ negativ $u_r$ și $u_z$ sînt identic zero.

În aceste condiții vom introduce transformatele Laplace :

$$\begin{aligned} u(r, z, p) &= \int_0^\infty u_r(r, z, t)\, e^{-pt}\, dt, \\ v(r, z, p) &= \int_0^\infty u_z(r, z, t)\, e^{-pt}\, dt, \end{aligned} \tag{10}$$

$p$ fiind un parametru real sau complex astfel încît $\mathcal{R}e\ p > c$. În conformitate cu teorema de inversiune [3] avem :

$$\begin{aligned} u_r(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} u(r, z, p)\, e^{pt}\, dp, \\ u_z(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} v(r, z, p)\, e^{pt}\, dp ; \end{aligned} \tag{11}$$

integrala se ia de-a lungul dreptei $\mathcal{R}e\ p = \gamma > c$, în valoare principală (ca limită a integralei luate pe $(a - ib, a + ib)$ cînd $b \to \infty$).

Sistemul (4) se amplifică cu $e^{-pt}\,dt$ și se integrează pe $(0, \infty)$. Integrînd prin părți în dreapta și ținînd cont de condițiile (8), presupunînd de asemenea permisă schimbarea derivatei în $r$ și $z$ cu integrala, avem :

$$F(r, z) + \rho p^2 u = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$G(r, z) + \rho p^2 v = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r}\right] + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F(r,z) &= -\rho g_1(r,z) - \rho p f_1(r,z), \\ G(r,z) &= -\rho g_2(r,z) - \rho p f_2(r,z). \end{aligned} \quad (12')$$

Condițiile la limită (5) devin :

$$\text{(a)}\quad \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial z} = \int_0^\infty T_1(r, t)e^{-pt}\,dt = T_1'(r, p),\ z=0\,;$$

$$\text{(b)}\quad \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \int_0^\infty T_2(r, t)e^{-pt}\,dt = T_2'(r, p),\ z=0\,; \quad (13)$$

iar condițiile (9) :

$$\text{(a)}\quad u\Big|_{z=0} = \int_0^\infty H_1(r,\ t)\,e^{-pt}\,dt = H_1'(r, p),\ z=0\,;$$

$$\text{(b)}\quad v\Big|_{z=0} = \int_0^\infty H_2(r, t)\ e^{-pt}\,dt = H_2'(r,\ p),\ z=0. \quad (14)$$

În mod analog se transformă condițiile la limită (7). Avem :

$$u\Big|_{r=a} = \int_0^\infty h_1(z, t)\,e^{-pt}\,dt = h_1'(z, p),\ u\Big|_{r=b} = \int_0^\infty h_2(z, t)\,e^{-pt}\,dt = h_2'(z,\ p),$$

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{r=a} = \int_0^\infty \sigma_1(z, t)\,e^{-pt}\,dt = \sigma_1'(z,p),\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{r=b} =$$

$$= \int_0^\infty \sigma_2\,e^{-pt}\,dt = \sigma_2'(z,\ p). \quad (15)$$

Pentru integrarea sistemului (12) este necesar a presupune că $u(r,z,\ p)$, $v(r,\ z,\ p)$ satisfac, în raport cu $r$, condițiile Dirichlet în intervalul $[a,\ b]$.

Vom nota $s$ o rădăcină a ecuației transcendente

$$J_1(sa)\ G_1(sb) - J_1(sb)\,G_1(sa) = 0. \quad (16)$$

Aici $J_1(z)$, $G_1(z)$ sînt funcțiile Bessel de speța întîi și respectiv speța a doua, de ordin unu.

Pentru determinarea lui $u$ din sistemul (12) vom folosi o transformată integrală de tip Hankel, finită [4]. Notăm :

$$\begin{aligned} \overline{u}(s,\ z,\ p) &= \int_a^b r\,u(r,\ z,\ p)[J_1(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_1(rs)]\,dr, \\ \widetilde{v}(s,\ z,\ p) &= \int_a^b r\,v(r,\ z,\ p)[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr. \end{aligned} \tag{17}$$

În condițiile noastre avem în orice punct din intervalul $(a,\ b)$ în care $u$ este funcție continuă

$$u(r,\ z,\ p) = \sum_i \frac{2s_i^2 J_1^2(as_i)\,\overline{u}(s_i,\ z,\ p)}{J_1^2(bs_i) - J_1^2(as_i)}\,[J_1(rs_i)\,G_1(bs_i) - J_1(bs_i)\,G_1(rs_i)], \tag{18}$$

suma se extinde pe toate rădăcinile pozitive ale ecuației (16).

Se amplifică ecuația întîi din sistemul (12) cu $r\,[J_1(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_1(rs)]\,dr$ și se integrează în intervalul $(a,\ b)$. În rezultat se ține seama de relația (73) din [4], p. 90 și de următorul calcul :

$$\int_a^b r\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z}\,[J_1(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_1(rs)]\,dr =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\int_a^b v\left[G_1(bs)\frac{d}{dr}rJ_1(rs) - J_1(bs)\frac{d}{dr}rG_1(rs)\right]dr = -s\frac{d\widetilde{v}}{dz}. \tag{19}$$

Am integrat prin părți ținînd seama de (16) și am folosit relația de recurență cunoscută

$$[xJ_1(x)]' = x\,J_0(x) \tag{20}$$

valabilă și pentru funcțiile Bessel de speța a doua.

În definitiv, ecuația întîi a sistemului (10) se scrie

$$\frac{d^2\overline{u}}{dz^2} = \omega^2\overline{u} + A\frac{d\widetilde{v}}{dz} + \overline{H}. \tag{21}$$

Cu notațiile următoare :

$$\omega^2 = \frac{s^2(\lambda + 2\mu) + \rho p^2}{\mu};\quad A = \frac{s(\lambda + \mu)}{\mu};$$

$$\overline{H} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\left[u(b, z, p) - u(a, z, p)\frac{J_1(bs)}{J_1(as)}\right] + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{\mu}\int_a^b rF(r,\ z)\,[J_1(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_1(rs)]\,dr,$$

$\overline{H}$ devine funcție cunoscută dacă se ține seama de (15), (12′) și (8).

Ecuația a doua din sistemul (12) se înmulțește cu $r\,[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr$ și se integrează în intervalul $(a, b)$. Facem următorul calcul

$$I_1 = \int_a^b r\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr =$$

$$= r\left[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)\right]\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b \frac{\partial v}{\partial r}\left\{G_1(bs)\left[\frac{d}{dr}rJ_0(rs) - J_0(rs)\right] - J_1(bs)\left[\frac{d}{dr}rG_0(rs) - G_0(rs)\right]\right\}dr.$$

Avem

$$\frac{d}{dr}[rJ_0(rs)] = J_0(rs) + sr\,J_0'(rs) = J_0(rs) - sr\,J_1(rs).$$

Integrînd încă o dată prin părți și ținînd seama de ecuația (16), obținem

$$I_1 = r\,[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_a^b -$$

$$- s\int_a^b v\left[G_1(bs)\frac{d}{dr}rJ_1(rs) - J_1(bs)\frac{d}{dr}rG_1(rs)\right]dr.$$

Folosind din nou (20), avem :

$$I_1 = r[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_a^b - s^2\tilde{v}.$$

Analog se obține

$$I_2 = \int_a^b r\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right][J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left\{ru[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\Big|_a^b + s\bar{u}\right\}.$$

Cu aceste calcule, ecuația a doua din sistemul (12) devine

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dz^2} = \omega_0^2\tilde{v} + B\frac{d\bar{u}}{dz} + \bar{G}, \tag{23}$$

unde am folosit următoarele notații:

$$\omega_0^2 = \frac{\mu s^2 + \rho p^2}{\lambda + 2\mu}, \qquad B = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} s,$$

$$\begin{aligned}\overline{G} = {} & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left\{b\,[J_0(bs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(bs)]\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=b} - \right. \\ & \left. - a[J_0(as)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(as)]\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=a}\right\} + \\ & + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\left\{b[J_0(bs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(bs)]\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=b} - \right. \\ & \left. - a[J_0(as)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(as)]\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=a}\right\} + \\ & + \frac{1}{\lambda + 2\mu}\int_a^b rG(r, z)[J_0(rs)\,G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr.\end{aligned} \tag{24}$$

Dacă se ține seama de relațiile (15), (12′) și (8) rezultă că $\overline{G}$ este cunoscut.

În consecință, sistemul de ecuații cu derivate parțiale (12), transmis asupra transformatelor integrale $\bar{u}$ și $\tilde{v}$, devine sistemul (21), (23). Sistemul acesta, neomogen, cu coeficienți constanți se reduce la un sistem liniar de ordinul patru, dacă se notează:

$$\bar{u} = y_1, \quad \tilde{v} = y_2, \quad \frac{d\bar{u}}{dz} = y_3, \quad \frac{d\tilde{v}}{dz} = y_4.$$

Sistemul obținut se integrează cu metodele clasice. Avem următorul sistem fundamental

$$\begin{aligned}&\bar{u}\,(A\lambda_1 e^{\lambda_1 z}, \quad -A\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}, \quad A\lambda_2 e^{\lambda_2 z}, \quad -A\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}), \\ &\tilde{v}[(\lambda_1^2 - \omega^2) e^{\lambda_1 z}, \quad (\lambda_1^2 - \omega^2) e^{-\lambda_1 z}, \quad (\lambda_2^2 - \omega^2) e^{\lambda_2 z}, \quad (\lambda_2^2 - \omega^2) e^{-\lambda_2 z}],\end{aligned}$$

$\lambda_1$ și $\lambda_2$ fiind soluțiile ecuației caracteristice. Ele au următoarea expresie:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{\frac{(\omega + \omega_0)^2 + A \cdot B}{2}} + \sqrt{\frac{(\omega - \omega_0)^2 + A \cdot B}{2}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{(\omega + \omega_0)^2 + A \cdot B}{2}} - \sqrt{\frac{(\omega - \omega_0)^2 + A \cdot B}{2}}.\end{aligned} \tag{25}$$

Obținem în definitiv soluția sistemului :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= C_1(s,p)\,\bar{u}_1 + C_2(s,p)\,\bar{u}_2 + C_3(s,p)\,\bar{u}_3 + C_4(s,p)\,\bar{u}_4 + \\ &+ \sum_1^4 \bar{u}_i \int \frac{D_{3i}\,\bar{H} + D_{4i}\,\bar{G}}{D}\,dz = \sum_1^4 C_i\,u_i + Y_1, \\ \tilde{v} &= C_1(s,p)\,\tilde{v}_1 + C_2(s,p)\,\tilde{v}_2 + C_3(s,p)\,\tilde{v}_3 + C_4(s,p)\tilde{v}_4 + \\ &+ \sum_1^4 \tilde{v}_i \int \frac{D_{3i}\,\bar{H} + D_{4i}\,\bar{G}}{D}\,dz = \sum_1^4 C_i\,\tilde{v}_i + Y_2,\end{aligned} \tag{26}$$

notațiile fiind evidente. Aici $D$ este următorul determinant

$$D = A^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1^2-\omega^2 & \lambda_1^2-\omega^2 & \lambda_2^2-\omega^2 & \lambda_2^2-\omega^2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1(\lambda_1^2-\omega^2) & -\lambda_1(\lambda_1^2-\omega^2) & \lambda_2(\lambda_2^2-\omega^2) & -\lambda_2(\lambda_2^2-\omega^2) \end{vmatrix}$$

iar $D_{ij}$ sînt minorii respectivi. Cele patru funcții rămîn a fi determinate din condițiile la limită (13), respectiv (14). Din (6), (10), (17) rezultă $\lim_{z\to\infty} \bar{u} = 0$, ceea ce implică $C_1 = C_3 = 0$.

$C_2(s,p)$ și $C_4(s,p)$ se determină în funcție de problemele care ni le punem.

*Prima problemă.* Presupunînd că se dau tensiunile la capătul $z = 0$, avem condițiile (13). Amplificînd (13 a) cu $r\,[J_0(rs)G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr$ și integrînd în intervalul $(a, b)$ obținem :

$$\lambda s\,\bar{u} + (\lambda + 2\mu)\frac{d\bar{v}}{dz} = T_1(s,p),\quad z = 0. \tag{27}$$

Am notat

$$\begin{aligned}T_1(s,p) &= \lambda r u(r,0,p)[J_0(rs)G_1(bs) - J_1(bs)G_0(rs)]\Big|_b^a + \\ &+ \int_a^b r\,T_1'(r,p)\,[J_0(rs)G_1(bs) - J_1(bs)\,G_0(rs)]\,dr.\end{aligned}$$

Amplificînd (13$b$) cu $r[J_1(rs)G_1(bs) - J_1(bs)\,G_1(rs)]\,dr$ și integrînd în același interval, ținînd seama de (16) și de relația

$$\frac{d}{dr}[rJ_1(rs)] = rs\,J_0(rs)$$

avem :

$$s\tilde{v} - \frac{d\bar{u}}{dz} = T_2(s,p),\quad z = 0, \tag{28}$$

cu notația

$$T_2(s,p) = \frac{1}{\mu}\int_a^b r\, T_2'(r,p)\ [J_1(rs)\, G_1(bs) - J_1(bs)\, G_1(rs)]\, dr.$$

Condițiile (27) și (28) vor determina $C_2(s,p)$ și $C_4(s,p)$. Obținem următorul sistem:

$$\begin{aligned}
&C_2\,\lambda_1[A s\lambda + (\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\omega^2)] + C_4\lambda_2[A s\lambda + (\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\omega^2)] = \\
&= \lambda s\, Y_1(0) + (\lambda+2\mu)\, Y_2'(0) - \overline{T}_1(s,p) \\
&C_2[A\lambda_1^2 - s(\lambda_1^2-\omega^2)] + \\
&+ C_4[A\lambda_2^2 - s(\lambda_2^2-\omega^2)] = s\, Y_2(0) - Y_1'(0) - \overline{T}_2(s,p),
\end{aligned} \tag{28'}$$

de unde rezultă imediat $C_2(s,p)$, $C_4(s,p)$.

*A doua problemă.* Dacă se dau deplasările pe suprafața $z = 0$, folosim condițiile (14). Un calcul simplu ne dă:

$$C_2(s,p) = \frac{(\lambda_2^2-\omega^2)[\overline{H}_1 - Y_1(0)] + A\lambda_2[\overline{H}_2 - Y_2(0)]}{\Delta},$$

$$C_4(s,p) = \frac{A\lambda_1[Y_2(0) - \overline{H}_2] + (\lambda_1^2-\omega^2)[Y_1(0) - \overline{H}_1]}{\Delta},$$

$$\Delta = A[\lambda_2(\lambda_1^2-\omega^2) - \lambda_1(\lambda_2^2-\omega^2)], \tag{29}$$

$$\overline{H}_1 = \int_a^b r\, H_1'(r,p)\ [J_1(rs)\, G_1(bs) - J_1(bs)\, G_1(rs)]\, dr,$$

$$\overline{H}_2 = \int_a^b r\, H_2'(r,p)\ [J_0(rs)\, G_1(bs) - J_1(bs)\, G_0(rs)]\, dr.$$

Constantele fiind determinate putem scrie soluția problemei. Avem, folosind (11), (18) și (26):

$$\begin{aligned}
u_r(r,z,t) = {} & \frac{1}{2\pi i}\sum_j \frac{2s_j^2 J_1^2(as_j)}{J_1^2(bs_j) - J_1^2(as_j)}\,[J_1(rs_j)G_1(bs_j) - J_1(bs_j)G_1(rs_j)]\times \\
& \times \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} [-A\lambda_1 C_2(s_j,p)e^{-\lambda_1 z} - A\lambda_2 C_4(s_j,p)\, e^{-\lambda_2 z} + Y_1(s_j,z,p)]\, e^{pt}\, dp,
\end{aligned} \tag{30}$$

suma luîndu-se pe toate rădăcinile pozitive ale ecuației (16), iar $C_2(s,p)$, $C_4(s,p)$ fiind determinați de sistemul (28'), sau avînd expresiile (29), după cum rezolvăm una sau alta din problemele la limită propuse.

Necunoscuta $u_z(r,z,t)$ se determină din ecuația întîi a sistemului (4).

**3.** *Teorema de unicitate.* Presupunem că am avea două soluții ale sistemului (4) $(u_r', u_z')$, $(u_r'', u_z'')$. Atunci $u_r = u_r' - u_r''$, $u_z = u_z' - u_z''$ ar satisface același sistem cu condițiile la limită (5), (7) și (8) sau (9), (7) și (8), în care $T_1 = T_2 = h_1 = h_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = H_1 = H_2 = 0$. Din (22) rezultă $\bar{H} = 0$, din (24) rezultă $\bar{G} = 0$ deci $Y_1 = Y_2 = 0$. În prima problemă la limită considerată, sistemul (28′) devine omogen și nu are decît soluția banală $C_2 = C_4 = 0$, deci $u_r = 0$. Soluția este unică. Dacă se consideră a doua problemă la limită, expresiile (29) ne dau de asemenea $C_2 = C_4 = 0$ și soluția este unică.

Primită la redacție la 16 august 1961

## УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

### РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается, в связи с задачами гемодинамики (динамики крови), задача об интегрировании динамических уравнений теории упругости (4) (уравнения Навье) в полубесконечной цилиндрической трубе радиусами $a$ и $b$.

Рассматриваются два случая:

1) Предполагая, что на конце трубы заданы напряжения (5), на боковой поверхности имеем смешанные условия специального вида (7) и общие начальные условия (8), система (4) интегрируется точно.

2) Предполагая, что на конце трубы известны перемещения (9), а остальные условия остаются те же самые, система (4) также интегрируется.

Метод интегрирования состоит в применении преобразования Лапласа к системе (4) с последующим частичным применением к преобразованной системе (12) преобразования Ганкеля с конечными пределами (17). Используя соотношение для Бесселевых функций первого и второго рода, система (12) ведет к неоднородной системе (21), (23) с постоянными коэффициентами. Интегрированием этой системы получается решение (26). Постоянные $C_1$ и $C_3$ равняются нулю на основании условия (6), а постоянные $C_2$ и $C_4$ определяются из условий (5), соответственно (9), для задачи 1, соответственно 2. Окончательно получается решение (30). Дается также условие единственности.

# OSCILLATIONS ÉLASTIQUES DU TUBE CYLINDRIQUE


## RÉSUMÉ

Au sujet des questions d'hémodynamique, l'auteur examine le problème de l'intégration des équations dynamiques de l'élasticité (4) (équations de Navier) dans le cas d'un tube cylindrique semi-infini, de rayons $a$ et $b$.

Il considère deux cas :

— en supposant que les extrémités du tube supportent les tensions (5), on a sur la surface latérale les conditions mixtes de forme spéciale (7) et les conditions initiales sous une forme générale (8), et le système (4) s'intégrera exactement ;

— en supposant connus les déplacements (9) intervenant à l'extrémité du tube, les autres conditions étant les mêmes, le système (4) est encore intégrable.

La méthode d'intégration est fondée sur l'application de la fonction transformée de Laplace au système (4), suivie d'une application partielle de la fonction transformée de Hankel, à limites finies (17), au système transformé (12). Utilisant les relations auxquelles satisfont les fonctions de Bessel de la première et de la seconde espèces, le système (12) conduit au système (21), (23) non homogène à coefficients constants. On intègre ce dernier et on obtient la solution (26). Les constantes $C_1$ et $C_3$ sont nulles par suite de la condition (6), et les constantes $C_2$ et $C_4$ sont déterminées à partir des conditions (5), respectivement (9), selon que l'on considère un problème ou l'autre. On obtient la solution définitive (30).

L'auteur indique aussi le théorème d'unicité.


## BIBLIOGRAFIE


1. L. DRAGOS, *Mişcarea unui fluid vîscos în tuburi elastice, cu referire la hemodinamică. I.* Studii şi cercetări matematice (acest volum).
2. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity.* McGraw-Hill, 1946.
3. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. В. ШАБАТ, *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, 1958.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms.* New York-Toronto-London, 1951.

# ASUPRA MIŞCĂRILOR TRIDIMENSIONALE PERMANENTE ALE FLUIDELOR BAROTROPE

DE

ION I. CRISTEA

## INTRODUCERE

În prezenta lucrare vom studia un nou mod de a ataca ecuaţiile permanente ale mişcărilor fluidelor perfecte barotrope în trei dimensiuni. Aşa cum în cazul bidimensional se introducea, pe baza ecuaţiei de continuitate, funcţia de curent a mişcării, în cazul tridimensional, pornind de asemenea de la ecuaţia de continuitate, se introduc nişte funcţii ce au acelaşi rol ca şi funcţiile de curent din cazul plan*). Noi am numit aceste funcţii [2], *funcţii de curent* iar pe baza lor am definit aşa numitele *suprafeţe de curent**).

Urmînd ideea tov. prof. V. Vâlcovici de a caracteriza mişcarea fluidă cu ajutorul unui sistem de coordonate curbilinii [6], [7], vom considera în cele ce urmează un sistem de coordonate curbilinii legat de aceste suprafeţe de curent.

Făcînd apoi ipoteza că liniile de vîrtej ale mişcării sînt ortogonale pe liniile de curent, avem posibilitatea de a obţine o clasă de mişcări fluide ce generalizează mişcarea fluidă plană, în sensul că de-a lungul unei linii de vîrtej caracteristicile mecanice ale mişcării vor fi aceleaşi şi că va exista o familie uniparametrică de suprafeţe de curent cu proprietatea că pe fiecare suprafaţă a acestei familii mişcarea se va prezenta la fel. Vom combate cu acest prilej ideea greşită prin care se considera că suprafeţele

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.}$$

*) Aceste funcţii şi suprafeţe de curent au fost puse în evidenţă de noi în lucrarea noastră de Stat (1960) şi, pe altă cale şi independent de noi, de tov. C. Ionescu-Bujor în teza sa de doctorat (Paris, 1961).

ar fi cele ce înlocuiesc planele $z = \text{const.}$ din cazul mișcării plane [3], [6], [7].

## § 1. SUPRAFEȚE DE CURENT

În cazul mișcării permanente, ecuația de continuitate se reduce la

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v}\right) = 0, \tag{1}$$

unde $\rho_0$ este o constantă de dimensiunile masei specifice. Am văzut [3] că această ecuație se satisface prin introducerea a două funcții arbitrare $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ și $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3)$ așa fel ca

$$\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v} = \lambda \operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\chi, \tag{2}$$

unde $\lambda = \lambda(\psi, \chi)$ este o funcție arbitrară de variabilele $\psi$ și $\chi$. Interpretarea funcțiilor $\psi$ și $\chi$ în reprezentarea (2) ca funcții de curent este imediată deoarece liniile de curent ale mișcării se obțin la intersecția suprafețelor

$$\psi(x_1, x_2, x_3,) = \text{const.} \text{ și } \chi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \tag{3}$$

numite în mod natural suprafețe de curent. Se observă că o dată cu suprafețele de curent (3) oricare ar fi funcția $\Lambda(\psi, \chi)$ de $\psi$ și $\chi$ și suprafața

$$\Lambda(\psi(x_1, x_2, x_3), \chi(x_1, x_2, x_3)) = \text{const.} \tag{4}$$

este tot o suprafață de curent.

Dacă fluidul este limitat de o suprafață prin care nu avem transfer de fluid, punînd condiția că fluidul alunecă pe această suprafață rezultă că aceasta se reprezintă sub forma

$$S(\psi(x_1, x_2, x_3), \chi(x_1, x_2, x_3)) = 0. \tag{5}$$

Altfel spus, suprafața frontieră (5) este o suprafață de curent.

Observînd că se pot determina două funcții $\Psi = \Psi(\psi, \chi)$ și $X = X(\psi, \chi)$ așa fel ca

$$\frac{\partial(\Psi, X)}{\partial(\psi, \chi)} = \lambda(\psi, \chi), \tag{6}$$

reprezentarea (2) se poate lua sub forma

$$\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v} = \operatorname{grad}\Psi \times \operatorname{grad} X. \tag{2'}$$

Ţinînd cont că funcţia $\lambda = \lambda(\psi, \chi)$ este arbitrară şi că în ecuaţia (6) una din funcţiile $\Psi$ sau X se poate lua arbitrară, rezultă că şi cealaltă funcţie este arbitrară. Deci, în reprezentarea (2′) funcţiile $\Psi$ şi X ca funcţii de $x_1$, $x_2$, $x_3$ sînt arbitrare.

## § 2. COORDONATE CURBILINII

Să ne fixăm atenţia asupra unui punct $P$ din domeniul ocupat de fluid. Prin punctul $P$ va trece o linie de curent $L_P$ unic determinată de familia de suprafeţe de curent (3) — (4). Acest fapt permite folosirea unui sistem de coordonate curbilinii legat de familia suprafeţelor de curent ce trec prin punctul $P$ şi de linia de curent $L_P$ definită de aceste suprafeţe.

Fie

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad \text{şi} \quad \chi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$$

două suprafeţe de curent distincte *) ale familiei de suprafeţe de curent (4) ce definesc linia de curent $L_P$. Să considerăm atunci familiile uniparametrice de suprafeţe

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = q^2 \quad \text{şi} \quad \chi(x_1 x_2, x_3) = q^3, \tag{7}$$

unde $q^2$ şi $q^3$ sînt parametrii acestor familii. Vizibil, liniile de curent ale mişcării vor fi determinate de valorile acestor parametri.

Dacă acum $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ este o funcţie pentru care determinantul funcţional

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0, \tag{8}$$

pentru construirea sistemului de coordonate curbilinii anunţat nu avem decît să considerăm şi familia uniparametrică de suprafeţe

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = q^1. \tag{7′}$$

Astfel, un punct $P$ al domeniului ocupat de fluid va fi unic determinat de valorile $q^1$, $q^2$, $q^3$ ale parametrilor celor trei familii de suprafeţe (7) — — (7′). În baza condiţiei (8), relaţiile (7) — (7′) putîndu-se inversa, trecerea de la coordonatele carteziene $x_1$, $x_2$, $x_3$ ale punctului $P$ la coordonatele curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$ ale sale, este totdeauna posibilă. Axele curbilinii de coordonate ale sistemului de coordonate curbilinii adoptat vor fi determinate de traiectoriile ortogonale la suprafeţele (7) — (7′).

Dacă $\bar{r} = \bar{r}(q^1, q^2, q^3)$ este vectorul de poziţie al unui astfel de punct $P$, baza sistemului de coordonate curbilinii considerat va fi formată din vectorii

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

*) *distincte* în sensul că între funcţiile $\psi$ şi $\chi$ nu există o relaţie de dependenţă de tipul $f(\psi, \chi) = 0$.

astfel încît componentele covariante ale tensorului metric al spațiului față de coordonatele $q^1$, $q^2$, $q^3$ sînt

$$g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j, \ (i, j = 1, 2, 3), \tag{10}$$

punctul între vectori desemnînd produsul lor scalar.

Să notăm cu $a^1$, $a^2$, $a^3$ componentele contravariante ale unui vector $\bar{a}$ față de baza (9), iar cu $a_1$, $a_2$, $a_3$ componentele covariante ale aceluiași vector față de aceeași bază.

În cazul vectorului viteză $\bar{v}$, al unei particule fluide situată într-un punct $P$ de coordonate curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$, avem

$$v^i = \dot{q}^i, \ (i = 1, 2, 3),$$

astfel încît, ținînd cont că viteza $\bar{v}$ este tangentă la linia de curent $L_P$ ce trece prin $P$, rezultă

$$v^1 = \dot{q}^1, \ v^2 = v^3 = 0. \tag{11}$$

Cum între componentele covariante și cele contravariante ale unui vector $\bar{a}$ față de baza (9) avem relația $a_i = g_{ij} a^j$, în cazul vectorului viteză $\bar{v}$ vom avea

$$v_i = g_{i1} v^1, \ (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

## § 3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

În cazul mișcărilor permanente ecuația de mișcare a fluidelor perfecte barotrope se scrie sub forma

$$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \text{grad} \left( U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \right) \tag{13}$$

semnul $\times$ între vectori desemnînd înmulțirea vectorială iar forțele de masă fiind presupuse conservative. La această ecuație va trebui adăugată ecuația (1) de continuitate

$$\text{div} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \bar{v} \right) = 0 \tag{1'}$$

precum și ecuația de stare, care în cazul fluidelor barotrope are forma

$$p = p(\rho). \tag{14}$$

Să vedem ce devin aceste ecuații cînd raportăm mișcarea la sistemul de coordonate curbilinii considerat în paragraful precedent.

Să notăm în acest sens cu $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$ vectorii bazei reciproce bazei (9). Se știe că între vectorii acestor baze avem relațiile

$$\bar{e}^i = \frac{\bar{e}_j \times \bar{e}_k}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{e}^j \times \bar{e}^k}{(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)}, \tag{15}$$
$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}^1, e^2, \bar{e}^3) = 1$$

ordinea indicilor $i, j, k$ fiind aceea a unei permutări pare a indicilor 1, 2, 3. Este evident că

$$\operatorname{grad} q^i = \bar{e}^i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{16}$$

astfel încît în virtutea relațiilor (2), (7), (15) și (16)

$$\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v} = \lambda(q^2, q^3)\cdot\operatorname{grad} q^2 \times \operatorname{grad} q^3 = \lambda(q^2, q^3)\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\bar{e}_1, \tag{17}$$

unde am notat

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{\Delta^2} > 0$$

și s-a observat că

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \sqrt{g} = \frac{1}{\Delta}.$$

Dacă în (2) am fi luat $\lambda = \lambda(q^2, q^3) \equiv 1$, relația (17) ar fi luat forma mai simplă

$$\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\bar{e}_1. \tag{17'}$$

Așadar, componentele contravariante $v^1$, $v^2$, $v^3$ ale vectorului viteză $\bar{v}$ satisfac condițiile

$$\sqrt{g}\frac{\rho}{\rho_0}v^1 = \lambda(q^2, q^3), \quad v^2 = v^3 = 0, \tag{18}$$

regăsindu-se astfel concluziile $v^2 = v^3 = 0$ obținute în (11). Ca o verificare, cum în coordonate curbilinii ecuația de continuitate (1) se scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}\frac{\rho}{\rho_0}v^i\right) = 0, \tag{19}$$

se observă că această ecuație (19) se satisface identic de către componentele $v^1$, $v^2$, $v^3$ caracterizate în (18). Acest fapt era natural în baza considerării cîmpului de viteze sub forma (2).

Să considerăm acum ecuația de mișcare (13).

Cu ajutorul componentelor contravariante $\zeta^1$, $\zeta^2$, $\zeta^3$ și $v^1$, $v^2$, $v^3$ ale vectorilor $\bar{\zeta} = \operatorname{rot}\bar{v}$ și respectiv $\bar{v}$, componentele covariante ale vectorului $\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{v}$ se pot calcula conform formulelor

$$(\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{v})_i = \sqrt{g}(\zeta^j v^k - \zeta^k v^j),$$

ordinea indicilor $i, j, k$ fiind aceea precizată mai înainte. În baza faptului că $v^2 = v^3 = 0$ aceste componente vor fi egale respectiv cu

$$0, \quad \sqrt{g}\zeta^3 v^1, \quad -\sqrt{g}\zeta^2 v^1. \tag{20}$$

Să notăm apoi pentru prescurtare

$$B = U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2. \tag{21}$$

Evident, componentele covariante ale vectorului grad $B$ vor fi

$$\frac{\partial B}{\partial q^1}, \quad \frac{\partial B}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial q^3}. \tag{22}$$

Atunci, în baza ecuației de mișcare (13), identificînd componentele covariante (20) ale vectorului rot $\bar{v} \times \bar{v}$, față de baza (9), cu componentele corespunzătoare (22) ale vectorului grad $B$ față de aceeași bază, vom obține ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q^1} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial q^2} &= \sqrt{g}\, \zeta^3 v^1, \\ \frac{\partial B}{\partial q^3} &= -\sqrt{g}\, \zeta^2\, v^1. \end{aligned} \tag{23}$$

Așadar, ecuațiile (13), (1′) și (14) ale mișcării permanente tridimensionale ale fluidelor perfecte barotrope, s-au redus la ecuațiile (18) și (23) la care trebuie adăugate ecuațiile (21) și (14).

Ținînd cont că față de baza (9) componentele contravariante ale vectorului vîrtej $\bar{\zeta} = \text{rot}\, \bar{v}$ se scriu

$$\zeta^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial v_k}{\partial q^j} - \frac{\partial v_j}{\partial q^k} \right),$$

ultimele două ecuații (23) se transcriu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q^2} &= v^1 \left( \frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2} \right), \\ \frac{\partial B}{\partial q^3} &= v^1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^3} \right). \end{aligned} \tag{23′}$$

## § 4. CONSIDERAREA SUPRAFEȚELOR BERNOULLI-VÂLCOVICI

Întrucît din prima din ecuațiile (23) urmează că funcția $B$ nu depinde decît de variabilele curbilinii $q^2$ și $q^3$, adică

$$B = B(q^2, q^3),$$

rezultă că funcţia $B$ este o funcţie de curent, iar suprafeţele

$$B = \text{const.} \tag{24}$$

sînt nişte suprafeţe de curent.

Pe de altă parte, cum o deplasare infinitezimală $dq^1$, $dq^2$, $dq^3$ pe o linie de vîrtej este caracterizată de ecuaţiile

$$\frac{dq^1}{\zeta^1} = \frac{dq^2}{\zeta^2} = \frac{dq^3}{\zeta^3}, \tag{25}$$

cum aceste ecuaţii, în baza ultimelor două ecuaţii (23), se transcriu sub forma

$$\frac{dq^1}{\sqrt{g}\,\zeta^1 v^1} = \frac{dq^2}{-\dfrac{\partial B}{\partial q^3}} = \frac{dq^3}{\dfrac{\partial B}{\partial q^2}}, \tag{25'}$$

înseamnă că deplasările $dq^2$ şi $dq^3$ satisfac ecuaţia

$$\frac{\partial B}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial B}{\partial q^3} dq^3 = 0,$$

ceea ce, în baza faptului că $B$ nu depinde decît de $q^2$ şi $q^3$, atrage că liniile de vîrtej se găsesc pe suprafeţele (24). Cu alte cuvinte suprafeţele (24) sînt şi suprafeţe de vîrtej.

Concluziile acestea despre suprafeţele (24) se puteau obţine direct din ecuaţia de mişcare (13). În adevăr, din ecuaţia (13) rezultă că vectorul grad $B$ este perpendicular pe vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{\zeta} = \text{rot}\ \bar{v}$. Cum însă vectorul grad $B$ dă direcţia normalelor la suprafeţele (24), rezultă că vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{\zeta}$ sînt situaţi în planul tangent la aceste suprafeţe.

Suprafeţele (24) se întîlnesc în literatură sub numele de suprafeţe Bernoulli [3], [6], [7]. Pentru faptul că V. Vâlcovici, folosind aceste suprafeţe, a iniţiat o nouă metodă de studiu a ecuaţiilor de mişcare ale unui fluid [6], [7], ne vom permite a numi aceste suprafeţe — *suprafeţe Bernoulli-Vâlcovici*.

Calitatea remarcabilă a acestor suprafeţe Bernoulli-Vâlcovici de a fi în acelaşi timp şi suprafeţe de curent şi suprafeţe de vîrtej, permite ca prin considerarea lor în definiţia sistemului de coordonate curbilinii adoptat de noi, ecuaţiile (23) să se simplifice şi mai mult.

În adevăr, ecuaţiile stabilite în paragraful precedent considerau un sistem de coordonate curbilinii legat de două familii uniparametrice arbitrare de suprafeţe de curent, familiile (7). Vom admite acum că una din aceste familii de suprafeţe de curent (7) este chiar familia (24) a suprafeţelor Bernoulli-Vâlcovici.

Să luăm atunci, în locul funcţiei $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$, introdusă prin formula (2), funcţia $B = B(x_1, x_2, x_3)$ definită în (21), adică

$$\frac{\rho}{\rho_0} \bar{v} = \Lambda(B, \chi) \cdot \text{grad}\, B \times \text{grad}\, \chi. \tag{26}$$

În acest caz, sistemul de coordonate curbilinii al problemei va avea suprafețele (24) ca suprafețe $q^2 = \text{const}$. Cu alte cuvinte vom lua

$$B(x_1, x_2, x_3) = q^2 \tag{27}$$

adică

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = q^2. \tag{27'}$$

În baza acestor fapte, ecuațiile (23) se vor reduce la

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2}\right) v^1 = 1,$$
$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^3}\right) v^1 = 0, \tag{23''}$$

de unde, cum din aceste ecuații nu putem avea $v^1 = 0$, rezultă că

$$\frac{\partial v_3}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^3} = 0.$$

Deci, pentru satisfacerea acestei ecuații, putem admite existența unei funcții $\Phi = \Phi(q^1, q^2, q^3)$ așa fel ca $v_1$ și $v_3$ să fie de forma

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^1}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^3}. \tag{28}$$

Considerînd familia suprafețelor

$$\Phi(q^1, q^2, q^3) = \text{const}. \tag{29}$$

se poate arăta ușor că această familie determină pe suprafețele Bernoulli-Vâlcovici o congruență de curbe ortogonale pe congruența liniilor de curent de pe suprafața Bernoulli-Vâlcovici respectivă.

În adevăr, notînd cu $\delta q^1$, $\delta q^2$, $\delta q^3$ o deplasare infinitezimală pe o linie de curent, iar cu $\partial q^1$, $\partial q^2$, $\partial q^3$ o deplasare infinitezimală pe curba obținută prin intersecția suprafeței Bernoulli-Vâlcovici ce trece prin linia de curent considerată cu una din suprafețele (29), vom avea

$$\delta q^2 = \delta q^3 = 0, \quad \partial q^2 = 0 \tag{30}$$

și

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1} \partial q^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} \partial q^2 = 0. \tag{31}$$

Ultima din aceste condiții, în baza relațiilor (28) și (12), se transcrie

$$g_{11} v^1 \partial q^1 + g_{31} v^1 \partial q^3 = 0,$$

de unde prin simplificare cu $v^1$, $(v^1 \neq 0)$

$$g_{11} \partial q^1 + g_{31} \partial q^3 = 0. \tag{31'}$$

Atunci, în baza condițiilor (30) și (31′) putînd scrie că

$$g_{ij}\,\delta q^i\,\partial q^j = 0,$$

faptul că deplasările $\delta q^i$ $(i = 1, 2, 3)$ și $\partial q^i$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt ortogonale este demonstrat.

Pe baza unor considerații analoge, la existența pe fiecare suprafață Bernoulli-Vâlcovici a unei congruențe de curbe ortogonale pe congruența liniilor de curent a ajuns și tov. prof. V. Vâlcovici [6], [7]. Dînsul a numit aceste curbe ortogonale pe liniile de curent, de pe o suprafață Bernoulli-Vâlcovici, curbe potențiale. Acest fapt ne permite a numi suprafețele (29) *suprafețe potențiale.*

În virtutea relațiilor (28), componentele contravariante ale vectorului vîrtej $\bar{\zeta} = \operatorname{rot} \bar{v}$ se vor scrie :

$$\zeta^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q^2} - v_2\right),\ \zeta^2 = 0,\ \zeta^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^1}\left(v_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial q^2}\right),$$

astfel încît notînd

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} - v_2$$

ecuațiile (25) ale liniilor de vîrtej se vor scrie :

$$\frac{dq^1}{\dfrac{\partial A}{\partial q^3}} = \frac{dq^2}{0} = \frac{dq^3}{-\dfrac{\partial A}{\partial q^2}},$$

de unde urmează

$$\frac{\partial A}{\partial q^1}\,dq^1 + \frac{\partial A}{\partial q^3}\,dq^3 = 0 \text{ și } dq^2 = 0,$$

ceea ce înseamnă că liniile de vîrtej vor fi date de intersecțiile familiilor de suprafețe

$$A \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} - v_2 = \text{const. și } q^2 = \text{const.} \tag{32}$$

Se verifică astfel încă o dată faptul că aceste linii de vîrtej sînt situate pe suprafețele familiei de suprafețe Bernoulli-Vâlcovici.

### § 5. CONSIDERAREA SUPRAFEȚELOR POTENȚIALE

Faptul anunțat în paragraful precedent, prin care liniile de curent de pe o suprafață Bernoulli-Vâlcovici sînt ortogonale pe curbele obținute prin intersecția suprafeței Bernoulli-Vâlcovici respective cu suprafețele potențiale (29), ne permite a preciza și mai mult sistemul de coordonate curbilinii al metodei noastre.

Astfel, presupunînd că în coordonate carteziene suprafețele potențiale (29) s-ar scrie sub forma

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \tag{29'}$$

nu avem decît ca în (7') să luăm ca funcție $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ chiar funcția $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ ce definește suprafețele potențiale (29'). Notînd, în sistemul de coordonate curbilinii astfel precizat, coordonatele curente ale unui punct $P$ tot cu $q^1, q^2, q^3$, suprafețele potențiale (29') se vor reprezenta prin ecuația

$$q^1 = \text{const.} \tag{29''}$$

Datorită faptului că pe fiecare suprafață $q^2 = \text{const.}$ suprafețele $q^1 = \text{const.}$ și $q^3 = \text{const.}$ determină două congruențe de curbe ortogonale, putem scrie

$$g_{13} = g_{31} = 0 \tag{33}$$

și deci, vom avea de-a face cu un sistem de axe curbilinii monoortogonal. De altfel, în baza lui (28) rezultînd în acest caz

$$v_1 = 1, \quad v_3 = 0, \tag{34}$$

cum am văzut că nu putem avea $v^1 = 0$, la aceeași concluzie (33) se ajunge și prin considerarea relațiilor (12).

Din relațiile (12) și (34) rezultă în plus ecuația

$$g_{11}\, v^1 = 1. \tag{35}$$

Apoi, în virtutea primei ecuații (34), prima ecuație de mișcare (23'') se reduce la

$$\frac{\partial v_2}{\partial q^1} v^1 = 1. \tag{36}$$

Cum însă din (12) $v_2 = g_{21}\, v^1$, conform cu (35) rezultă că

$$v_2 = \frac{g_{21}}{g_{11}}, \tag{37}$$

astfel că ecuația (36) va da

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{21}}{g_{11}}\right)\frac{1}{g_{11}} = 1. \tag{38}$$

Această ecuație, împreună cu ecuația (33), caracterizează sistemul de coordonate curbilinii al problemei.

Ecuațiile (33) și (38) nu sînt însă suficiente pentru caracterizarea completă a sistemului de coordonate curbilinii adoptat de noi. Pentru completarea acestui sistem să observăm că eliminînd pe $v^1$ între ecuațiile (18) și (35) vom obține

$$\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g} = \lambda(q^2, q^3)\cdot g_{11}. \tag{39}$$

Apoi, conform cu (35) avînd

$$V^2 = g_{ij}\, v^i\, v^j = g_{11}\, (v^1)^2 = v^1 = \frac{1}{g_{11}}, \tag{40}$$

ecuaţia (27′) se reduce la

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2g_{11}} = q^2. \tag{27″}$$

Ecuaţiile (39) şi (27′) astfel scrise, împreună cu ecuaţia de stare (14), deşi introduc funcţiile necunoscute $\rho$ şi $p$ sînt ecuaţiile care completează sistemul ecuaţiilor (33) şi (38).

Deci, rezolvarea sistemului de ecuaţii (13), (1′) şi (14) ce caracterizează mişcarea barotropă tridimensională a fluidelor perfecte, revine la determinarea funcţiilor

$$x_i = x_i\, (q^1,\ q^2,\ q^3), \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{41}$$

ce caracterizează transformarea de trecere de la sistemul de coordonate carteziene $x_1$, $x_2$, $x_3$ la sistemul de coordonate curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$ construit de noi. O dată cu determinarea acestor funcţii (41) se determină şi funcţiile

$$\rho = \rho\, (q^1,\ q^2,\ q^3) \text{ şi } p = p\, (q^1,\ q^2,\ q^3) \tag{42}$$

ce dau masa specifică şi presiunea fluidului în punctul de coordonate curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$.

Funcţiile (41) şi (42) vor trebui determinate aşa fel ca să fie verificate şi condiţiile la limită ale problemei. Astfel, în cazul cînd fluidul este limitat de o suprafaţă prin care nu avem transfer de fluid, determinarea funcţiilor (41) va trebui astfel făcută încît în coordonatele curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$ ecuaţia suprafeţei frontieră să se reprezinte sub forma

$$S\, (q^2, q^3) = 0. \tag{43}$$

O dată determinate funcţiile (41) şi (42), celelalte elemente ale mişcării se determină imediat.

Astfel, conform cu definiţia coordonatelor $q^1$, $q^2$, $q^3$, vitezele vor fi tangente la liniile de curent $L_P$ : $q^2 = \text{const.}$, $q^3 = \text{const.}$, iar modulul lor va fi dat de relaţia

$$V = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}. \tag{40′}$$

Pe această ultimă relaţie se citeşte că viteza va fi nulă în punctele pentru care $g_{11} = +\infty$ şi va fi infinită în punctele pentru care $g_{11} = 0$.

Apoi, cum în cazul coordonatelor curbilinii adoptate de noi suprafeţele potenţiale (29) se reduc la ecuaţia (29′), adică

$$\Phi\, (q^1,\ q^2,\ q^3) \equiv q^1,$$

ecuațiile (32) ale liniilor de vîrtej se reduc la

$$v_2 = \text{const. și } q^2 = \text{const.},$$

sau în baza relațiilor (12) și (35),

$$\frac{g_{21}}{g_{11}} = \text{const. și } q^2 = \text{const.} \tag{32'}$$

Așadar, și liniile de vîrtej ale mișcării se pot determina ușor.

### § 6. O IPOTEZĂ NOUĂ

Se știe că în cazul mișcărilor fluide plane vectorul vîrtej $\bar{\zeta} = \text{rot } \bar{v}$ este perpendicular pe planul mișcării (planul $xOy$, de exemplu). Deci, liniile de vîrtej sînt dreptele perpendiculare pe acest plan (sînt drepte paralele la axa $Oz$) și prin urmare ele sînt ortogonale pe liniile de curent ale mișcării.

Noi considerăm că această situație este posibilă și în cazul mișcărilor tridimensionale. De aceea, ipoteza pe care o vom face de acum încolo va fi că *liniile de vîrtej sînt ortogonale pe liniile de curent.*

Făcînd această ipoteză ne vom ocupa astfel de o clasă de mișcări fluide particulare, anume clasa mișcărilor pentru care avem condiția

$$\text{rot } \bar{v} . \bar{v} = 0. \tag{44}$$

Într-o comunicare viitoare vom arăta că mișcările fluide se pot clasifica în trei tipuri canonice diferite, unul din aceste tipuri canonice fiind caracterizat în mod biunivoc de condiția (44).

Revenind în cadrul lucrării noastre, cum în cadrul fiecărei suprafețe Bernoulli-Vâlcovici $q^2 = \text{const.}$, suprafețele $q^1 = \text{const.}$ determină o congruență de curbe ortogonale pe curbele congruenței liniilor de curent de pe suprafața $q^2 = \text{const.}$ considerată, urmează că liniile de vîrtej în virtutea ipotezei (44) vor fi curbele determinate de ecuațiile

$$q^1 = \text{const. și } q^2 = \text{const.} \tag{32''}$$

Or, aceste ecuații (32'') trebuie să reprezinte aceeași familie de curbe ca și ecuațiile (32'), anume familia liniilor de vîrtej. Aceasta atrage că raportul $\frac{g_{21}}{g_{11}}$ este o funcție doar de variabilele curbilinii $q^1$ și $q^2$, adică

$$\frac{g_{21}}{g_{11}} = f(q^1, q^2). \tag{45}$$

Conform ecuației (38), atunci și $g_{11}$ este o funcție doar de $q^1$ și $q^2$, iar în baza lui (45) rezultă că și $g_{21}$ este o funcție doar de $q^1$ și $q^2$ :

$$g_{11} = g_{11}(q^1, q^2) \text{ și } g_{21} = g_{21}(q^1, q^2). \tag{46}$$

Pe forma primei din aceste funcții se citește, conform cu (40′), că modulul $V$ al vitezei unei particule fluide este de asemenea o funcție doar de $q^1$ și $q^2$ :

$$V = V(q^1, q^2). \tag{47}$$

Așadar, atît componentele $g_{11}$ și $g_{21}$ cît și modulul $V$ al vitezei vor rămîne constante de-a lungul unei linii de vîrtej.

Întrucît în cazul problemei plane se admitea că vitezele particulelor fluide sînt situate în plane paralele (de exemplu la planul $xOy$, deci $z =$ $=$ const.), iar de-a lungul perpendicularelor pe aceste plane (paralelelor la axa $Oz$, adică $x =$ const. și $y =$ const.) aceste viteze sînt egale, asemănarea cu cazul mișcărilor plane este marcantă.

În cazul problemei plane, se admitea în plus că forțele de masă sînt de asemenea situate în planele paralele la planul $xOy$, fiind uniform distribuite de-a lungul paralelor la axa $Oz$. Aceasta făcea ca în fiecare plan paralel cu planul $xOy$ mișcarea să se prezinte la fel, iar de-a lungul unei paralele la axa $Oz$ toate caracteristicile mecanice ale mișcării să rămînă invariante.

Prin analogie cu cazul mișcării plane vom căuta ca nu numai $g_{11}$, $g_{21}$ și $V$ să nu depindă de variabila curbilinie $q^3$ ci întreaga mișcare fluidă să aibă această amprentă. Pentru aceasta este suficient de asemenea să presupunem că și *funcția de forță $U$ nu depinde de variabila curbilinie* $q^3$ :

$$U = U(q^1, q^2). \tag{48}$$

În adevăr, în baza lui (47) și a acestei ipoteze (48), prin derivarea ecuației (27′) în raport cu $q^3$ se obține

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q^3} = 0 ,$$

ecuație din care rezultă că presiunea $p$ de asemenea nu depinde de $q^3$ :

$$p = p(q^1, q^2). \tag{49}$$

Apoi, în baza ecuației de stare (14), rezultă că și densitatea $\rho$ nu depinde de $q^3$ :

$$\rho = \rho\ (q^1, q^2). \tag{50}$$

În baza ipotezelor (44) și (48) a rezultat cătoate elementele mișcării fluide depind doar de $q^1$ și $q^2$ și nu depind de $q^3$. Aceasta înseamnă că din punctul de vedere al considerării coordonatelor curbilinii $q^1$, $q^2$, $q^3$, pe fiecare suprafață $q^3 =$ const. mișcarea are aceeași alură, iar pe fiecare linie de vîrtej : $q^1 =$ const., $q^2 =$ const., caracteristicile mecanice ale mișcării sînt aceleași.

În cazul cînd fluidul ar fi în contact cu o suprafață impermeabilă să vedem cum s-ar transforma ecuația (43) ca, pe baza ipotezelor admise de noi, analogia cu cazul mișcării plane să fie și mai marcantă.

În cazul problemei plane ecuațiile suprafețelor frontieră nu depindeau explicit de variabila $z$, deoarece aceste suprafețe erau niște suprafețe cilindrice cu generatoarele paralele la axa $Oz$; erau nu numai suprafețe de curent ci și suprafețe de vîrtej, adică suprafețe Bernoulli-Vâlcovici. Putem presupune atunci că în cazul mișcării fluide considerate de noi suprafețele frontieră să fie tot niște suprafețe Bernoulli-Vâlcovici. Așadar, în ecuația (43) variabila $q^3$ nu trebuie să apară, ceea ce înseamnă că ecuația suprafețelor frontieră prin care nu avem transfer de fluid ia forma $S(q^2) = \text{const.}$, adică

$$q^2 = \text{const.} \tag{43'}$$

Această considerare a suprafețelor frontieră impermeabile ca niște suprafețe Bernoulli-Vâlcovici, în cazul ipotezelor (44) și (48), apare astfel în mod natural. Deci, nu suprafețele Bernoulli-Vâlcovici sînt cele mai indicate să generalizeze planele $z = \text{const.}$ ce interveneau în cazul mișcării plane [3], [6], [7], ci suprafețele $q^3 = \text{const.}$, adică suprafețele reprezentate în (7) prin ecuația

$$\chi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \tag{7''}$$

Din evaluările făcute pînă acum asupra funcțiilor $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3)$ și $\lambda = \lambda(B, \chi)$ nu s-a impus nici o condiție, aceste funcții putînd fi alese în mod arbitrar.

Dacă am fi luat $\lambda(B, \chi) \equiv 1$, reprezentarea (17') ar fi condus la ecuația

$$\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{g} = g_{11} \tag{39'}$$

în locul ecuației (39).

În acest caz, în baza ipotezelor (44) și (48) ar rezulta că și funcția $g = \det(g_{ij})$ nu depinde decît de $q^1$ și $q^2$ :

$$g = g(q^1, q^2). \tag{51}$$

Apoi, de la caz la caz, se pot impune funcției $\chi$ diferite condiții care să simplifice tratarea problemei. Astfel, presupunînd că funcția $\chi$ satisface și ecuația

$$g_{23} = g_{32} = 0, \tag{52}$$

în baza ecuației (33) și a acestei ecuații (52) rezultă că funcția $\chi$ poate fi aleasă așa fel ca liniile de vîrtej ale mișcării să fie traiectoriile ortogonale la suprafețele (7'').

Cum în baza relațiilor (34) și a faptului că $\zeta^2 = 0$, avem :

$$\text{rot}\bar{v} \cdot \bar{v} = \zeta^1,$$

condiția (44) atrage că $\zeta^1 = 0$. Deci

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v_2}{\partial q^3} = 0,$$

de unde urmează că $v_2$ nu depinde de variabila $q^3$ şi regăsim astfel condiţia (45). Aşadar, în baza ipotezei (44) rezultă că componentele contravariante ale vectorului vîrtej $\bar{\zeta} = \text{rot}\bar{v}$ se reduc la

$$\zeta^1 = 0, \quad \zeta^2 = 0, \quad \zeta^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v_2}{\partial q^1}. \tag{53}$$

Apoi, între componentele contravariante şi cele covariante ale vectorului $\bar{\zeta} = \text{rot}\bar{v}$ avem relaţiile $\zeta_i = g_{ij}\,\zeta^j$ $(i = 1, 2, 3)$, astfel că în baza relaţiilor (53) putem scrie

$$\zeta_i = g_{i3}\,\zeta^3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

în aşa fel că atunci cînd funcţia $\chi$ este astfel aleasă încît să verifice şi condiţia (52), în cazul componentelor covariante ale vectorului turbion rezultă şi

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \frac{\partial v_2}{\partial q^1}.$$

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1961

## О ПОСТОЯННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ БАРОТРОПНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится новый способ исследования постоянных уравнений (1), (13), (14) баротропных идеальных жидкостей и, на основании зависимости (2), вводятся так называемые *функции* и *поверхности потока.*

В связи с этими поверхностями потока вводится система криволинейных координат, при помощи которой получаются уравнения (18), (21) и (23). Ввиду того, что функция $B$ Бернулли является функцией потока, система криволинейных координат, уточненная согласно зависимости (26), приводит к уравнениям (18), (27′), (23′), на основании которых определяются *потенциальные поверхности* (29). Так как эти потенциальные поверхности определяют на любой поверхности Бернулли-Вылковича конгруентность линий, перпендикулярных конгруентности линий потока соответствующей поверхности Бернулли-Вылковича, определение системы криволинейных координат дополняется допущением, что, по отношению к рассматриваемой системе криволинейных координат, уравнением этих потенциальных поверхностей является уравнение (29″). По отношению к рассматриваемой таким образом системе криволинейных координат уравнения задачи сводятся к уравнениям (33), (38), (39), (27″) и (14).

Полученные нами общие уравнения, на основании частной гипотезы о том, что *вихревые линии перпендикулярны линиям потока*

*и что силовая функция U не зависит от криволинейной переменной* $q^3$, позволяют получить класс движения жидкости с ясно выраженным двухмерным характером, в том смысле, что на каждой поверхности $q^3 = \text{const}$. Движение является одним и тем же, а вдоль каждой вихревой линии механические характеристики движения остаются инвариантными. При рассматриваемых движениях, непроницаемые поверхности, соприкасающиеся с жидкостью, представляют собою поверхности Бернулли-Вылковича. Таким образом мы указываем, что в случае плоского движения, плоскости $z = \text{const}$. растягиваются не поверхностями Бернулли-Вылковича, а поверхностями (7″).

## SUR LES MOUVEMENTS PERMANENTS À TROIS DIMENSIONS DES FLUIDES BAROTROPES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur présente une nouvelle manière d'étudier les équations permanentes (1), (13), (14) des fluides parfaits barotropes, en introduisant, en vertu de la représentation (2), ce que l'on appelle les *fonctions* et les *surfaces de courant.*

En relation avec ces surfaces de courant, il introduit un système de coordonnées curvilignes, au moyen duquel il obtient les équations (18), (21), (23). En observant que la fonction de Bernoulli est une fonction de courant, il montre que le système de coordonnées curvilignes défini par la représentation (26) conduit aux équations (18), (27′), (23″) qui permettent de définir les *surfaces potentielles* (29). Vu que, sur toute surface de Bernoulli-Vâlcovici, ces surfaces potentielles définissent une congruence de lignes orthogonales sur la congruence des lignes de courant se trouvant sur la surface de Bernoulli-Vâlcovici correspondante, la définition du système de coordonnées curvilignes est complétée en admettant que, par rapport au système de coordonnées curvilignes considéré, l'équation de ces surfaces potentielles est l'équation (29″). Dans ces conditions, les équations du problème se réduisent aux équations (33), (38), (39), (27″) et (14).

Les équations générales, obtenues par l'auteur en vertu de l'hypothèse particulière que *les lignes de tourbillon sont orthogonales sur les lignes de courant* et que *la fonction de force U ne dépend pas de la variable curviligne* $q^3$, permettent d'obtenir toute une classe de mouvements fluides à deux dimensions, c'est-à-dire que, sur chaque surface $q^3 = \text{const.}$, le mouvement se présente de la même façon et que, le long de chaque ligne de tourbillon, les caractéristiques mécaniques du mouvement restent invariantes. Dans le cas de ces mouvements, les surfaces imperméables, avec lesquelles le fluide vient en contact, sont des surfaces de Bernoulli-Vâlco-

vici. L'auteur démontre, de cette manière, que ce sont les surfaces (7″) et non pas les surfaces de Bernoulli-Vâlcovici qui étendent les plans $z = \text{const.}$ du cas du mouvement plan.

## BIBLIOGRAFIE

1. P. A. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*. III (ed. IV). Paris, 1921.
2. ION I. CRISTEA, Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *12* (1961).
3. L. DRAGOS, Rendiconti dei Lincei, **XXIV**, *2*, 142–148 (1958).
4. C. IACOB, *Introduction Mathématique à la Mécanique des fluides*. Bucarest et Paris, 1959.
5. V. V. STEPANOV, *Curs de ecuaţii diferenţiale*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
6. V. VÂLCOVICI, Rendiconti dei Lincei, **XXI**, *5*, 288–296 (1956).
7. — Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6*, 1507–1533 (1960).

# PRIMELE CURSURI DE MATEMATICI SUPERIOARE ÎN BUCUREȘTI

DE

N. MIHĂILEANU

Primele cursuri de matematici superioare în țara noastră s-au ținut la Academia din Iași, începînd cu anul 1838. Date despre învățămîntul superior din Moldova au fost publicate cu diferite ocazii [1], [2]. După cunoștința noastră un studiu de sinteză al cursurilor de matematici superioare, în Țara Romînească, încă nu s-a efectuat. Nota noastră este o contribuție relativ la acest subiect. Din lucrările pe care le-am cercetat am extras datele relativ la secolul al XIX-lea. Acest material bibliografic fiind incomplet și în parte contradictoriu, studiul nostru nu are un caracter definitiv.

*

Primele cursuri de matematici superioare au fost preconizate la noi prin Regulamentul Organic, definitivat în 1832. Prin această legislație, care a reformat bazele economice ale Țării Romînești și Moldovei, învățămîntul a luat un caracter practic, cerut de nevoile țării. Dezvoltarea economică a principatelor necesita mai ales, cadre de tehnicieni și de juriști. Pentru formarea inginerilor se hotăra înființarea unor cursuri speciale, de trei ani, după absolvirea liceului, unde, pe lîngă cunoștințele tehnice trebuia să fie predate și geometria descriptivă și analitică, algebra superioară, calculul diferențial și integral, mecanica și geodezia.

Directorul școlilor din Țara Romînească era Petrache Poienaru, care făcuse studii tehnice la Viena și Paris. Din 1832, de cînd s-a întors în țară, el a fost multă vreme factor hotărîtor în toate problemele de învățămînt și de tehnică. Activitatea lui a fost apreciată atît de luminatul plenipotențiar rus Paul Kiselev cît și de domnitorul Barbu Știrbei, după revoluția burghezo-democrată din 1848. Sub supravegherea lui Poienaru

au fost aplicate treptat prevederile regulamentului organic pentru învățământul elementar și mediu.

La organizarea învățământului superior nu se putea trece înaintea consolidării treptelor anterioare. Trebuia format întîi un mediu studențesc cu o pregătire adecvată nivelului cursurilor universitare.

Pe de altă parte lipseau cadrele de specialiști. Pînă aproape de 1860 n-am avut licențiați în matematici, iar inginerii noștri nu aveau atunci studii teoretice temeinice. Primul inginer, cu o diplomă de la Școala centrală de Arte și Manufacturi din Paris, a fost în 1839 Alexandru Golescu, numit Arăpilă. Printre primii noștri ingineri calificați era și Ion Ghica de la Școala superioară de mine din Paris, din 1841 [3]. Ghica a predat, probabil, unele cursuri de matematici la Iași. Dar amîndoi cu idei progresiste și-au consacrat activitatea lor problemelor sociale ale timpului.

Un alt motiv de întîrziere a începutului învățământului superior era reacțiunea boierimii în fața noii situații create prin faptul că elemente ridicate prin școală din burghezie aspirau la ocuparea funcțiilor administrative și astfel se întăreau în lupta pentru cucerirea puterii politice. Boierimea, speriată de perspectiva pierderii privilegiilor, a desființat în 1847 și învățământul național mediu.

A trebuit ca revoluția din 1848 să mături această dispoziție nefastă. Articolul 16 al proclamației cerea învățământul în limba națională, gratuitatea lui pentru ambele sexe, școli elementare în fiecare comună, licee în fiecare județ și pe lîngă alte doleanțe imediate și crearea învățământului superior, teoretic și tehnic.

★

Ideile progresiste ale revoluției burghezo-democrate au salvat învățământul fraged românesc și au grăbit ridicarea nivelului lui. După revoluție a luat ființă primul embrion de învățămînt superior, sub forma unor cursuri speciale de studii juridice și tehnice, pe lîngă colegiul Sf. Sava.

Din toamna anului 1851 a funcționat o secție de studii juridice, cu un ciclu de doi ani, care purta titlul oficial de facultate și emitea certificate de absolvire, semnate de toți membrii eforiei școlilor, între care și P. Poienaru.

Este probabil că aceeași situație avea loc și pentru secția tehnică, numită curs special de inginerie civilă. Data începerii acestui curs rămîne incertă. Știm doar că în anul 1854, Alexandru Orăscu preda geometria descriptivă și Em. Constantinescu, geometria analitică [4]. Probabil că această situație a continuat în anii următori. În anul 1857—58 la secția de inginerie civilă s-a introdus un curs de mecanică, predat tot de Em. Constantinescu și un curs de geometrie descriptivă aplicată, predat de Gr. Joranu. Urmau aceste cursuri : 16 studenți în 1857 — 58, 7 în 1858 — 59 și 10 în 1861—62 [5].

Rămîne deschisă problema dacă putem numi cursuri de matematici superioare, cursurile specificate.

Trebuie să menționăm că cel puțin în unele perioade, în cursul secolului al XIX-lea, se preda la noi în cadrul învățământului mediu obișnuit, teoria combinărilor și trigonometria sferică, iar în școlile de meserii,

numite reale, și elemente de geometrie descriptivă. Aceste noțiuni au fost predate, în alte perioade, numai în universitate. Noi nu le considerăm totuși ca aparținînd matematicilor superioare.

De fapt nu avem o delimitare precisă de unde încep matematicile superioare. Se admite în mod tacit că matematicile superioare încep de la definiția și utilizarea noțiunii de derivată. Nu avem indicații că s-ar fi predat calculul diferențial în perioada analizată. Este posibil ca nici geometria analitică să nu fi depășit materialul liceului științific, care poate fi predat cu procedee de calcul elementar.

Dispunem însă de cursul de geometrie descriptivă tradus de Orăscu, în 1851 [6]. Acest curs, pe lîngă partea elementară conține teoria generală a suprafețelor, tratînd probleme referitoare la generarea suprafețelor, la plane tangente, la secțiuni plane, la intersecții.

Precizăm că data tipăririi nu este o indicație certă despre începutul predării acestui curs. În prefață autorul arată că a tradus cartea pentru elevii săi de la Școala de conductori de lucrări publice. Este posibil ca o astfel de școală, proiectată pînă în amănunte, să nu se fi înființat totuși atunci [3].

Dar dacă Orăscu considera necesar ca niște conductori să cunoască materialul menționat, cu atît mai mult trebuia să-l fi cerut inginerilor.

Admitem că Orăscu preda la cursul său materia specificată. De asemenea, o teorie descriptivă amănunțită a suprafețelor trebuie considerată de domeniul matematicilor superioare.

În concluzie, primele cursuri de matematici superioare au început la noi cel puțin din anul 1854.

★

În anul 1859—60 separat de cursul de inginerie civilă, clasele VII și VIII ale colegiului Sf. Sava, numite diviziune superioară, erau bifurcate în secția literelor și a științelor. La secția științelor, în afară de franceză, fizică, chimie, naturale, filozofie și desen erau studiate matematicile superioare la nivel universitar.

Astfel în clasa a VII-a, Gr. Joranu preda algebră superioară și geometrie analitică iar în clasa a VIII-a era introdus un curs complet de calcul diferențial și integral [7].

Programa de algebră cuprindea, între altele, teoria dezvoltată a combinărilor, a numerelor complexe, teoria dezvoltată a ecuațiilor, inclusiv funcțiile simetrice de rădăcinile unei ecuații algebrice, regula Descartes, calculul numeric al rădăcinilor incomensurabile.

La geometria analitică trebuia să se studieze transformarea coordonatelor, dreapta, cercul, conicele pe ecuații reduse, coordonatele polare, secțiuni în con, dreapta și planul.

La calculul diferențial și integral, materia mergea pînă la formula Taylor, diferențiala funcțiilor de mai multe variabile, teorema Euler relativ la funcțiile omogene, aplicațiile analizei la teoria curbelor plane și strîmbe, la suprafețe, integrale binome, integrale cu ajutorul seriilor, ecuații diferențiale de ordinul întîi, aplicarea calculului integral la probleme de

rectificarea şi cvadratura curbelor şi anumite arii şi volume limitate de suprafeţe.

Pentru programa atît de pretenţioasă a clasei a VIII-a de liceu nu avem indicaţie de profesor. Este posibil ca programa să se fi aplicat numai în clasa a VII-a şi pînă în anul următor să fi fost înlocuită.

Din 1861 este profesor la colegiu Emanoil Bacaloglu, succesor al lui D. Pavel. Bacaloglu avea o pregătire excelentă, totuşi nu ţinea cursul de mai sus în program şcolar normal. Din 1862 el ţinea cursul de algebră superioară şi de analiză facultativ şi în zilele de sărbătoare. Acesta este probabil primul curs de analiză ţinut în Muntenia.

Materialul predat poate fi judecat după cursul său autografiat în 1866 şi apoi tipărit în 1870 [8].

În afară de teoria combinărilor, care este cuprinsă şi în Algebra lui Asachi din 1837, în manualul lui Bacaloglu apar, prima oară în limba romînă, fracţiile continue, derivatele, seriile, extremele, interpolările, formele nedeterminate.

Această lucrare este personală şi tratarea ei, modernă [9].

Deci, lăsînd de o parte intitularea oficială, primele cursuri de matematici superioare au precedat înfiinţarea universităţilor.

★

În 8 octombrie 1863, prin decretul 967 al domnitorului Alexandru I. Cuza, ministru al învăţămîntului fiind Alexandru Odobescu, s-a înfiinţat Şcoala superioară de ştiinţe. La matematici erau profesori : Al. Orăscu de geometrie descriptivă, D. Petrescu pentru geometria analitică, I. Fălcoianu pentru calculul diferenţial şi integral. Em. Bacaloglu era profesor de fizică. Decanul facultăţii era Al. Orăscu.

Prin decretul 765 din 4/16 iulie 1864 al lui Al. I. Cuza, ministru al învăţămîntului fiind Dimitrie Bolintineanu, diferitele facultăţi separate au fost reunite într-o universitate.

Facultatea de ştiinţe, ca şi cea din Iaşi, avea un dublu scop ; prin studiile teoretice trebuia să formeze profesorii de matematici, fizico-chimice şi naturale pentru învăţămîntul mediu iar prin studiile practice să formeze ingineri civili. Cursurile durau doi ani. Secţia de matematici avea trei catedre :

*a*) Geometria descriptivă cu aplicaţii la construcţii ;
*b*) Geometria analitică, topografia şi geodezia ;
*c*) Calculul infinitezimal şi mecanica.

Profesorii secţiei de matematici erau Al. Orăscu, D. Petrescu, Elie Angelescu.

Cu timpul, numărul catedrelor s-a mărit.

Titularii catedrei de geometrie descriptivă, în cursul secolului trecut au fost : Al. Orăscu (1863—1892), E. Pangrati (1894 — 1931). Incidental, pe termene scurte ori suplinind, au mai predat inginerii Elie Angelescu (1870—1871), Nestor Urechiă (1892—1894).

La catedra de geometrie analitică au fost titulari : D. Petrescu (1863 — —1881), Constantin Gogu (1881—1897), Gheorghe Ţiţeica (1900—1938). Între 1897 şi 1900 a suplinit postul Mihail Ianculescu.

La catedra de calcul infinitezimal au fost titulari : Iacob Lahovari (1871—1901), Anton Davidoglu (1901—1940). Au mai funcționat Elie Angelescu (1863—1866); I. Fălcoianu (1866—1868); David Emanuel, care l-a suplinit mult timp pe Lahovari, cel puțin între 1892—1894 și 1896—1898; G. Țițeica (1899—1900); Paul Suchar (1901—1902); Paul Coculescu ținea în 1900 un curs liber de ecuații diferențiale.

Titularul cursului de mecanică era Spiru Haret (1878—1910). Incidental au mai funcționat la catedră : I. Fălcoianu (1864—1868), Elie Angelescu (1866) N. Coculescu (1896—1898), P. Suchar (1897—1902), Paul Coculescu (1901—1912 probabil).

Cursul de algebră superioară a fost ținut de titularii David Emanuel (1882—1900) și Andrei Ioachimescu (1900—1909).

La astronomie au fost titulari D. Petrescu (1865—1895) și N. Coculescu (1896—1937).

Teoria funcțiilor a fost predată de D. Emanuel (1892—1928).

Fără specificarea disciplinei, spre sfîrșitul secolului mai erau încadrați la Falcultatea de științe, pentru matematici, Gheorghe Kirilov și D. Bungețeanu.

Cu timpul, studenților de la secția matematici li s-au predat și cursuri de fizică, ținute la 1894 de D. Negreanu și C. Miculescu; de la 1895, D. Bungețeanu suplinea catedra lui Miculescu.

Studenții secției de fizico-chimice urmau și ei unele cursuri de matematici, cu aceiași profesori. Din 1896, D. Emanuel preda algebra superioară și calculul infinitezimal, iar M. Ianculescu, geometria analitică.

La Școala Normală Superioară, care din 1882 avea o secție de matematici, erau maeștri de conferințe : C. Gogu pînă în 1893; D. Emanuel (1893—1897). În 1897—98, N. Urechiă era repetitor. Din 1898, Școala Normală Superioară a fost desființată.

★

Relativ la conținutul cursurilor predate avem unele indicații.

S-au păstrat lecțiile litografiate ale lui E. Pangrati, din 1899—1900, dăruite de el bibliotecii Facultății de matematici [10]. Este probabil cursul lui ținut ani de-a rîndul la Facultatea de științe și la arhitectură.

Volumul întîi conține punctul, dreapta, planul cu toate problemele uzuale de construcții, de intersecții și de adevărată mărime, folosind metodele de schimbare de plan, de rotație și de rabatere. Apoi este studiată elipsa, ca proiecție a cercului, făcîndu-se numeroase aplicații asupra ei. Urmează prisma și piramida pe care le intersectează cu drepte și cu plane, apoi un studiu detaliat al unghiurilor triedre.

Volumul al doilea tratează suprafețele riglate, distribuția planelor tangente de-a lungul unei generatoare, în particular conoizii, elicoizii și cuadricele riglate, rezolvînd pentru fiecare în parte : probleme de construcție a planului tangent, de secțiuni plane, de intersecție cu o dreaptă, de curbe de umbră, apoi intersecțiile diverselor suprafețe, racordări și studiul curbelor speciale obținute prin intersecții.

De la Spiru Haret au rămas de asemenea notițele luate de un student, în 1900 [11].

Lecțiile de statică încep cu materialul comun și se ridică pînă la formulele Guldin, poligonul funicular, echilibrul firului, lănțișorul, frecarea, potențialul, formula Poisson.

Lecțiile de dinamică îmbrățișează tot materialul obișnuit, între altele, mișcarea sub acțiunea forțelor elastice, a forțelor centrale, legile lui Kepler, problema celor trei corpuri, mișcarea pe curbă, pe suprafață, pendulul, pendulul sferic.

O mare parte din curs este consacrată dinamicii sistemelor: ecuațiile lui d'Alembert, cu aplicații la percusiuni, ciocniri, mișcarea centrului de greutate, momente de inerție, mișcarea solidului, elipsoidul central, pendulul compus, pendulul balistic, solidul cu un punct fix, teorema Poinsot, mișcarea solidului liber, mișcarea obuzului, ecuațiile canonice ale lui Lagrange.

Toate aceste lecții sînt amplu dezvoltate și însoțite de numeroase aplicații.

De un înalt nivel științific era mai ales cursul de teoria funcțiilor al lui David Emanuel. În matematicile superioare clasice, teoria funcțiilor sintetizează problemele cele mai complexe. Iar în momentul în care acest curs a fost introdus la noi, el reprezenta vîrful preocupărilor matematicienilor. Cursul lui Emanuel, autografiat în 1904 apoi litografiat de mai multe ori, este bine cunoscut sub forma sa tipărită în 1924 și 1927 în două volume [12].

În primul volum este expusă partea generală a teoriei funcțiilor de variabilă complexă, urmînd mai ales punctul de vedere al lui Weierstrass, care studiază funcțiile analitice pe dezvoltarea lor în serie de puteri.

Volumul al doilea tratează teoria funcțiilor eliptice, mergînd pînă la numeroase probleme speciale.

Cursul tipărit al lui Emanuel este de-a dreptul impresionant prin volumul de cunoștințe expus, prin rigoarea raționamentului, prin prezentarea didactică a multor demonstrații personale, simplificate.

Este probabil că lecțiile predate nu difereau esențial de materialul tipărit.

Cursul lui Emanuel începea cu un capitol de teoria mulțimilor. Tot el ținea prin 1894 la Școala Normală Superioară un curs de teoria grupurilor, cu aplicație la teoria lui Galois, de rezolvarea ecuațiilor algebrice. Deci, primele cursuri de matematici moderne s-au ținut la noi din secolul al XIX-lea.

Un alt curs tipărit este cel de astronomie, al lui N. Coculescu [13]. Cea mai mare parte a cursului era dedicată mecanicii cerești și îndeosebi perturbațiilor planetare, cu aplicație asupra Lunii. Această parte a cursului a fost tipărită în 1905. Aceste cursuri pot fi ușor cercetate. Este probabil că N. Coculescu preda astronomia, sub această formă, încă de la începutul lecțiilor lui.

Orientîndu-ne după chestiunile propuse la examene [14], deducem că la algebra superioară se preda teoria combinărilor, determinanții, ecuațiile liniare, numerele complexe, seriile, funcțiile simetrice de rădăcinile unei ecuații, teoremele Rolle, Sturm etc. La Geometria analitică, în afara teoriei conicelor și a cuadricelor — unde se mergea pînă la determinarea cua-

dricelor prin condiții inițiale, în care intra și cunoașterea punctelor ombilicale — mai erau predate curbele plane de grad superior, înfășurătoarea, suprafețele riglate. La calculul infinitezimal erau studiate derivatele, variația funcțiilor, schimbări de variabile, integrale multiple, desfășurarea în serie, ecuațiile diferențiale și în plus toată teoria curbelor și a suprafețelor.

La fiecare disciplină se mergea pînă la amănunte, iar aplicațiile date la examene erau uneori pretențioase, de exemplu problemele date la geometria analitică, la examenele de licență.

Rezultă de aici că din secolul trecut erau predate la noi cursuri complete și temeinice de matematici superioare, în înțelesul clasic al acestei noțiuni.

*

Despre viața și activitatea cadrelor didactice ale secției de matematici a Facultății de științe din București, din secolul trecut, nu avem referințe complete.

*Alexandru Orăscu*, născut în 1817, a studiat arhitectura la Berlin. A activat ca arhitect. A militat și apoi a condus lucrările de construire a palatului Universității. A fost decanul Facultății de științe (1863—1870) și rector (1885—1892). A fost președinte al Societății inginerilor, la înființarea ei (1876). De pe la 1854 pînă la 1892 a fost profesor de geometrie descriptivă, pe atunci cea mai importantă ramură a matematicilor, pentru aplicațiile ei tehnice. A decedat la 16 decembrie 1894.

*Ion I. Fălcoianu*, licențiat în matematici la Paris în 1857, este primul romîn licențiat în științe. Din 1862 a fost profesor de matematici la școlile militare, apoi la Facultatea de științe, din 1863 pînă în 1868. A scris unele manuale didactice și lucrări de popularizare a astronomiei. A decedat la 30 iunie 1866 [15].

*Emanoil Bacalcglu*, născut în București, la 11 aprilie 1830 a studiat la Leipzig și Paris (1856—1861), luînd licența în fizică în 1858 la Paris. Întors în țară, din 1861, a fost profesor de matematici la colegiul Sf. Sava (1861—1864) apoi profesor de fizică la Facultatea de științe (1863—1891). Între anii 1859—1861 Bacaloglu a publicat un mare număr de note de geometrie diferențială, analiză și mecanică, în periodicele timpului, contribuind la elucidarea unor probleme care se definitivau atunci. El este primul autor romîn de lucrări originale de matematici și de fizică. Remarcabilă este mai ales formula propusă de el, în 1859, pentru măsurarea curburii unei suprafețe, în sensul definiției lui Gauss, înlocuind însă în reprezentarea sferică normalele suprafeței prin normalele secțiunilor normale. Această formulă admite o interpretare fizică, în studiul fenomenelor capilare. În 1935, matematicianul italian Teraccini a scos în evidență însemnătatea formulei lui Bacaloglu. Alte lucrări importante ale lui Bacaloglu se referă la curbele sincrone, la curbele și suprafețele podare, la o nouă indicatoare a suprafețelor, la integralele binome, la extremele funcției $\frac{\sin x}{x}$ în legătură cu o problemă de difracție etc. Lucrările lui Bacaloglu publicate în țară

sînt mai mult cu caracter didactic, de exemplu Algebra superioară din 1870. A decedat în 30 august 1891. Majoritatea lucrărilor lui Bacaloglu sînt analizate într-o serie de note ale Fl. Cîmpan. Referințe despre activitatea sa științifică au fost publicate în numeroase alte lucrări [16] — [20].

*Dimitrie Petrescu*, născut la Roșiorii de Vede în 1831, a studiat matematicile la Paris, unde și-a luat licența în 1859. A fost profesor la Școala militară (1862—1866), la Facultatea de științe, de la 1863 pînă în 1895 și în același timp la Școala de Poduri și Șosele (1864—1868), la seminarul Nifon (1889—1895). A fost decanul Facultății de științe (1890—1895) și director al Școlii de Poduri și Șosele, la înființarea ei (1867—1868). A publicat unele manuale de matematici elementare. A decedat la 7 mai 1896 [21].

*Elie Angelescu*, născut probabil în 1834, a studiat la Școala Centrală din Paris, a fost profesor în diverse rînduri la Facultatea de științe, la Școala de Poduri și Șosele, la liceul Matei Basarab. A scris unele manuale de școală medie. A decedat prematur la 22 martie 1871.

*Gheorghe Kirilov*, născut în 19 mai 1845 la Vălenii de Munte, a studiat matematicile la Paris, luînd licența în 1872. A fost profesor de matematici la seminarul Nifon (1874—1884), la Școala de Poduri și Șosele (1879—1908), la Școala militară, de la 1887, la Școala de agricultură de la Herăstrău (1886—1890), la Facultatea de științe (1892—1896), la Școala de arhitectură (1897—1908). A decedat la 8 septembrie 1908 [22].

*Iacob Lahovari*, născut în 16 ianuarie 1846, a absolvit școala politehnică din Paris și școala de stat major a armatei franceze. A activat ca general și a condus cu succes operațiile din jurul Plevnei în războiul de independență. A fost profesor la Facultatea de științe între 1871—1901 și la Școala militară din 1872. A scris unele lucrări cu caracter juridico-militar. A decedat la 7 februarie 1907.

*Spiru Haret*, născut la 27 februarie 1851 în Iași, a studiat matematicile la facultatea din București (1870—1874) apoi a continuat studiile la Paris (1874—1877) unde și-a luat din nou licența în matematici (1875) și a luat și licența în fizică (1876). În 18 ianuarie 1878 și-a susținut teza de doctorat la Sorbona, fiind primul nostru doctor în matematici. Întors în țară, a fost profesor la Facultatea de științe (1878—1907), la Școala de Poduri și Șosele (1882—1907), la Școala militară (1881—1890). În teza sa de doctorat, ale cărei rezultate le-a publicat din 1877, Haret a demonstrat, în sens opus opiniei generale, că axele planetelor nu sînt invariabile. Această concluzie este menționată în cele mai multe tratate de specialitate. Întors în țară, Haret a publicat lucrări de popularizare și de pedagogie. Manualul lui de Trigonometrie din 1873 a servit în învățămînt pe o lungă perioadă. Haret a decedat la 17 decembrie 1912. Opera științifică a lui Spiru Haret este prima contribuție românească la progresul științei, înregistrată în revistele internaționale de referate [16], [23]. Teza lui a fost, mai ales, deseori analizată la noi [17], [24]—[29].

*David Emanuel*, născut în București la 31 ianuarie 1854, a urmat cursurile de matematici ale Facultății de științe din Paris (1873—1879). La 5 iulie 1879 a susținut acolo doctoratul, relativ la inversiunea integra-

lelor abeliene de speța a treia. La înapoierea în țară a fost profesor la Facultatea de științe (1880—1928), la Școala militară (1881—1890), la Școala de Poduri și Șosele (1881—1929). A publicat mai mult lucrări cu caracter didactic, de nivel universitar. Remarcabil este cursul său de Teoria Funcțiilor, publicat în 1924 și 1927. A decedat la 4 februarie 1941. Relativ la activitatea științifică a lui Emanuel s-a scris, mai ales la noi, de numeroase ori [16], [17], [23], [30]—[33].

*Constantin Gogu*, născut în Cîmpulung Muscel la 30 mai 1854, a studiat matematicile la Paris, luîndu-și doctoratul în 1882, cu o teză relativ la o inegalitate lunară de lungă perioadă. Astronomul englez Neison a anunțat existența unei importante inegalități în longitudinea mijlocie a Lunii, datorită acțiunii planetei Marte. C. Gogu a dovedit că aproximările făcute de Neison sînt nejuste. Raportîndu-se la teoria lui Delaunay asupra mișcării Lunii, el a arătat că în realitate acțiunea datorită planetei Marte este insensibilă. Teza a fost publicată în Analele observatorului din Paris și a fost reprodusă în 1885 în Memoriile Societății engleze de astronomie. Lucrarea lui C. Gogu este citată în tratatul de Mecanică cerească al lui Tisserand și în „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften". Întors în țară, C. Gogu a funcționat ca profesor la Facultatea de științe (1881—1897), la Școala de Poduri și Șosele (1887—1890), la Școala militară (1887—1894). Ca activitate științifică, el a mai publicat în 1884, în Analele observatorului din Paris, o lucrare în care a dovedit că critica pe care un astronom american o aducea teoriei lui Delaunay este neîntemeiată. În 1892, în Analele Academiei romîne, a publicat o lucrare despre raza de curbură a cicloidei alungite. Alte lucrări ale lui C. Gogu se referă la mult dezbătuta problemă în acel timp, a calendarului. C. Gogu a fost totodată un mare animator. Între altele, el a fundat în 1894 prima Societate de matematici și a fost președintele primei Societăți romîne de științe, în 1897. A decedat prematur, la 29 ianuarie 1897 [16], [34], [35].

*Dimitrie Bungețeanu*, născut în Cosovăț-Mehedinți la 26 octombrie 1860, a studiat matematicile la facultatea din Iași, luînd licența în 1884. A studiat apoi meteorologia la Paris, Hamburg, Berlin și Petersburg (1893—1896). La Paris și-a refăcut licența în matematici și a luat și licența în fizică, în 1896. În 1912 a susținut doctoratul în fizică la București. A predat matematicile la Facultatea de științe (1896—1908) apoi numai fizica, pînă în 1932; a mai funcționat ca profesor de matematici la Școala de Poduri și Șosele (timp de 8 ani), la Facultatea de arhitectură. A ținut unele comunicări originale de matematici la Societatea de științe și a publicat mai multe lucrări de fizică. A decedat la 22 mai 1932 [36].

*Ermil A. Pangrati*, născut în Iași la 21 iulie 1864, a studiat la Școala de Poduri și Șosele din Paris. A predat geometria descriptivă la Universitatea din Iași (1893—1894), la Universitatea din București (1894—1931), la Școala de arhitectură (1897 — probabil 1931). A fost decan al Facultății de științe (1905—1910) și în 1923; a fost rector al Universității (1911—1912) și (1923—1929); a fost director al Școlii de arhitectură din 1904. A decedat la 19 septembrie 1931 [37].

*Nicolae Coculescu*, născut la Craiova în 31 iulie 1866, a studiat matematicile la Paris, luînd licența în 1890. Acolo și-a susținut doctoratul,

în 1895, despre termenii de ordin ridicat în dezvoltarea funcției perturbatoare. A fost profesor la Facultatea de științe (1896—1937) și decan (1928—1932). A înființat primul observator astronomic din țară. Ca activitate științifică, prima notă publicată la Paris în 1892 se referă la stabilitatea mișcării în problema restrînsă a celor trei corpuri. Coculescu corectează astfel un rezultat publicat de Haerdtl. În teza sa el completează unele cercetări indicate sumar de Poincaré, relativ la evaluarea termenilor din seria funcției perturbatoare, care pot lua valori foarte mari, în cazul vitezelor unghiulare aproape comensurabile ale planetelor. Această contribuție romînească remarcabilă, la una dintre cele mai dificile probleme de astronomie, este citată de H. Poincaré în cursul său de Mecanică cerească. Coculescu a decedat în 5 noiembrie 1952 [16], [23].

*Andrei G. Ioachimescu*, născut la Ploiești în 31 octombrie 1868, a studiat la Școala de Poduri și Șosele din București, luînd diploma de inginer în 1892. Plecat în 1892 pentru specializare la Școala Centrală de Arte și Manufactură din Paris, Ioachimescu a urmat acolo și Facultatea de matematici, fiind licențiat în 1894. În afara sarcinilor sale tehnice, Ioachimescu a predat cursuri de algebră la Facultatea de științe (1896—1908) apoi mecanica la Școala Politehnică (1908—1937), unde sporadic ținuse cursuri și mai înainte. Ca matematician, Ioachimescu a publicat cîteva note remarcabile de algebră dar a depus mai mult o activitate științifică cu caracter didactic, fiind autorul unui curs de mecanică și al unor excelente Culegeri de probleme de algebră și de mecanică și unul dintre redactorii de bază ai Gazetei Matematice. A decedat la 13 martie 1943 [38].

*Paul Israel Suchar*, născut în București la 22 februarie 1869, a susținut în 1897, la Paris, teza de doctorat despre inversiunea integralelor eliptice și a continuat această lucrare într-o notă din 1898, în Buletinul Societății de Științe din București. În 1901, în Comptes rendus Paris, a publicat o notă despre ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți algebrici de speța a doua și a treia. Întors în țară, Suchar a funcționat la Facultatea de științe (1897—1902) și a publicat în Gazeta Matematică cîteva note interesante și mai multe probleme propuse de matematici superioare *). Apoi a plecat din țară, probabil din 1902. În 1907 era profesor la liceul din Tulle (Franța) iar în 1910 la Pau (Pirinei). A mai publicat unele note de cinematică, de teoria curbelor algebrice și altele cu caracter mai elementar. A decedat prematur la 10 iulie 1916 [16].

*Gheorghe Țițeica*, născut la Turnu-Severin în 4 octombrie 1873, a studiat la Facultatea de științe luînd licența în matematici în 1895. A continuat studiile la Paris (1896—1899) unde și-a refăcut licența (1897) și în 30 iunie 1899 a susținut doctoratul cu o lucrare despre sistemele triplu conjugate. Întors în țară, a fost profesor la Facultatea de științe (1899—1939), la Școala Politehnică (1927—1939). A fost decan al facultății (1919—1923). A fost vicepreședinte apoi secretar general al Academiei Romîne. A fost redactor de bază la revistele Gazeta Matematică și la Natura. A fost membru al multor academii străine; a participat cu lucrări și a prezidat numeroase congrese peste hotare; a ținut cursuri la Paris,

*) Asupra acestei manifestări mi-a atras atenția ing. G. Andonie.

Bruxelles. În teza sa, precum și în numeroase lucrări din anii 1898—1900, Țițeica demonstrează mai multe proprietăți remarcabile ale congruențelor speciale, ale ecuației Laplace, ale sistemelor triplu conjugate. Țițeica este primul matematician romîn care continuă în țară activitatea științifică începută din vremea studiilor de specializare. Această activitate bogată a fost analizată, în afara revistelor străine de referate, de mulți cercetători romîni [17], [39]—[44].

Activitatea profesorilor din prima perioadă nu se manifestă printr-o activitate științifică susținută (nu-l considerăm aici pe G. Țițeica). Mulți dintre ei, ca Em. Bacaloglu, Sp. Haret, D. Emanuel, C. Gogu, N. Coculescu, P. Suchar au făcut lucrări strălucite în străinătate, pe care nu le-au continuat în țară deoarece pentru crearea unui mediu intelectual adecvat, deci pentru promovarea unor absolvenți cu o cultură temeinică, acești profesori s-au împrăștiat în toate instituțiile de învățămînt unde era mare nevoie de cadre calificate și, deși erau prost plătiți, au pus toată priceperea și munca lor pentru o bună pregătire a studenților. Prima pleiadă de profesori trebuie judecată sub acest aspect.

★

În Școala de Poduri, Șosele și Mine, înființată definitiv la sfîrșitul anului 1867, după multe încercări sporadice, s-au ținut de asemenea cursuri de matematici superioare. De la început, și pe toată durata ei, în Școala Politehnică s-a dat o atenție deosebită pregătirii matematice a viitorilor ingineri.

La înființarea Școlii se preda geometria descriptivă și geometria analitică plană în anul întîi, aplicațiile geometriei descriptive, mecanica generală și aplicată în anul al doilea. Directorul Școlii și profesor de matematici era D. Petrescu.

Din 1875 era profesor de matematici al Școlii Em. Bacaloglu.

În 1877—1878 politehnica a fost atașată universității pentru cursurile paralele de matematici.

Din 1879 era profesor de matematici Gh. Kirilov. El a predat algebra superioară, trigonometria sferică, geometria analitică, calculul diferențial și integral, apoi, timp de 26 ani neîntrerupt, mecanica rațională, pînă în 1908 cînd a decedat.

În 1881, directorul Gh. Duca a introdus anul preparator în care, în afară de matematici elementare, se preda algebra superioară (care conținea și derivatele și variația funcțiilor) și geometria analitică. Aceste cursuri au fost ținute de Gh. Duca în 1881—1882 ; după votarea bugetului au fost numiți pentru această pregătire, cei mai distinși profesori de matematici de la facultate : Spiru Haret și David Emanuel. Haret a predat geometria analitică între 1881—1911 iar Emanuel, în afara matematicilor elementare, algebra și analiza din 1881 pînă în 1929.

Între 1887 și 1890 Const. Gogu a fost de asemenea profesor al Politehnicii.

În învățămîntul tehnic, întîlnim totodată numeroase cadre didactice, ingineri specializați la Paris, care au predat matematicile superioare, pe lîngă alte cursuri sau sarcini tehnice. Pînă la 1900 au funcționat Elie Ange-

lescu, care a predat calculul diferențial și integral (1867—1868) și mecanica (1870—1873); Edm. Beller a predat geometria analitică în 1873—1874; I. G. Cantacuzino a predat geometria analitică (1874—1878) și mecanica (1878); Mihai Caputineanu a predat geometria descriptivă mult timp (1867—1901); Const. Mănescu a predat geometria analitică și mecanica (1878); Leonida Pancu a predat geometria analitică (1868—1870); Const. Popescu a predat geometria analitică, la 1870; Nestor Urechiă a predat geometria descriptivă de la 1897 pînă pe la 1930; Const. Zeuceanu a predat mult timp mecanica (1866—1879).

Constantin Mănescu, născut la Fălticeni în 1852, este primul licențiat în matematici al facultății din Iași, din 1874. A absolvit apoi Școala de Poduri și Șosele din Paris.

Constantin Mironescu, directorul școlii (1899—1915) și profesor de statică grafică era de asemenea licențiat în matematici din Paris, din 1874. Tot acolo a absolvit Școala de Poduri și Șosele și a făcut și studii strălucite în drept.

Alte referințe despre acești profesori au fost publicate de I. Ionescu [3].

La Școala superioară de arhitectură, înființată în 1896, primii profesori de matematici superioare au fost E. Pangrati (1897—1931), G. Kirilov (1897—1908).

★

În unele școli militare se dădea de asemenea o atenție deosebită matematicilor. În general, pentru aceste cursuri se făcea apel la profesorii de matematici ai universității ori la ofițerii cu o înaltă calificare în studiile tehnice.

Astfel, din 1872 la Școala specială de Artilerie și Geniu nou creată, Iacob Lahovari preda cursul de analiză și de mecanică de la facultate; Gr. Melidon și apoi Dumitrescu Maican, de asemenea ofițeri, predau geometria descriptivă. Aceiași profesori țineau cursuri aproape asemănătoare la Școala Specială de Infanterie și Cavalerie. Din 1878, arhitectul Grigore Cerkez ținea cursul de geometrie descriptivă și mecanică, iar G. Kirilov a predat un curs complementar de matematici.

Din 1882, la Școala specială de Artilerie și Geniu, alături de Gr. Cerkez și G. Kirilov, predau matematicile superioare D. Emanuel și Sp. Haret. Emanuel a predat calculul infinitezimal pînă în 1890. Const. Gogu a fost profesor de geodezie de la 1887 pînă la desființarea Școlii, în 1894. G. Kirilov preda algebra și geometria analitică, în același timp *).

★

În cele de mai sus am vorbit numai despre București, fiindcă numai acolo și la Iași s-au ținut cursuri de matematici superioare. Dacă ne referim la întregul teritoriu al țării noastre, trebuie să menționăm și universitatea din Cluj, în limba maghiară, reînființată în 1872. Deși

*) Din datele extrase de Mihail Focșeneanu, din „Buletinul Oastei" și alte publicații de specialitate.

nu intră în subiect, totuși, pentru ca prezentarea activității didactice în ceea ce privește matematicile superioare în secolul trecut să fie mai completă, alături de studiul acad. Al. Myller și Ilie Popa [1], [2] vom da unele date și despre profesorii din Cluj.

*Brassai Samuel* (probabil 1797—1897) a fost una dintre cele mai proeminente personalități culturale ardelene din secolul trecut. A avut preocupări foarte variate. Era doctor în filozofie, renumit botanist, dar și apreciat economist și compozitor. A înființat și a condus mai multe reviste. A tradus elementele lui Euclid în limba maghiară și a scris o culegere de exerciții de algebră și alte lucrări de pedagogie, logică, filologie, latină etc. A fost prorector al universității. La facultate a predat de la înființarea ei matematicile elementare [16].

*Martin Lajos* a scris o lucrare despre suprafețele elicoidale. A fost profesor de calcul diferențial și integral și de astronomie din 1872.

Alți profesori de matematici, pînă în 1900, ai facultății au fost J. Farkas și M. Réthy, pentru algebră*).

*Farkas Julius* (1847—1930), doctor în filozofie din 1881, a fost profesor de matematici și fizică la universitatea din Cluj (1887—1915). A scris în 1900 o carte despre teoria vectorilor și alte lucrări.

★

Din cele expuse se desprinde concluzia că profesorii de matematici ai primei perioade, prin începutul lor remarcabil de activitate științifică, dar mai ales prin activitatea lor didactică devotată, au creat premisele activității matematice înfloritoare din Romînia secolului nostru.

Primită la redacție la 25 octombrie 1961

## ПЕРВЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ Б БУХАРЕСТЕ

### РЕЗЮМЕ

Первые такие лекции относятся, по крайней мере, к 1854-му году. В прошлом столетии читались у нас полные и сбъемистые курсы по классической высшей математике. Отмечаются, с некоторыми указаниями биографического характера и характера их научной и педагогической деятельности, первые преподаватели по высшей математике школ, предшествовавших созданию университета, а также факультета естествознания, политехнической школы и военных училищ Бухареста.

*) Din datele extrase de Margareta Frenkel din Anuarele Universității și alte publicații.

# LES PREMIERS COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES À BUCAREST

RÉSUMÉ

Les premiers cours en question datent au moins de 1854. Même au siècle passé on avait professé en Roumanie des cours complets et substantiels de mathématiques supérieures classiques. L'auteur énumère, avec des références biographiques et d'activité didactique et scientifique, les premiers professeurs de mathématiques supérieures qui avaient enseigné dans les institutions antérieures à l'Université, à la Faculté des Sciences, à l'Ecole Polytechnique et dans les écoles militaires de Bucarest.

BIBLIOGRAFIE *)

1. ALEX. MYLLER, *Schiţa dezvoltării învăţământului matematic la Universitatea din Iaşi.* Revista ştiinţifică V. Adamachi, **21**, 3 (1935).
2. ILIE POPA, *Dezvoltarea matematicii* (în volumul „Universitatea Al. I. Cuza", Iaşi, II), Bucureşti, 1960, 7.
3. ION IONESCU, *Istoricul învăţământului ingineriei în Romînia.* Bucureşti, 1932.
4. N. URECHIĂ, *Istoria Şcoalelor de la 1800 la 1864.* III. Bucureşti, 1901.
5. „ * „ Anuarul Universităţii din Bucureşti, **1**—**9** (1892—1901).
6. LOUIS LEFEBVRE DE FOURCY, *Tratatie asupra Geometriei Descriptive* (traducere de Al. Orăscu) I. Bucureşti, 1851.
7. „ * „ *Programa specială a învăţământurilor gimnaziale* (Biblioteca Academiei R.P.R.).
8. EM. BACALOGLU, *Elemente de Algebră.* Bucureşti, 1870.
9. FLORICA CÎMPAN, *Algebra lui Em. Bacaloglu.* Gazeta matematică, **44**, 393, 462 (1939).
10. ERMIL PANGRATI, *Curs de Geometrie Descriptivă* (litografiat). I, II. Bucureşti, 1899, 1900.
11. SPIRU HARET, *Lecţii de Statică. Lecţii de dinamică* (notiţe de curs luate de Cătănescu). Bucureşti, 1900.
12. DAVID EMMANUEL, *Lecţiuni de Teoria Funcţiilor.* I, II. Bucureşti, 1924, 1927.
13. N. COCULESCU, *Curs de Astronomie teoretică.* Bucureşti, 1929.
14. „ * „ Gazeta matematică, **1**—**6** (1895—1901).
15. POMPILIU ELIADE, *Din arhivele Sorbonei ştiinţifice.* Revista Generală a Învăţământului, **I**, 451 (1905).
16. I. C. POGGENDORFF, *Literarisch-biographisches Handwörterbuch...*, **3**—**4**, Leipzig, 1898, 1904.
17. P. SERGESCU, *Le développement des sciences mathématiques en Roumanie* (La vie scientifique en Roumanie). Bucarest, 1937.
18. C. I. ISTRATI, *Biografia şi lucrările lui Emanuel Bacaloglu.* Bucureşti, 1896.
19. ALEX. MYLLER, *La courbure de Bacaloglu.* Analele ştiinţifice ale Universităţii din Iaşi, **23**, 1 (1937); Gazeta matematică, **41**, 123 (1935).
20. FLORICA CÎMPAN, *Em. Bacaloglu.* Bucureşti, 1956.
21. A. VITU, *Cuvîntare rostită la înmormîntarea lui Dim. Petrescu.* Buletinul societăţii „Amicii ştiinţelor matematice", **1**, 126 (1896).
22. ANDREI IOACHIMESCU, *Profesorul Gheorghe Kirilov.* Gazeta matematică, **14**, 97 (1908).
23. „ * „ Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, **9** (1877); **11** (1879); **25** (1893—1894).
24. N. COCULESCU, *Invariabilitatea axelor mari ale orbitelor planetelor.* Natura, **2**, 230 (1907).
25. AL. MYLLER, *Spiru C. Haret.* Revista ştiinţifică V. Adamachi, **4**, 1 (1913).

*) În această listă nu sînt cuprinse toate lucrările consultate, ci numai acelea pe care le considerăm cele mai importante, dintre cele ce se referă la subiectul propus.

26. C. POPOVICI, *Spiru Haret*. Bul. Sect. Sc. Ac. R., 247—254 (1912—1913).
27. G. ȚIȚEICA, *Din viața și activitatea lui Spiru Haret*. Revista Generală a Învățământului, **9**, 353 (1914); Natura, **9**, 257—289 (1914); Numerus, **1**, 193 (1935),
28. V. VÂLCOVICI, *Spiru Haret*. Gazeta matematică, **48**, 241 (1943).
29. MIRCEA MALIȚA, *Manuscrisele tezei de doctorat a lui Spiru Haret*. Studii și cercetări de bibliologie, **1**, 278 (1945).
30. G. ȚIȚEICA, *Teza de doctorat a lui D. Emmanuel*. Gazeta matematică, **12**, 202 (1907).
31. AL. MYLLER, *Profesorul David Emmanuel. Rolul lui în dezvoltarea științelor matematice în Romînia*. Studii și cercetări științifice Iași, **I**, *2*, XLIII—LIII (1950).
32. — *Despre inversiunea integralelor eliptice*. Gazeta matematică și fizică, seria A, **5**, 535 (1953).
33. S. STOILOW, *David Emmanuel*. București, 1955.
34. N. COCULESCU, *Dare de seamă asupra lucrărilor de matematici ale lui C. Gogu*. Buletinul societății de Științe, **6**, 109 (1897).
35. I. IONESCU, *Istoricul înființării secției de matematici a Societății Române de Științe*. Gazeta matematică, **27**, 225 (1922).
36. D. BUNGETEANU, *Memoriu de titluri și activitate didactică și științifică*. București, 1910.
37. G. G. LONGINESCU, *Ermil A. Pangrati*. Natura, **22**, 8 (1933).
38. AL. STOENESCU, *Profesorul Andrei G. Ioachimescu*. Gazeta matematică, **48**, 90, 337, 433 (1943).
39. TRAIAN LALESCU, *Gheorghe Țițeica*. Numerus, **5**, 135 (1939).
40. G. CĂLUGĂREANU, D. V. IONESCU, *Comemorarea profesorului Gh. Țițeica de către Cercul matematic al Societății de Științe din Cluj*. Gazeta matematică, **44**, 449, 505, 561 (1939).
41. G. VRĂNCEANU, *Opera matematică a lui G. Țițeica*. Natura, **29**, 111 (1940).
42. G. T. GHEORGHIU, *Gheorghe Țițeica. Viața. Opera. Omul*. Gazeta matematică, **45**, 281, 339, 396, 425 (1940).
43. O. ONICESCU, G. VRĂNCEANU, *Viața și opera lui Gh. Țițeica* (œuvres de Georges Țițeica). București, 1941; Bulletin mathématiques, **43** (1941).
44. G. VRĂNCEANU, *Gheorghe Țițeica*. București, 1955.

M. A. NAIMARK, *Normed rings* (Inele normate). P. Noordhoff N. V., Groningen, 1959, 560 pag.

Deoarece există deja o recenzare în limba romînă a ediției sovietice a acestei cărți (Analele romîno-sovietice, seria de matematică și fizică, **12**, ser. 3, *1*(*24*), 1958, p. 136–138) ne vom mărgini să schițăm numai în linii mari conținutul cărții.

Cartea este împărțită în opt capitole.

Capitolul I, intitulat *Idei de bază din topologie și analiza funcțională*, este capitolul cel mai lung. El conține următoarele paragrafe: § 1. Spații liniare; § 2. Spații topologice; § 3. Spații liniare topologice; § 4. Spații normate; § 5. Spațiul Hilbert; § 6. Integrare pe spații local bicompacte. Acest capitol este nu numai un capitol introductiv, ci are un interes și în sine, el constituind o expunere excelentă a elementelor analizei funcționale *).

Capitolul II are titlul *Noțiunile și propozițiile fundamentale în teoria inelelor normate*. El conține următoarele paragrafe: § 7. Noțiuni algebrice fundamentale; § 8. Inele topologice; § 9. Inele normate; § 10. Inele simetrice. În § 7 se dau definițiile noțiunilor de inel, inel comuativ, inel cu unitate, centru, ideal, ideal maximal, radical, inel semisimplu, omomorfism și izomorfism de inele, reprezentări regulate ale inelelor, inel primitiv, precum și unele propoziții în legătură cu aceste noțiuni. În § 8 se dau elemente din teoria inelelor topologice generale. Asupra importanței în aplicații a acestei teorii autorul atrage atenția deja în prefața cărții. § 9 conține definiția și cîteva proprietăți elementare ale inelelor normate. În sfîrșit, § 10 este consacrat inelelor simetrice și funcționalelor pozitive pe inele simetrice. Autorul menționează că în literatură se folosește adesea o altă terminologie, anume în loc de *inel simetric* se folosește *inel cu involuție*.

Capitolul III, intitulat *Inele normate comutative*, conține șase paragrafe. În § 11 (Realizarea unui inel normat comutativ în forma unui inel de funcții) se expune teoria aplicației Ghelfandiene a unui inel normat comutativ în inelul funcțiilor continue pe spațiul bicompact al idealelor sale maximale. Celelalte paragrafe sînt: § 12. Omomorfismul și izomorfismul inelelor comutative; § 13. Frontiera inelară; § 14. Inele comutative complet simetrice; § 15. Inele regulate; § 16. Inele comutative complet regulate. Cu privire la terminologie, autorul menționează că în literatură inelele complet simetrice sînt adesea numite *inele simetrice*. Inelul simetric normat $R$ se numește complet regulat, dacă $\| x^* x \| = \| x \|^2$ pentru toate $x \in R$. În § 16 se dă teorema de reprezentare a lui Ghelfand și Naimark care stabilește că orice inel Banach comutativ complet regulat

*) Din acest motiv, la editarea de către I.S.R.S. a traducerii în limba romînă a cărții, acest capitol s-a publicat ca un volum separat.

cu unitate este complet izomorf cu inelul $C(\mathfrak{M})$ al tuturor funcţiilor continue pe spaţiul idealelor maximale ale inelului.

În capitolul IV, intitulat *Reprezentarea inelelor simetrice*, se expune teoria lui Ghelfand şi Naimark a reprezentării inelelor simetrice în inelul normat simetric $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al tuturor operatorilor liniari mărginiţi în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. § 17 (Noţiunile şi propoziţiile fundamentale în teoria reprezentărilor) conţine descrierea reprezentărilor în termenii funcţionalelor pozitive, rezultatele lui I. M. Ghelfand, M. A. Naimark şi R. Godement asupra reprezentărilor inelelor comutative complet regulate cu ajutorul măsurii spectrale, teoremele clasice de reprezentare spectrală a operatorilor hermitieni şi autoadjuncţi într-un spaţiu Hilbert, unele rezultate ale lui N. Dunford asupra operatorilor spectrali, şi, în sfîrşit, propoziţii despre reprezentările ireductibile şi funcţionalele pozitive. În § 18 (Scufundarea unui inel simetric într-un inel de operatori) se dă teorema lui I. M. Ghelfand şi M. A. Naimark, conform căreia completatul unui inel redus $R$ în raport cu o normă regulată minimală este complet izomorf cu un inel de operatori într-un spaţiu Hilbert. Celelalte paragrafe sînt : § 19. Funcţionale indecompozabile şi reprezentări ireductibile ; § 20. Aplicaţie la inele simetrice comutative ; § 21. Lema generalizată a lui Schur, şi § 22. Unele reprezentări ale inelului $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Capitolul V are titlul *Cîteva inele speciale*, şi conţine paragrafele următoare : § 23. Inele simetrice ; § 24. Inele complet regulate ; § 25. Inele duale ; § 26. Inele de funcţii cu valori vectoriale. În decursul acestui capitol nu se presupune nici o ipoteză de comutativitate.

Capitolul VI, intitulat *Inele grupale*, are, după părerea noastră, şi un interes în sine, el putînd servi drept o introducere excelentă în analiza armonică abstractă. § 27 (Grupuri topologice) începe cu definiţia şi proprietăţile elementare ale grupurilor topologice şi conţine apoi demonstraţia existenţei şi unicităţii unei integrale invariante la dreapta pe un grup local bicompact. Celelalte paragrafe sînt : § 28. Definiţia şi proprietăţile fundamentale ale unui inel grupal ; § 29. Reprezentări unitare ale unui grup local bicompact şi relaţia lor cu reprezentările inelului grupal ; § 30. Funcţii pozitiv definite ; § 31. Analiză armonică pe grupuri local bicompacte comutative ; § 32. Reprezentările grupurilor bicompacte. Sînt expuse pe larg frumoasele rezultate ale matematicienilor sovietici I. M. Ghelfand, D. A. Raikov, M. A. Naimark şi M. G. Krein, precum şi cele obţinute de A. Weil, R. Godement, I. E. Segal şi alţii.

Capitolul VII, *Inele de operatori în spaţiul Hilbert*, conţine o expunere a teoriei inelelor slab închise de operatori (denumite ulterior apariţiei cărţii lui Naimark, şi *inele von Neumann*) echivalenţei relative, dimensiunii relative şi factorilor. După un paragraf introductiv ( § 33. Diverse topologii în inelul $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), în § 34 (Subinele slab închise ale inelului $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) se dă o generalizare a următoarei teoreme fundamentale a lui von Neumann : Dacă $M$ este un inel slab închis conţinînd identitatea, atunci inelul $M''$ al tuturor operatorilor care comută cu toţi operatorii din $M$, coincide cu $M$. Celelalte paragrafe sînt : § 35. Echivalenţa relativă ; § 36. Dimensiune relativă ; § 37. Urmă relativă ; § 38. Structura şi exemple de unele tipuri de factori ; § 39. Inele unitare şi inele cu urmă. În ele se expun în special rezultatele lui J. von Neumann, F. J. Murray şi R. Godement.

În sfîrşit, capitolul VIII, *Descompunerea unui inel de operatori în inele ireductibile* conţine următoarele două paragrafe : § 40. Formularea problemei ; descompunerea unei funcţionale pozitive în funcţionale elementare ; § 41. Descompunerea unui inel de operatori. După cum arată autorul expunerea din acest capitol se face, în esenţă, după lucrările recente ale matematicianului japonez Tomita.

Cartea se termină cu două anexe scurte (I. Mulţimi parţial ordonate şi lema lui Zorn. II. Subreţele într-un spaţiu bicompact), o bibliografie bogată, un indice de notaţii (acesta se află numai în forma tradusă a cărţii) şi un indice de subiecte.

Apariția cărții *Inele normate* a lui M. A. Naimark este un eveniment de importanță fundamentală pentru dezvoltarea teoriei inelelor normate, ea constituind prima expunere sistematică a acestei vaste teorii, astăzi în plină înflorire. În același timp, expunerea este făcută la un înalt nivel științific și pedagogic.

În prefața la ediția americană a cărții sale, autorul arată că de la apariția în 1956 a ediției sovietice s-au publicat o serie de lucrări interesante, care constituie o contribuție esențială la teoria inelelor normate, însă, deoarece includerea acestora ar fi întîrziat prea mult apariția ediției americane, el a decis să se limiteze numai la corectarea unor erori de tipar.

Traducerea în limba engleză a cărții, dedicată lui M. A. Naimark, este semnată de Leo F. Boron. Traducerea este exactă și foarte îngrijită și are un stil agreabil.

*I. Singer*

JAN MIKUSINSKI, *Operational calculus* (Calculul operațional). 5th edition. Pergamon Press, London, 1959, 490 pag.

Lucrarea lui Jan Mikusinski *Calculul Operațional* conține în plus față de edițiile anterioare rezultatele obținute de autor între anii 1957—1959, precum și relațiile care există între calculul operațional și teoria distribuțiilor.

Cartea cuprinde 7 părți. În prima parte se introduce noțiunea de operator, plecînd de la operațiunea inversă produsului de compoziție a 2 funcții. Date fiind 2 funcții $f(t)$ și $g(t)$ continue, cu $g(t)$ neidentic nulă, pentru orice $t \geqslant 0$, se caută o funcție $h(t)$, astfel încît

$$f(t) = g(t) \star h(t) = \int_0^t g(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau.$$

Unicitatea funcției, dacă există, este asigurată de teorema lui Titchmarsh. Dacă nu există o funcție $h(t)$ care să satisfacă ecuația $f = g \star h$, atunci $h = \frac{f}{g}$ reprezintă un operator. Se definesc apoi operațiile cu operatori. Operatorii pot fi priviți ca o generalizare a noțiunii de funcție. Orice funcție din clasa $\mathcal{C}$ este un operator, dar nu orice operator este o funcție. Mulțimea operatorilor formează un corp, avînd numerele 0 și 1 ca element nul și unitate. Din acest corp face parte operatorul integral $l = \{1\} = \{Y\}^{(1)}$ unde $Y$ este funcția lui Heaviside, cu $l^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \left\{\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right\}$ formulă care se generalizează pentru orice exponent $\lambda$, real și $> 0$. Tot din corpul operatorilor face parte operatorul diferențial $s = \frac{1}{l}$. Există relația

$$a^{(n)} = s^n\, a - a^{(n-1)}(0) - s\, a^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1}\, a(0),$$

dacă $a(t)$ are derivate pînă la ordinul $n$, continue pentru $t \in [0 + \infty)$.

Un operator rațional în $s$ de forma $\frac{A_m s^m + \ldots + A_0}{B_n s^n + \ldots + B_0}$, $A_m$, $B_n$ numere reale, $m < n$, poate fi descompus în elemente simple $\frac{1}{(s-\alpha)^p}$, $\frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^p}$ etc. care pot fi reprezentate cu ajutorul funcțiilor exponențiale și trigonometrice, de exemplu

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{\alpha t}\right\}, \quad \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t\} \text{ etc.}$$

Se notează $\{f(t)\}$ = funcţia $f(t)$; $f(t)$ = valoarea funcţiei în punctul $t$. Tot în partea întîia se introduce operatorul de translaţie $h^\lambda = s\{y_\lambda(t)\}$, cu $Y_\lambda(t)$ funcţia lui Heaviside. Avem

$$h^\lambda\{f(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 \leqslant t < \lambda; \\ f(t-\lambda) & \text{pentru } 0 \leqslant \lambda < t. \end{cases}$$

Operatorul de translaţie este tot una cu funcţia lui Dirac.

În partea II-a se introduc şirurile de operatori şi convergenţa operaţională: un şir de operatori $a_n$ este convergent dacă divizat cu un operator $q \neq 0$ devine un şir de funcţii din clasa $\mathcal{C}$, convergent în orice interval finit. Vom avea $\lim_{n\to\infty} a_n = q \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{q}$. Dacă operatorii sînt funcţii din clasa $\mathcal{C}$ şi şirul lor este aproape uniform convergent, şirul tinde către aceeaşi limită şi în sensul operaţional, dar un şir convergent în sensul operaţional nu este întotdeauna aproape uniform convergent. Deci pentru şirurile de funcţii, convergenţa operaţională este mai generală decît convergenţa aproape uniformă.

În partea a III-a se introduce noţiunea de funcţie operaţională, funcţie parametrică, continuitatea şi derivabilitatea lor: funcţia care pentru orice valoare a lui $\lambda$ face să corespundă un operator, va fi numită funcţie operaţională. Funcţia operaţională ce se reduce la o funcţie de $t$, pentru un $\lambda$ fixat, poartă numele de funcţie operaţională parametrică, $f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$. Funcţia operaţională va fi continuă în intervalul finit $\mathcal{J}$, dacă poate fi reprezentată prin produsul dintre operatorul $q$ şi o funcţie parametrică $f_1(\lambda)$ continuă în sensul obişnuit în domeniul $D$ ($\lambda \in \mathcal{J}$, $0 \leqslant t < \infty$), adică dacă putem scrie $f(\lambda) = q f_1(\lambda)$.

Se dau exemple de funcţii continue în sensul operaţional fără să fie continue în sensul obişnuit.

O funcţie operaţională $f(\lambda)$ va fi continuu diferenţiabilă în intervalul finit $\mathcal{J}$, dacă putem scrie $f(\lambda) = q f_1(\lambda)$, $q \neq 0$, operator şi $f_1(\lambda)$ o funcţie parametrică ce are o derivată parţială $\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} f_1(\lambda, t)\right\}$ continuă în tot domeniul $D$ şi derivata va fi $f'(\lambda) = q\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} f_1(\lambda, t)\right\}$.

Derivata unei funcţii numerice este totdeauna o funcţie numerică şi în acest caz derivata în sensul obişnuit coincide cu derivata în sensul operaţional. Proprietăţile derivatei sînt aceleaşi ca pentru derivata obişnuită. Se introduce apoi funcţia exponenţială ca soluţie a ecuaţiei $x'(\lambda) = \omega\, x(\lambda)$ cu condiţia $x(0) = 1$ şi $\omega$ un operator arbitrar. Funcţia operaţională $h^\lambda = sH_\lambda$ ($\lambda \geqslant 0$) satisface condiţiilor $(h^\lambda)' = -sh^\lambda$ şi $h^0 = 1$. Deci, $h^\lambda = e^{-\lambda s}$.

Se consideră mai general funcţia $e^{-\lambda s^a}$ unde $\lambda$ este real, $s^{-a} = \left\{\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right\}$ şi $s^0 = 1$. Această funcţie este soluţia ecuaţiei

$$Y'(\lambda) = -s^a y(\lambda) \text{ cu } Y(0) = 1.$$

Dacă $a = 0$, exponenţiala se reduce la funcţia numerică $e^\lambda$. Dacă $0 < a < 1$, funcţia exponenţială $(-\lambda s^a)$ poate fi exprimată ca funcţie de $t$, pentru orice $\lambda$, dar nu se cunoaşte încă expresia explicită cu ajutorul funcţiilor cunoscute. În cazul $a > 1$, exponenţiala $e^{-\lambda s^a}$ nu există, se deduce din faptul că ecuaţia diferenţială $x'(\lambda) = -s^a x(\lambda)$ nu are altă soluţie decît $x(\lambda) = 0$. Pentru $a = 1$, funcţia $e^{-\lambda s}$ nu există decît pentru $\lambda$ real. Se arată ca exemplu că funcţia $e^{i\lambda s}$ nu are sens.

Pentru unii operatori $\omega$, o funcție identic nulă este singura soluție a ecuației $x' = \omega x$ și în consecință condiția $x(0) = 1$, la care trebuie să satisfacă orice exponențială, nu mai poate fi satisfăcută.

Operatorul $\omega$, pentru care exponențiala $e^{\omega\lambda}$ există, va fi numit operator logaritmic.

Fie ecuația diferențială

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(\lambda) \tag{1}$$

cu $a_m, \ldots, a_0$ operatori arbitrari și $f(\lambda)$ o funcție operațională continuă. Se consideră întîi ecuația omogenă

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{2}$$

și se caută soluții de forma $x = e^{\lambda u}$. Se ajunge la ecuația caracteristică

$$a_m u^m + \ldots + a_0 = 0. \tag{3}$$

Nu întotdeauna această ecuație poate fi rezolvată și în cazul cînd se poate rezolva și rădăcinile sînt operatorii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, nu întotdeauna există funcțiile $e^{\lambda\omega\mu}$. Dacă rădăcinile sînt operatori logaritmici, atunci avem $n$ funcții $x_1(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)$ care vor fi soluții ale ecuației (2). Dacă $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt operatori arbitrari, atunci și funcția $x(\lambda) = C_1 x_2(\lambda) + \ldots + C_n x_n(\lambda)$ va fi o soluție a ecuației (2). Aceasta va fi soluția generală a ecuației diferențiale date. Numărul constantelor arbitrare din soluția generală va fi egal cu numărul rădăcinilor logaritmice ale ecuației caracteristice.

Se clasifică ecuațiile diferențiale în trei tipuri:

I: ecuația logaritmică, toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt logaritmice; II: este ecuația pură, dacă nici una din rădăcini nu este logaritmică; III: ecuația mixtă, unele rădăcini sînt logaritmice, altele nu. În cazul ecuațiilor logaritmice, soluția generală depinde de un număr de constante egal cu ordinul ecuației, în celelalte cazuri numărul constantelor este mai mic. Se dă următoarea teoremă de unicitate: pentru operatorii dați $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ și pentru punctul $\lambda_0$ din intervalul $(\alpha, \beta)$ există cel mult o funcție $x(\lambda)$ care satisface în $(\alpha, \beta)$ ecuația (1) și condițiile $x(\lambda_0) = K_0$, $x'(\lambda_0) = K_1, \ldots, x^{(m-1)}(\lambda_0) = K_{m-1}$. Numărul condițiilor impuse pentru a defini în mod unic soluția este egal cu numărul rădăcinilor logaritmice. Considerînd ecuația cu derivate parțiale

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda, t) = \varphi(\lambda, t) \tag{4}$$

și utilizînd formulele care dau pe $\{x^{(\mu)}(t)\}$, se ajunge la ecuația diferențială $a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f(\lambda)$, cu $a_m, \ldots, a_0$ operatori. Pentru a determina funcția $f(\lambda)$ este suficient a cunoaște forma, într-un interval dat $\alpha < \lambda < \beta$, a funcțiilor

$$g_p(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{p} a_{\mu,\, n-p+\nu} x_{\lambda^\mu t^p}(\lambda, 0), \tag{5}$$

care determină comportarea funcției $x(\lambda, t)$ pe axa $\lambda$. În unele cazuri condiția (5) poate fi înlocuită prin condițiile

$$x_{t^p}(\lambda_1\ 0) = b_p(\lambda), \quad p = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Acestea sînt condițiile lui Cauchy. Dar numai în cazul cînd condițiile (5) și (6) sînt echivalente se poate face această înlocuire. În cazul contrar, ecuația va fi numită restrictivă. Se dă

următorul criteriu : ecuația dată nu este restrictivă, adică condițiile (5) și (6) sînt echivalente, dacă și numai dacă $a_{1n} = a_{2n} = \ldots = a_{nm} = 0$ adică nici o derivată parțială al cărui ordin de derivare în raport cu $t$ este mai mare, nu este o derivată mixtă. Oricărei ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți i se poate aplica calculul operațional și este întotdeauna posibil de a găsi rădăcinile logaritmice ale ecuației caracteristice și de a obține funcțiile exponențiale corespunzătoare. Cînd ecuația caracteristică nu are nici o rădăcină logaritmică, ecuația operațională va fi o ecuație pură și în acest caz nu este restrictivă. În cazul acestei ecuații, condițiile pe axa $\lambda$ vor fi condițiile lui Cauchy.

În cazul cînd pentru ecuația (4) se dau condițiile (5) și în plus condițiile

$$x(\lambda_1, t) = V_1(t) \text{ și } x(\lambda_2, t) = V_2(t), \text{ pentru } 0 \leqslant t < \infty \tag{7}$$

$V_1$ și $V_2$ funcții cunoscute de $t$, vom spune că avem o problemă mixtă. În acest caz, dacă ecuația caracteristică are cel puțin 2 rădăcini logaritmice $w_1$ și $w_2$, soluția ecuației (4) în condițiile (5) și (7) există și este unică, dacă și numai dacă $w_2 - w_1 \neq \frac{2k\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $k = 1, 2 \ldots$ și dacă ecuația caracteristică nu are alte rădăcini logaritmice. Dacă are o singură rădăcină logaritmică, atunci condițiile (5) și numai una din condițiile (7) sînt suficiente pentru unicitatea soluției iar dacă nu are nici una, condițiile (5) sînt suficiente pentru existența și unicitatea soluției. În partea a V-a a cărții se definește integrala dintr-o funcție operațională. Proprietățile integralei sînt aceleași ca ale integralei definite la care se reduce în cazul funcțiilor numerice.

Dacă $f(\lambda)$ ia valori numerice în intervalul $[\lambda_1, \lambda_2]$ cu $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ atunci

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} f(t) \text{ pentru } \lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_2 \\ 0 \text{ în afara acestui interval.} \end{cases}$$

Deci operatorul de translație $e^{-\lambda s}$ are aceleași proprietăți ca și funcția lui Dirac.

Se definește integrala improprie și se consideră în particular integrala $\int_0^{\infty} e^{\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \{f(t)\}$. Dacă $s$ nu este un operator ci un număr complex oarecare, această integrală dacă este convergentă definește o funcție analitică de $s$, $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ care este transformata Laplace a funcției $f(t)$. Există o asemănare formală între metoda transformării lui Laplace și calculul operațional, însă aceste metode nu sînt echivalente. Nu întotdeauna transformata Laplace poate fi aplicată. De exemplu, în ecuația $x'(t) - x(t) = (2t - 1)\, e^{t^2}$, integrala $\int_0^{\infty} e^{-ts} (2t - 1)\, e^{t^2}\, dt$ este divergentă deci metoda transformatei Laplace nu poate fi aplicată în timp pe calculul operațional poate fi aplicat cu succes.

În partea a VI-a a cărții se definesc distribuțiile și se compară cu operatorii. Unele distribuții pot fi considerate operatori și viceversa. Se definesc operatorii distribuționali, care sînt operatorii ce pot fi scriși sub forma $h^{-\lambda} \frac{f}{t^k}$ cu $f \in \mathcal{C}$, $h^{-\lambda}$ operatorul de translație și $t = \{1\}$.

Se consideră șirul $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de operatori distribuționali, astfel încît $f_n$, $f_{n+1}$ coincid în intervalul $(-n, n)$. Limita acestui șir va fi prin definiție o distribuție $[f_n]$. Un operator distribuțional este o distribuție, orice funcție local integrabilă este o distribuție, care poate fi privită ca o generalizare a operatorului distribuțional.

În distribuția $[f_n]$, operatorii distribuționali $f_n$, $f_{n+1}$ coincid unul cu altul în intervalul $(-n, n)$ deci și operatorii $sf_n$ și $sf_{n+1}$ vor coincide în $(-n, n)$. Sîntem conduși astfel la definiția derivatei distribuției $[f_n]$ ca distribuția $[sf_n]$, adică $s[f_n] = [sf_n]$. După această definiție orice distribuție este derivabilă.

Se arată că teoria distribuțiilor dată aici este echivalentă cu celelalte teorii cunoscute. Anume, se arată că distribuția $[f_n]$ este în orice interval mărginit $(\alpha, \beta)$ derivata de ordin $k$ a unei funcții continue $f$.

Atît operatorii cît și distribuțiile sînt generalizări ale funcțiilor, astfel încît într-un anumit sens derivarea lor să fie totdeauna posibilă. Corespondența dintre o clasă mare de distribuții și operatori, poate fi făcută cu ajutorul operatorilor distribuționali. Există însă distribuții care nu sînt operatori, de exemplu $[h^{-n}l]$ și operatori cari nu sînt distribuții, exemplu $e^{\sqrt{s}}$.

Se dă următorul criteriu : o distribuție și un operator sînt identice, dacă sînt date de un șir de operatori distribuționali care converge operațional către operatorul respectiv și distribuțional către distribuție.

Se arată în continuare că nu se poate introduce în spațiul operatorilor o normă, astfel ca să dea un spațiu Banach, în care convergența să fie echivalentă cu convergența operațională.

Tratatul conține foarte multe exemple, multe aplicații în electricitate, la ecuația coardei, ecuația căldurii și ecuația telegrafistului.

Ultima parte conține formule din calculul operațional, table de funcții și aplicații în electrotehnică.

*Gabriela Teodorescu*

JAMES H. BATCHELOR, *Operations research : an annoted bibliography* (Studiul operațiilor : bibliografie adnotată). 2nd edition. Saint Louis University Press, Saint Louis, 1959, 800 pag.

Lucrarea de față este o continuare a volumului „Operations research : a preliminary annoted bibliography" (Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, 1952) și cuprinde lucrări apărute pînă în anul 1957.

Volumul de față cuprinde peste 4 000 de titluri, majoritatea lucrărilor fiind nu numai indicate, ci și recenzate. După cum arată autorul în prefață, au fost incluse în volum lucrări în care se menționează că ele tratează probleme ale mult discutatei discipline, pe care unii o denumesc cercetare operațională sau care pot fi aplicate aici. Autorul a emis în general recenzarea lucrărilor aparținînd unor discipline înrudite, ca programarea liniară și neliniară, teoria jocurilor etc.

Volumul cuprinde indicații referitoare la absolut toate lucrările apărute în următoarele reviste : Journal of the Operations Research Society of America, Operations Research Quarterly, Naval Research Logistic Quarterly, Management Science, Management's Operations Research Digest, Bolletino del Centro per la Ricerca Operativa, Revue de Recherche Operationnelle, Unternehmensforschung, Journal of the Operations Research Society of Japan Keiei Kagaku (Management Science), ORA News Letter. De asemenea sînt indicate multe lucrări apărute în volume speciale consacrate diferitelor congrese, colocvii și simpozioane de cercetare operațională, precum și în diferite reviste de matematică, economie, inginerie etc.

Cu regret trebuie să observăm că lipsesc indicații referitoare la lucrările de specialitate apărute în Uniunea Sovietică și în țările de democrație populară. Astfel, de exemplu, numele

matematicianului sovietic L. V. Kantorovici, unul din fondatorii metodelor de aplicare a matematicii în economie, lipseşte din volum.

Marea majoritate a titlurilor sînt însoţite de scurte recenzii. Aceste recenzii sînt alcătuite de autorul volumului, excepţie fac acele lucrări care cuprind rezumate alcătuite chiar de autori, pentru acestea se reproduce rezumatul.

Volumul se încheie cu un indice alfabetic de autori şi probleme.

Din păcate aranjarea lucrărilor indicate s-a făcut după ordinea alfabetică şi nu pe baza unei clasificări pe subiecte. De asemenea, ar fi fost de dorit existenţa unei clasificări zecimale a lucrărilor incluse. Lipsa acestora obligă cititorul să parcurgă întregul volum, de 800 de pagini, pentru a putea găsi lucrările care tratează un anumit grup de probleme.

Cu toate lipsurile menţionate, considerăm că această bibliografie este de un real folos tuturor specialiştilor interesaţi în problemele aplicării matematicii în economie.

*P. Ivănescu*

OTAKAR BORŮVKA, *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie* (Bazele teoriei grupoidelor şi grupurilor). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, VI + 198 pag.

Această carte are la bază concepţia autorului, potrivit căreia teoria grupoizilor conţine două aspecte fundamentale : pe de o parte, teoria descompunerilor în mulţimi, creată de P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin, O. Borůvka şi Ore în anii 1937–1942, iar pe de altă parte noţiunea de omomorfism.

Lucrarea este formată din trei capitole intitulate : *Mulţimi, Grupoizi, Grupuri*. În primul capitol, autorul dezvoltă în special teoria descompunerilor în mulţimi, creîndu-şi astfel aparatul de cercetare ce va fi utilizat în capitolele următoare. De altfel, cele trei capitole sînt împărţite în secţiuni analoge, problemele din capitolul I fiind reluate în capitolul II în cazul special al grupoizilor, iar în capitolul III în cazul grupurilor.

După cîteva noţiuni introductive, capitolul I defineşte noţiunea de *descompunere într-o mulţime*. Printr-o descompunere $\overline{A}$ a unei mulţimi $G$, se înţelege o partiţie (cf. N. Bourbaki) a unei submulţimi $G_0 \subseteq G$. Submulţimile $a \subseteq G_0$ care formează partiţia se numesc *elementele descompunerii* $\overline{A}$. Dacă $G_0 = G$, se spune că descompunerea $\overline{A}$ este *pe* mulţimea $G$.

Date fiind două descompuneri $\overline{A}$, $\overline{B}$, într-o aceeaşi mulţime $G$, se spune că $\overline{B} \leqslant \overline{A}$ ($\overline{B}$ este o *rafinare* a lui $\overline{A}$), dacă fiecare element din $\overline{A}$ este reuniunea unor elemente din $\overline{B}$ şi fiecare element din $\overline{B}$ este inclus (ca mulţime) într-un element din $\overline{A}$. Se arată că mulţimea descompunerilor *pe* o mulţime dată $G$ formează o latice faţă de relaţia de ordine parţială $\leqslant$.

Se studiază apoi unele tipuri speciale de descompuneri : semilegate şi legate, adjuncte, modulare şi în special descompunerile complementare.

Paragrafele următoare sînt consacrate aplicaţiilor de la o mulţime la alta. Dacă $g$ este o aplicaţie a mulţimii $G$ pe o mulţime $G^*$, atunci familia de mulţimi $\{g^{-1}(y)\}_{y \in G^*}$ formează o descompunere pe mulţimea $G$, numită *descompunerea ataşată aplicaţiei* $g$. Noţiunea de aplicaţie poate fi deci legată de aceea de descompunere şi autorul studiază astfel de legături.

O atenţie specială este acordată permutărilor şi aplicaţiilor multivoce. Teoria relaţiilor binare definite pe o mulţime poate fi subsumată teoriei aplicaţiilor multivoce în felul următor : relaţiei binare $x \rho y$ i se ataşează aplicaţia multivocă $x \to \{y \mid x \rho y\}$. Autorul exemplifică această observaţie în cazul relaţiilor de echivalenţă şi al relaţiilor de ordine parţială.

Capitolul I se încheie cu o teorie a şirurilor de descompuneri pe mulţimi, adică a familiilor $\{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n\}$ de descompuneri, definite pe o aceeaşi mulţime $G$, cu proprietatea că $\overline{A}_1 \geqslant \ldots \geqslant \overline{A}_n$. Se consideră în particular problema rafinărilor. Se schiţează o interesantă aplicaţie în teoria clasificărilor ştiinţifice.

Capitolul II începe cu definirea noţiunii de grupoid (mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie binară) şi cu definirea tuturor noţiunilor clasice legate de grupoizi.

Se studiază apoi *descompunerile generatoare*, adică descompunerile $\overline{A}$ ale unui grupoid $\mathfrak{G}$, avînd proprietatea că pentru oricare două elemente $\overline{a}, \overline{b}, \in \overline{A}$, există un element $\overline{c} \in \overline{A}$, astfel încît $\overline{ab} = \{ab \mid a \in \overline{a}, b \in \overline{b}\} \subseteq \overline{c}$. O descompunere generatoare se poate organiza ca grupoid prin următoarea lege de compoziţie : $\overline{a} \bullet \overline{b} = \overline{c}$, unde $\overline{c}$ are proprietatea $\overline{ab} \subseteq \overline{c}$ (se vede imediat că $\overline{c}$ este unic determinat). Se spune că acest grupoid este un *factoroid în grupoidul* $\mathfrak{G}$. Dacă $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ sînt doi factoroizi în grupoidul $\mathfrak{G}$, se spune că $\overline{\mathfrak{B}}$ este o rafinare a lui $\overline{\mathfrak{A}}$ şi se scrie $\overline{\mathfrak{B}} \leqslant \overline{\mathfrak{A}}$, dacă descompunerile ataşate $\overline{A}$, $\overline{B}$, satisfac relaţia $\overline{B} \leqslant \overline{A}$. În acest cadru sînt reluate unele proprietăţi studiate în capitolul I. Ca aplicaţie, se obţin teoreme de omomorfism pentru grupoizi şi se studiază cîteva *deformaţii* (omomorfisme pe) speciale. Se studiază şirurile de factoroizi.

Se consideră apoi cîteva tipuri particulare importante de grupoizi (asociativi, cu diviziune, cu element unitate, cu reguli de simplificare, grupoizi Brandt) şi se dau cîteva noţiuni de teoria laticilor.

Toate aceste noţiuni şi proprietăţi sînt reluate în capitolul III în cadrul grupurilor, unde ele se simplifică, obţinîndu-se astfel rezultatele clasice ale teoriei grupurilor. Următoarele subiecte sînt expuse : noţiuni de bază ale teoriei grupurilor, clase de resturi în grupuri şi descompuneri în clase de resturi, cu proprietăţile lor. Autorul reia descompunerile particulare studiate în capitolul I, obţinînd ca aplicaţii teorema celor patru grupuri şi teorema celor cinci grupuri.

Paragrafele următoare sînt consacrate divizorilor normali, grupurilor factor şi teoremelor de omomorfism. În ultimele pagini se studiază grupurile ciclice.

Lucrarea mai conţine o bibliografie relativă la descompuneri în mulţimi şi relaţia de echivalenţă, o listă a noilor cărţi de teoria grupurilor şi un index alfabetic.

Terminologia întrebuinţată diferă adeseori de cea clasică, dar aceasta nu îngreunează cititul deoarece toate definiţiile sînt expuse clar şi precis. De altfel, înţelegerea materialului este uşurată de numeroase exemple şi exerciţii menite să stimuleze totodată înţelesul cititorului, căruia nu i se cer nici un fel de cunoştinţe prealabile.

Autorul reuşeşte să dea o tratare unitară, originală şi interesantă a materialului expus, lăsînd în acelaşi timp deschise noi căi de dezvoltare a teoriei sale. Ar fi foarte util ca această lucrare să fie tradusă şi în limba romînă.

*S. Rudeanu*

KENNETH J. ARROW, LEONID HURWICZ, HIROFUMI UZAWA, *Studies in Linear and Non-Linear Programming* (Studiul programării liniare şi neliniare). Stanford University Press, Stanford, California, 1958, 230 pag.

Volumul de faţă este o culegere de studii privind teoria programării liniare şi neliniare. Lucrarea constă din trei părţi. În prima parte a lucrării se studiază teoreme de existenţă a soluţiilor şi extinderea lor pentru spaţii infinit dimensionale ; partea a doua se ocupă de metoda gradientului pentru rezolvarea unor probleme de extremum cu legături ; a treia parte este con-

sacrată găsirii unor algoritme speciale pentru rezolvarea anumitor probleme frecvente de programare liniară și neliniară.

Toate articolele cuprinse în prezenta culegere sînt rezultatele unor cercetări originale și se publică pentru prima oară aici.

Prima parte a volumului se intitulează *Teoreme de existență* și conține patru articole. Primul articol, „O teoremă asupra conurilor poliedrale convexe", scris de H. Uzawa, este consacrat determinării unor formule care să exprime în mod explicit vîrfurile unui con poliedral convex, reprezentat ca o intersecție de semispații. În următorul articol, „Teorema lui Kuhn și Tucker din programarea concavă", scris tot de H. Uzawa, se redemonstrează în condiții diferite de cele cerute de Kuhn și Tucker, că în anumite condiții problemele de programare concavă se reduc la determinarea unui punct șa a unei anumite funcții. L. Hurwicz face un studiu sistematic al programării în spații liniare generale în articolul său „Programarea în spații liniare". Principalele rezultate ale acestui capitol sînt generalizările lemei Minkovski-Farkas și a teoremei Kuhn-Tucker pentru programarea în spații liniare. Într-un alt articol „O notă asupra punctelor șa Lagrangiene", L. Hurwicz și H. Uzawa aduc importante completări la rezultatele capitolului precedent.

Articolele cuprinse în partea a doua se ocupă de metoda gradientului pentru rezolvarea problemelor de programare în care funcția de optimizat și relațiile restrictive sînt concave. În primul articol din această parte a volumului, K. J. Arrow și L. Hurwicz studiază metoda gradientului pentru programarea concavă ; acest capitol este consacrat obținerii unor rezultate cu caracter local. În capitolul următor, H. Uzawa studiază probleme de stabilitate globală în cazul strict concav și apoi K. J. Arrow și L. Hurwicz dau cîteva teoreme de convergență pentru programarea concavă, în legătură cu anumite probleme de alocare a resurselor. Thomas Marschak, dă o aproximare a sistemelor de ecuații diferențiale din capitolele precedente cu un sistem de ecuații de diferențe. În articolul „Metode iterative în programarea concavă", H. Uzawa formulează metoda gradientului cu ajutorul ecuațiilor de diferențe și studiază stabilitatea soluțiilor. În ultimul capitol al acestei părți, K. J. Arrow și R. M. Solow studiază metoda gradientului, ipoteza de concavitate a funcțiilor fiind înlocuită cu alte condiții care să garanteze convergența procesului de aproximări succesive.

Partea a treia a lucrării este consacrată elaborării unor metode speciale pentru rezolvarea anumitor tipuri de probleme de programare liniară și pătratică. Primul capitol din această parte este scris de H. Uzawa și propune o metodă elementară pentru rezolvarea problemelor de programare liniară, bazată pe o teoremă privind punctele extreme ale unui con poliedral convex ; această metodă permite calcularea tuturor soluțiilor optime ale problemei. Capitolul următor, scris de K. J. Arrow și S. Karlin se ocupă de o problemă de determinare a prețurilor. În capitolul următor, K. J. Arrow și S. M. Johnson elaborează un algoritm pentru rezolvarea unei probleme economice frecvent întîlnite, privind folosirea mașinilor unei fabrici pentru realizarea unei anumite sarcini. Ultimul capitol, scris de H. B. Chenery și H. Uzawa, studiază o problemă de programare neliniară privind legătura între ramurile industriale ; modelul studiat este o generalizare a sistemului lui Leontiev.

Cartea este scrisă la un înalt nivel matematic și studiază probleme din cele mai importante privind aplicarea matematicii în economie.

*P. Ivănescu*

FRITZ EMDE, *Tafeln elementarer Funktionen. Tables of elementary functions* (Tabele de funcţii elementare). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959, XII + 181 pag.

Lucrarea conţine multe tabele şi grafice necesare calculului.

Capitolul I conţine tabele de puteri (rezultatul fiind dat cu 5 cifre semnificative) :

$x^2, x^3, \ldots, x^{15}$ pentru $0{,}50 \leqslant x \leqslant 5$ ;

$x^{0{,}05}, x^{0{,}10}, \ldots x^{0{,}95}$ pentru $0{,}5 \leqslant x \leqslant 5$ şi $x = 10,\ x = 0{,}1$ ;

$x^2$ şi $\frac{1}{x}$ pentru $0{,}4 \leqslant x \leqslant 4$ ;

$x^3$ şi $\frac{1}{x^2}$ pentru $0{,}250 \leqslant x \leqslant 2{,}5$ ;

$2^x$ pentru $x = 1, 2, \ldots, 45$ ;

$3^x$ pentru $x = 1, 2, \ldots, 36$ ;

$5^x, 7^x, 11^x$ pentru $x = 1, 2, \ldots, 27$ ;

$\sqrt{x}, \sqrt{10x}, \sqrt[3]{x/10}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{10x}$ pentru $0{,}25 \leqslant x \leqslant 2{,}50$ ;

$\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ pentru $x = 2, 3, 5, 6, 7, 10$ ;

$\sqrt[4]{x}, \sqrt[5]{x}$ pentru $x = 2, 3, 5$.

Tot în acest capitol se dau grafice în relief sau plane pentru :

$z = x^y$ cu $x > 0, \mathcal{I}m\ y = 0$ ;

$x^{-1}, x^2, x^3, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ ;

$z = x^y$ cu $|y| < 1$ sau $|y| < 15$ la scară logaritmică. Capitolul II conţine tabele de descompunere în factori primi, $n!$, $\frac{1}{n!}$, $n!!$, $\frac{1}{n!!}$ pentru $n = 1, 2, \ldots, 20$, multipli lui $M = \log e$, $\frac{1}{M}$, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$, pentru factori de multiplicare 1, 2, ..., 100.

Capitolul III reprezintă tabele auxiliare numerice şi grafice de calcul cu numere complexe pentru :

$$\frac{1}{1+ix}, \frac{1}{x+i}, \sqrt{1+ix}, \sqrt{-1+ix}, \sqrt{x+i}, \sqrt{-x+i}, 1+ix, x+i,$$

$$1 + re^{i\frac{\pi}{2}\rho}, \quad r + e^{i\frac{\pi}{2}\rho}.$$

Capitolul IV reprezintă tabele numerice şi grafice pentru rezolvări de ecuaţii de gradul II sub forma : $x^2 + px - q^2 = 0$.

În capitolul V se dă rezolvarea numerică și grafică pentru ecuația de gradul III scrisă sub forma $1 + au^2 = u^3 + bu$, $y^3 + 2 = 3py$.

În capitolul VI se dă rezolvarea ecuației de gradul IV numeric și grafic. Pentru ecuația $u^4 + a u^3 + b u^2 + c u + d = 0$ se dau grafic rădăcinile reale pentru $d = \pm 1$, $a = 0$; $d = \pm 1$, $b = 0$; $d = \pm 1$, $c = 0$; $d = \pm 1$, $b = \pm 10$; rădăcinile complexe pentru $d = \pm 1$, $a = 0$, separarea rădăcinilor reale și complexe pentru $d = 1$, $b = \text{const}$. Tabele numerice se dau pentru $v^4 + \beta v^2 + \gamma v \pm 1 = 0$ cu $\beta, \gamma = -100, 0, 100$ și $u^4 + a u^3 + b u^2 + c u + 1 = 0$ avînd $a$, $b$, $c$, $= 0, 1, -1$.

În capitolele VII, VIII și IX, se dau formule trigonometrice de calcul, tabele numerice și grafice de funcții trigonometrice pentru arcele în grade, radiani sau unghiuri drepte. De asemenea se dau tabele și grafice pentru funcțiile hiperbolice și table de logaritmi.

Capitolul X este consacrat funcțiilor speciale: $e^{-x^n}$ pentru $n = 0,1, 2, 3, 4$, funcția de rotație a lui Planck, $\ln \frac{1}{x}$, funcția lui Langevin, $\operatorname{cotgh} x - \frac{1}{x}$ etc. Se dau grafice de funcții hiperbolice, tabele directe și inverse pentru $\rho \operatorname{tg} \rho$, $\frac{\operatorname{tg} \rho}{\rho}$ și grafice pentru soluționarea ecuațiilor $\rho \operatorname{tg} \rho = u$, $\rho \operatorname{cotg} \rho = u$.

Capitolul XI se ocupă cu rezolvarea ecuațiilor transcendente $\rho \operatorname{tg} \rho = u$, $\rho \operatorname{cotg} \rho = v$, $x \operatorname{tg} x = \text{const.}$, $\frac{tg\, x}{x} = \text{const.}$, $\frac{\sin x}{x} = \text{const.}$ etc.

Capitolul XII conține tabele și grafice pentru funcțiile circulare și hiperbolice de variabilă complexă.

Capitolul XIII se ocupă de efectul pelicular și dă tabele pentru $\frac{\operatorname{tg}(e^{i\frac{\pi}{4}} r)}{e^{i\frac{\pi}{4}} r}$. Notînd $\frac{\operatorname{tg}(e^{i\frac{\pi}{4}} r)}{r e^{i\frac{\pi}{4}}} = h e^{i\frac{\pi}{2}\eta}$, se dau grafice pentru $\eta$, $h$, $h \cos \eta$, $3 \sin \frac{\eta}{r^2 h}$, $\cos \frac{\eta}{h}$, $r^2 h$, $4 r^2 h \sin \eta$.

Capitolul XIV conține grafice de polinoame Cebîșev.

Capitolul XV conține graficul funcției $z^z$.

Capitolul XVI se ocupă cu calculul aproximativ prin polinoame.

Capitolul XVII conține observații în calculul numeric, constante des utilizate, interpolarea pătratică, unități mecanice, tabele de funcții transcendente elementare.

Fiecare capitol conține indicații și exemple de calcul în limbile germană și engleză.

Lucrarea conține unele tabele care ar părea de prisos în momentul în care se cunosc tabelele de logaritmi, însă în multe calcule ele sînt de un real folos, ușurîndu-le.

Cartea este foarte amplă și documentată și devine foarte necesară și ușor de utilizat în calcule.

*Mariana Coroi Nedelcu*

ULRICH BORNITZ, ANDREAS SCHUBERT, *Siebenstellige Logarithmen der Fakultäten der Zahlen 0 bis 12 000*). (Logaritmi cu șapte zecim le pentru f cultăți, a cifrelor de la 0 la 12 000). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960, 52 pag.

Lucrarea reprezintă tabele de logaritmi pentru $n!$, unde $0 \leqslant n \leqslant 12\,000$. Logaritmii sînt dați cu caracteristică și mantisă, aceasta din urmă avînd 7 cifre. Este necesară darea caracteristicii pentru $\log n!$ cînd se cunoaște numai $n$, deoarece găsirea ei ar necesita un calcul laborios.

Calculele pentru tabele s-au făcut cu mașina electronică digitală $D_1$ a Institutului pentru mașinile de calcul tehnic al Șco ii Superioare Tehnice din Dresda. Calculele la mașină s-au efectuat cu mai multe zecimale în așa fel încît cele 7 zecimale date să fie corecte.

Aceste tabele de logaritmi sînt necesare în multe probleme de calcul din diferite domenii ale matematicii și tehnicii și în special în statistică.

*Mariana Coroi Nedelcu*

## LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R. ÎN ANUL 1961

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape periodice**, 191, p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

B. JÁNKO, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei.

O. ONICESCU, **Strategia jocurilor cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.

Din

**STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE**

au apărut:

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare la

LIBRĂRIA ACADEMIEI R.P.R.

Bucureşti, Calea Victoriei nr. 27

sau la orice librărie ştiinţifică din ţară.

Se pot comanda şi prin poştă la secţia „Cartea prin poştă" de pe lîngă Librăria Academiei R.P.R., sau la librăria

CARTEA PRIN POŞTĂ

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin Întreprinderea de stat pentru comerţ exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau Căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. 2. c. 5403

**Lei 10.—**

762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 1269

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1953 SOCIALISTA

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XIII, nr. 2 1962

## SUMAR


| | Pag. |
|---|---|
| G. VRĂNCEANU, Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă | 209 |
| MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. V. Problema lui Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, liniare, cu coeficienţi variabili | 225 |
| SOLOMON MARCUS Asupra unei teoreme a lui Norman Levine | 255 |
| L. DRAGOŞ, Asupra mişcării unui fluid viscos în tuburi elastice, cu referire la hemodinamică. II | 263 |
| A. CREANGĂ, I. LARI şi R. THEODORESCU, Asupra aplicării metodelor statistice la prospectarea minereurilor şi substanţelor utile | 269 |
| SERGIU RUDEANU, Asupra rezolvării ecuaţiilor booleene prin metoda lui Löwenheim | 295 |
| SILVIU GUIAŞU, Asupra interpretării geometrice a reprezentărilor cvasiconforme | 309 |
| V. ISTRĂŢESCU, Probabilităţi pe o clasă de spaţii Banach | 319 |
| EMERIC DEUTSCH, Încovoierea barelor prismatice ortotrope | 325 |
| G. TEODORESCU, O problemă de tip Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul patru | 353 |
| *RECENZII* | 367 |


EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XIII, n° 2 1962

## SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Sur les espaces de Riemann à connexion constante . . . . 209
MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribution à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique. V. Problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, à coefficients variables 225
SOLOMON MARCUS, Sur un théorème de Norman Levine . . . . . 255
L. DRAGOŞ, Sur le mouvement d'un fluide visqueux dans des tubes élastiques en se référant à la hémodynamique. II . . . . . 263
A. CREANGĂ, I. LARI et R. THEODORESCU, Sur l'application des méthodes statistiques à la prospection des minerais et des substances utiles . . . . 269
SERGIU RUDEANU, Sur la résolution des équations booléennes par la méthode de Löwenheim . . . . . 295
SILVIU GUIAŞU, Sur l'interprétation géométrique des représentations quasi-conformes . . . . . 309
V. ISTRĂŢESCU, Probabilités concernant une classe d'espaces de Banach . . 319
EMERIC DEUTSCH, Flexure of orthotropic prismatic beams . . . . . 325
G. TEODORESCU, Problème du type Cauchy concernant une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre . . . . . 353
*COMPTES RENDUS* . . . . . 367

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XIII, № 2 1962

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, О пространствах Римана с постоянной связностью 209
МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, К теории уравнений в частных производных параболического типа. V. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами . . . . . 225
СОЛОМОН МАРКУС, Об одной теореме Нормана Левина . . . . . 255
Л. ДРАГОШ, О движении вязкой жидкости в упругих трубах в связи с динамикой крови. II . . . . . 263
А. КРЯНГЭ, И. ЛАРИ и Р. ТЕОДОРЕСКУ, О применении статистических методов к разведке полезных ископаемых . . . . . 269
СЕРДЖИУ РУДЯНУ, О решении булевых уравнения методом Левенгейма . . . . . 295
СИЛЬВИУ ГУЯШУ, Геометрическая интерпретация квазиконформных отображений . . . . . 309
В. ИСТРЭЦЕСКУ, Вероятностные меры в классе пространств Банаха 319
ЭМЕРИК ДЕЙЧ, Изгиб ортотропных призматических стержней . . 325
Г. ТЕОДОРЕСКУ, Задача типа Коши для одного уравнения в частных производных четвертого порядка . . . . . 353
*РЕЦЕНЗИИ* . . . . . 367

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# ASUPRA SPAȚIILOR LUI RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ

DE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU

În studiul spațiilor cu conexiune afină $A_n$, se pot considera spațiile cu conexiune constantă [1]*). Acestea sînt spații pentru care există un sistem de variabile în care coeficienții de conexiune $\Gamma_{jk}^{i}$ sînt constante. Aceste spații sînt caracterizate prin aceea că posedă un grup $G_n$ de transformări în ele însile care este simplu tranzitiv și abelian. În coordonatele $x^i$ în care $\Gamma_{jk}^{i}$ sînt constante, acest grup este grupul translațiilor.

Dacă avem un spațiu al lui Riemann $V_n$, acesta posedă grupul translațiilor ca grup de mișcări numai dacă componentele tensorului său fundamental sînt constante, deci $V_n$ este local euclidian; dar un spațiu $V_n$ poate fi cu conexiune constantă fără ca $a_{ij}$ să fie constante și fără ca spațiul să fie local euclidian. Un exemplu este dat de spațiile $V_n$ pentru care tensorul fundamental $a_{ij}$ este de forma $e^{a_k x^k} c_{ij}$, unde $a_k$ și $c_{ij}$ sînt constante, pe care le vom numi spații ale lui Vagner [2]. Pentru $n \geqslant 3$ aceste spații nu sînt local euclidiene.

În prima parte a acestei lucrări se consideră diferitele clase de spații $V_n$ cu conexiune constantă, între care aceea pe care o putem considera drept cazul general și aceea pe care o putem considera drept caz special, caz în care spațiul $V_n$ este local euclidian.

În partea a doua, se determină spațiile lui Riemann $V_2$ cu conexiune constantă, spații care sînt toate local euclidiene.

În partea a treia se determină spațiile $V_3$ neeuclidiene cu conexiune constantă, care nu sînt spații ale lui Vagner sau produse directe de astfel de spații.

---

*) cap. VI.

## I

Un spațiu al lui Riemann $V_n$ este cu conexiune constantă, în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$, dacă componentele $a_{ij}$ ale tensorului fundamental satisfac ecuațiile :

$$(ijk) \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{is}\Gamma^s_{jk} + a_{js}\Gamma^s_{ik} = 0, \tag{1}$$

unde $\Gamma^i_{jk}$ sînt constante simetrice în indicii inferiori. De fapt, cantitățile constante $\Gamma^i_{jk}$ sînt, schimbînd semnul, egale cu simbolurile lui Christoffel de specia a 2-a ale metricei lui $V_n$, presupusă ca fiind nedegenerată,

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j \tag{2}$$

și deci geodezicele acestei metrici se scriu

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

A determina spațiile $V_n$ cu conexiune constantă înseamnă să găsim soluțiile sistemului (1) cu diferențiale totale, ale cărui condiții de integrabilitate sînt binecunoscute :

$$\begin{aligned} &a_{is}\Gamma^s_{jkl} + a_{js}\Gamma^s_{ikl} = 0, \\ &a_{is}\Gamma^s_{jkl,p} + a_{js}\Gamma^s_{ikl,p} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

unde $\Gamma^i_{jkl}$ sînt componentele tensorului de curbură al spațiului $V_n$, $\Gamma^i_{jkl,p}, \ldots$ tensorii derivați de curbură și, în cazul nostru, avem pentru tensorul de curbură

$$\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}.$$

Se poate observa, așa cum a făcut Vagner, că acele spații ale lui Riemann $V_n$ pentru care avem

$$a_{ij} = e^{a_k x^k} c_{ij}, \tag{4}$$

unde $a_k$, $c_{ij}$ sînt constante, sînt spații cu conexiune afină constantă. Ținînd seamă de aceste formule, obținem din formulele (4') :

$$(jkl) + (ikj) + (ijk) = a_i c_{jk} + a_j c_{ik} - a_k c_{ij} + c_{ks}\Gamma^s_{ij} = 0, \tag{4'}$$

formule care se pot rezolva în raport cu $\Gamma^i_{jk}$ dacă determinantul $|c_{ks}|$ este diferit de zero, ceea ce este adevărat în cazul nostru, deoarece am presupus că tensorul $c_{jk}$ este nedegenerat.

Presupunînd că tensorului (4) îi corespunde o metrică pozitiv definită, putem, printr-o alegere convenabilă de variabile, să scriem această metrică sub forma canonică :

$$ds^2 = e^{2p_1 x^1}[(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2], \tag{5}$$

unde $p$ este o constantă, și este ușor să se vadă că pentru $n = 2$ acest spațiu este euclidian deci cu curbură nulă, pe cînd pentru $n > 2$ spațiul nu este euclidian.

Într-adevăr, pentru $n = 2$, dacă punem

$$u = \frac{e^{px^1}}{p}, \quad v = px^2, \tag{5'}$$

metrica se scrie:

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2,$$

care poate fi interpretată ca metrica planului euclidian în coordonate polare; avem deci o metrică cu curbură nulă. Rezultatul este valabil și pentru o metrică nedefinită.

Să observăm acum că în cazul general în care ecuațiile (3) au o singură soluție și anume

$$a_{ij} = c_{ij} t, \tag{5''}$$

cu $c_{ij}$ constante, spațiul $V_n$ cu conexiune constantă este de tipul (4) al lui Vagner. Într-adevăr, înlocuind aceste valori în ecuațiile (1), rezultă că $t$ satisface ecuația de tipul $\frac{\partial t}{\partial x^k} = a_k t$ și deci $t = ce^{a_k x^k}$.

Pentru aceasta trebuie deci ca matricea sistemului (3) în necunoscutele $a_{ij}$ să fie de rangul $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Să considerăm acum cazul particular în care avem condițiile:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{1k} = \Gamma^k_{11} = \Gamma^k_{1h} = \Gamma^k_{lh} = 0, \qquad h, k, l \neq 1, \tag{6}$$

deci singurele $\Gamma^i_{jk}$ care nu sînt nule sînt $\Gamma^1_{jk}$ $(j, k \neq 1)$.

În acest caz, tensorul de curbură al lui $V_n$ este nul, deci (3) sînt satisfăcute în mod identic. În ceea ce privește (1) acestea ne spun că $a_{ij}$ sînt independente de $x^1$ și rezultă că $a_{11}$ este constantă și ecuațiile (1) pentru $i = 1$ ne dau:

$$a_{11} = c_{11}, \qquad a_{1j} = -c_{11}\Gamma^1_{js}x^s + c_{1j}, \qquad (j, s \neq 1), \tag{6'}$$

unde $c_{11}$, $c_{1j}$ sînt constante.

Ținînd seamă de (1), pentru $i, j, k \neq 1$, care se scriu

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{i1}\Gamma^1_{jk} + a_{j1}\Gamma^1_{ik} = 0,$$

rezultă:

$$a_{ij} = \frac{c_{11}}{2}(\Gamma^1_{is}\Gamma^1_{jk} + \Gamma^1_{js}\Gamma^1_{ik})\, x^s x^k - (c_{1i}\,\Gamma^1_{jk} + c_{1j}\Gamma^1_{ik})\, x^k + c_{ij}, \tag{6''}$$

unde $c_{ij}$ sînt și ele constante.

Avem deci teorema:

*În cazul* (6) *spațiul* $V_n$ *cu conexiune constantă are tensorul fundamental definit de polinoame cel mult de gradul* 2 *în variabilele* $x^2, \ldots, x^n$ *date de formulele* (6'), (6'').

Să observăm acum că, în cazul general (6''), tensorul de curbură $\Gamma^i_{jkl}$ și tensorii derivați trebuie să fie destul de generali astfel încît matricea sistemului (5) să fie de rangul $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, pe cînd în cazul special acești tensori sînt nuli. Evident, acestea sînt două cazuri extreme. Pentru a considera toate cazurile care se pot prezenta să observăm că ecuațiile (3), fiind liniare, au o soluție de forma:

$$a_{ij} = c^\alpha_{ij} t_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \ldots, p), \tag{7}$$

unde $c^\alpha_{ij}$ sînt constante. Numind $p$ genul spațiului, cazul (4) corespunde lui $p$ egal cu 1, pe cînd în cazul special (9) genul $p$ este egal cu $\frac{n(n+1)}{2}$, ce reprezintă numărul de cantități $a_{ij}$.

Fiind date formulele (7) ca soluții ale ecuațiilor (3), aceste formule trebuie să satisfacă formulele (1), deci trebuie să avem formulele:

$$c^\alpha_{ij} \frac{\partial t_\alpha}{\partial x^k} = -\left[c^\alpha_{is}\Gamma^s_{jk} + c^\alpha_{js}\Gamma^s_{ik}\right] t_\alpha,$$

așa că rezultă formule de forma:

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial x^k} = p^\beta_{\alpha k} t_\beta, \tag{7'}$$

unde $p^\beta_{\alpha k}$ sînt constante și sistemul (7') trebuie, evident, să fie complet integrabil.

Se știe însă că integrarea sistemului (7'), liniar și omogen cu coeficienți constanți, depinde de rădăcinile celor $n$ ecuații caracteristice

$$\left| p^\alpha_{\beta k} - \rho_k \delta^\alpha_\beta \right| = 0. \tag{8}$$

Se știe, pe de altă parte, că dacă toate rădăcinile acestor ecuații sînt distincte și reale, soluția în $t_\alpha$ este dată de expresii liniare în exponențiale de forma $e^{a_k x^k}$ și deci același lucru este valabil pentru $a_{ij}$. Dacă aceste ecuații au rădăcini imaginare, atunci intervin în soluții sinusul și cosinusul unor expresii liniare în $x^k$, pe cînd în cazul cînd există rădăcini multiple apar coeficienți polinominali în $x^k$. În sfîrșit, dacă toate rădăcinile sînt zero atunci $a_{ij}$ sînt polinoame.

Să arătăm acum că un spațiu $V_n$ cu conexiune constantă nu poate fi proiectiv euclidian. Într-adevăr, un astfel de spațiu este cu curbură constantă, deci $a_{ij}$ sînt date de formulele

$$a_{ij} = k\Gamma_{ij}, \tag{8'}$$

unde $\Gamma_{ij}$ este tensorul contractat

$$\Gamma_{ij} = \Gamma^s_{isj}$$

și $k$ este curbura. De aceea, rezultă că $a_{ij}$ sînt constante și spațiul $V_n$ este local euclidian, ceea ce este în contradicție cu faptul că am considerat că spațiul $V_n$ este proiectiv euclidian. Să demonstrăm acum că genul unui spațiu $V_n$ neeuclidian este mai mic decît $\frac{n(n-1)}{2}$. Pentru aceasta să utilizăm faptul că, fiind dat un spațiu care nu este proiectiv euclidian, componentele tensorului de curbură pot fi reduse la forma canonică [1] *) :

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{223} = 1, \quad \Gamma^\alpha_{223} = 0, \quad (\alpha \neq 1), \\ &\Gamma^1_{323} = \Gamma^1_{k23} = \Gamma^1_{22k} = 0, \quad (k > 3). \end{aligned} \tag{9}$$

Să considerăm atunci primele ecuații (3) pentru $j = 2$, $k = 2$, $l = 3$, și $i = 2, 1, 3, \ldots, n$.

Ținînd seamă de primele ecuații (9) avem :

$$a_{12} = 0, \quad a_{is} + a_{2s}\,\Gamma^s_{i23} = 0, \quad (i \neq 2,\ s \neq 1). \tag{10}$$

Aceste ecuații ne arată că sistemul (3) conține cel puțin $n$ ecuații independente, deci că genul $p$ nu întrece numărul $\frac{n(n-1)}{2}$. Pe de altă parte, cantitățile $\Gamma^2_{i23}, \ldots, \Gamma^n_{i23}$ $(i \neq 2)$ nu pot fi toate nule pentrucă atunci ecuațiile (10) ne dau $a_{1h} = 0$ și deci metrica lui $V_n$ ar fi degenerată.

Ținînd seamă de faptul că pentru $i = j > 2$, $k = 2$, $l = 3$ primele ecuații (3), ținînd seamă de ultimele ecuații (9) se scriu

$$a_{is}\,\Gamma^s_{i23} = a_{i2}\Gamma^2_{i23} + \cdots + a_{in}\Gamma^n_{i23} = 0.$$

Acestea introduc cel puțin o ecuație independentă de (10), dacă cel puțin una din cantitățile $\Gamma^s_{i23}$ $(s > 1,\ i > 2)$ nu este nulă, pentru că nu conțin necunoscutele $a_{h1}$.

Presupunem că sînt verificate condițiile :

$$\Gamma^s_{i23} = 0, \quad (s > 1, \quad i > 2). \tag{10'}$$

În acest caz, cantitățile $\Gamma^s_{123}$ nu pot fi toate nule și primele ecuații (3) se scriu pentru $j > 1$, $i > 2$ :

$$a_{i1}\Gamma^1_{123} + a_{is}\Gamma^s_{123} = 0, \quad (s > 1,\ i > 2). \tag{10''}$$

De altă parte, ținînd seamă de faptul că pentru un spațiu Riemann avem

$$\Gamma^1_{123} + \Gamma^2_{223} + \cdots + \Gamma^n_{n23} = 0,$$

*) p. 64.

rezultă, ținînd seamă de (10′) și de (9), că $\Gamma^1_{123} = 0$ și deci ecuațiile (10″) conțin cel puțin o ecuație independentă de (10). Deci avem teorema :

*Genul unui spațiu $V_n$ neeuclidian cu conexiune constantă este cel mult egal cu* $\frac{n(n-1)}{2} - 1$.

Rezultă deci că $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ poate fi considerat ca maximul genului unui spațiu $V_n$ neeuclidian, cu conexiune constantă dar nu știm dacă acest maxim este atins.

În partea a treia, vom arăta că pentru $n=3$ maximul $\frac{n(n-1)}{2}-1=2$ este atins.

## II

Să considerăm acum cazul unui spațiu $V_2$ cu conexiune constantă. În acest caz, primele ecuații (3) se scriu :

$$\begin{aligned} a_{11}\Gamma^1_{112} + a_{12}\Gamma^2_{112} &= 0, \\ a_{11}\Gamma^1_{212} + a_{22}\Gamma^2_{112} &= 0, \\ a_{12}\Gamma^1_{212} + a_{22}\Gamma^2_{212} &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

aceasta ținînd seamă că avem totdeauna condiția

$$\Gamma^1_{112} + \Gamma^2_{212} = 0. \tag{11′}$$

Să presupunem că avem $\Gamma^2_{112} \neq 0$. În acest caz, primele două dintre aceste ecuații pot fi rezolvate în raport cu $a_{12}$ și $a_{22}$ și soluția sistemului (1) trebuie să fie de forma (4). Dar noi am demonstrat că pentru $n = 2$ acea metrică este euclidiană. Deci este o contradicție cu faptul că noi presupunem $\Gamma^2_{112} \neq 0$. Avem deci $\Gamma^2_{112} = 0$ și prin aceleași considerații avem $\Gamma^1_{212} = 0$ și sistemul (11) se scrie

$$a_{11}\Gamma^1_{112} = 0, \qquad a_{22}\Gamma^2_{212} = 0.$$

Deci sau $\Gamma^1_{112}$, $\Gamma^2_{212}$ sînt și ele nule și spațiul este local euclidian, sau $\Gamma^1_{112}$, $\Gamma^2_{212}$ sînt, ținînd seamă de (11′), ambii diferiți de zero și metrica este de tipul

$$ds^2 = 2a_{12}dx^1dx^2.$$

Dar în acest caz, ecuațiile (1) ne spun că trebuie să avem

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{12} = 0$$

și atunci toate componentele $\Gamma^i_{jkl}$ sînt nule și spațiul este fără curbură, deci euclidian.

Rezultă teorema lui Sumitamo :

*Toate spațiile $V_2$ cu conexiune constantă sînt local euclidiene.*

Pentru a determina diferitele tipuri de spații $V_2$ este suficient să întrebuințăm reducerea la forma canonică a unei conexiuni euclidiene constante. Am demonstrat că sînt patru tipuri de astfel de conexiuni [1] *) în cazul cînd vectorul contractat $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ este diferit de zero. Ținînd seamă că avem $\Gamma_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\log a$, unde $a$ este determinantul $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ al metricii, rezultă că $a$ nu este o constantă. Pentru primul tip, toate componentele $\Gamma^i_{jk}$ sînt nule în afară de $\Gamma^1_{11} = -2$. În acest caz, ecuațiile (1) ne dau:

$$a_{11} = c_{11}e^{4x^1}, \quad a_{12} = c_{12}e^{2x^1}, \quad a_{22} = c_{22},$$

unde $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{22}$ sînt constante, așa că metrica lui $V_2$ se scrie:

$$ds^2 = c_{11}e^{4x^1}(dx^1)^2 + 2c_{12}e^{2x^1}dx^1dx^2 + c_{22}(dx^2)^2. \tag{12}$$

Avem deci o metrică ale cărei coordonate carteziene sînt

$$u = e^{2x^1}, \quad v = x^2, \tag{12'}$$

și spațiul $V_2$ este echivalent cu semi-planul euclidian $u > 0$. Pentru celelalte trei tipuri toate cantitățile $\Gamma^i_{jk}$ sînt nule, afară de

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -1, \quad \Gamma^1_{22} = \varepsilon, \quad (\varepsilon = 0, 1, -1).$$

În acest caz, ecuațiile (1) se scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} - 2a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} - 2a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} - 2a_{22} = 0, \\ &\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} - 2a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} - a_{12} + \varepsilon a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon a_{12} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Punînd

$$a_{11} = e^{2x^1}a, \quad a_{12} = e^{2x^1}b, \quad a_{22} = e^{2x^1}c,$$

rezultă că $a$, $b$, $c$ nu depind de $x^1$ și ca funcții de $x^2$ satisfac ecuațiile:

$$a' = 2b, \quad b' - b + \varepsilon a = 0, \quad c' + 2\varepsilon b = 0. \tag{14}$$

Prima și a doua din aceste ecuații ne spun că funcția $a$ satisface ecuația de ordinul al doilea

$$a'' - a' + 2\varepsilon a = 0.$$

Dacă $\varepsilon = 0$ sau $\varepsilon = -1$ această ecuație are ca soluții:

$$\alpha + \beta e^{x^2}, \quad \alpha e^{2x^2} + \beta e^{-x^2}, \tag{15}$$

unde $\alpha$, $\beta$ sînt constante, pe cînd pentru $\varepsilon = 1$ are ca soluție:

$$e^{\frac{x^2}{2}}\left(\alpha\cos\frac{\sqrt{z}}{2}x^2 + \beta\sin\frac{\sqrt{z}}{2}x^2\right). \tag{16}$$

*) p. 369.

Fiind dată valoarea lui $a$, rezultă din (14)

$$b = \frac{a'}{2}, \qquad c = -\varepsilon a + \gamma,$$

unde $\gamma$ este o constantă.

Rezultă, aşadar, metrica sub forma:

$$ds^2 = e^{2x^1}[a(dx^1)^2 + a'dx^1dx^2 + (\gamma - \varepsilon a)(dx^2)^2], \tag{17}$$

unde $a$ este definită pentru $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = -1$, de una din formulele (15) şi de formula (16) pentru $\varepsilon = 1$.

Avem deci teorema:

*Metricele spaţiilor $V_2$ cu conexiune constantă sînt date în variabilele preferate, deci în variabilele pentru care simbolurile lui Christoffel sînt constante, de formula* (12) *sau* (17) *dacă determinantul metricii nu este constant.*

În cazul în care vectorul $\Gamma_k$ este nul, există un singur tip care se reduce la cazul cînd avem toate componentele $\Gamma^i_{jk}$ nule afară de $\Gamma^2_{11} = -1$.

Ecuaţiile (1) ne spun că, în acest caz, toate derivatele componentelor $a_{ij}$ sînt nule, în afară de:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = 2a_{12}, \qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = a_{22},$$

şi deci avem:

$$a_{11} = c_{22}(x^1)^2 + 2c_{12}x^1 + c_{11}, \quad a_{12} = c_{12}x^1 + c_{12}, \quad a_{22} = c_{22}.$$

Obţinem astfel o metrică polinomială:

$$ds^2 = c_{11}(dx^1)^2 + 2c_{12}(x^1dx^1 + dx^2)\,dx^1 + c_{22}(x^1dx^1 + dx^2)^2 \tag{17'}$$

cu determinantul $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ constant. Dacă punem

$$u = x^1, \qquad v = x^2 + \frac{(x^1)^2}{2},$$

metrica devine cu coeficienţi constanţi. De altfel acesta este singurul caz în care spaţiul $V_2$ cu conexiune constantă se transformă izometric în întregul plan euclidian $E_2(u, v)$.

Aceste proprietăţi se pot demonstra şi direct, întrebuinţînd ecuaţiile caracteristice. De fapt, un spaţiu $V_2$ cu conexiune constantă fiind local euclidian este de rangul trei.

Punînd deci $t_1 = a_{11}$, $t_2 = a_{12}$, $t_3 = a_{22}$ sistemul (7') devine:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_1}{\partial x^k} + 2t_1\Gamma^1_{1k} + 2t_2\Gamma^2_{1k} = 0,\\
&\frac{\partial t_2}{\partial x^k} + t_1\Gamma^1_{2k} + t_2\Gamma_k + t_3\Gamma^2_{1k} = 0,\\
&\frac{\partial t_3}{\partial x^k} + 2t_2\Gamma^1_{2k} + 2t_3\Gamma^3_{3k} = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

prin urmare, în acest caz, ecuațiile caracteristice (8) se scriu :

$$\begin{vmatrix} 2\Gamma^1_{1k} - \rho_k & 2\Gamma^2_{1k} & 0 \\ \Gamma^1_{2k} & \Gamma_k - \rho_k & \Gamma^2_{1k} \\ 0 & 2\Gamma^1_{2k} & 2\Gamma^2_{2k} - \rho_k \end{vmatrix} = 0. \tag{18'}$$

Avem deci ecuații de gradul al treilea în $\rho_k$ și deci cel puțin una din rădăcini este reală. Ecuațiile (18′) pot fi scrise sub forma :

$$\begin{aligned} &\rho_k^3 - 3\Gamma_k\rho_\kappa^2 + 2(\Gamma_\kappa^2 + A_k)\rho_k - 2\Gamma_k A_k = 0, \\ &A_k = 2\Gamma^1_{1k}\Gamma^2_{2k} - \Gamma^1_{2\kappa}\Gamma^2_{1k}, \end{aligned} \tag{19}$$

unde $k$ are valoarea 1 sau valoarea 2.

Întrebuințînd faptul că spațiul este local euclidian, că avem deci

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{212} &= \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - (\Gamma^1_{12})^2 + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} = 0, \\ \Gamma^2_{112} &= \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11} + (\Gamma^2_{12})^2 - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} = 0, \\ \Gamma^1_{112} &= -\Gamma^2_{212} = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} = 0, \end{aligned}$$

se arată ușor că $A_k$ sînt respectiv egale cu :

$$A_1 = \Gamma_1\Gamma^2_{21} - \Gamma_2\Gamma^2_{11}, \quad A_2 = \Gamma_2\Gamma^1_{12} - \Gamma_1\Gamma^1_{22}. \tag{20}$$

Rezultă că cele două ecuații caracteristice (18′) au toate rădăcinile nule, dacă vectorul $\Gamma_k$ este nul și invers și, în acest caz, metrica lui $V_2$ este polinomială și poate fi redusă la formula (17′).

## III

Să considerăm acum cazul unui spațiu $V_3$ cu conexiune constantă, care nu este local euclidian și al cărui tensor de curbură a fost redus la forma canonică

$$\Gamma^1_{223} = 1, \qquad \Gamma^2_{223} = \Gamma^3_{223} = \Gamma^1_{323} = 0. \tag{21}$$

Cum am văzut, în prima parte, dacă considerăm primele ecuații (3) pentru $k = j = 2$, $i = 2, 1, 3$, $l = 3$ obținem condițiile :

$$\begin{aligned} a_{12} &= 0, \\ a_{11} + a_{22}\Gamma^2_{123} + a_{23}\Gamma^3_{123} &= 0, \\ a_{13} + a_{22}\Gamma^2_{323} + a_{23}\Gamma^3_{323} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Notînd primele formule (3) cu $(ijkl)$, să considerăm formulele (1323), (3323), (2213), (2212), (3213), (3212). Acestea se scriu :

$$\begin{aligned} &a_{23}\Gamma^2_{123} + a_{33}\Gamma^3_{123} = 0, \qquad a_{23}\Gamma^2_{323} + a_{33}\Gamma^3_{323} = 0, \\ &a_{22}\Gamma^2_{213} + a_{23}\Gamma^3_{213} = 0, \qquad a_{22}\Gamma^2_{212} + a_{23}\Gamma^3_{213} = 0, \\ &a_{33}\Gamma^3_{213} - a_{23}\Gamma^1_{113} + a_{13}\Gamma^1_{213} + a_{22}\Gamma^2_{313} = 0, \\ &a_{33}\Gamma^3_{212} - a_{23}\Gamma^1_{112} + a_{13}\Gamma^1_{212} + a_{22}\Gamma^2_{312} = 0. \end{aligned} \tag{22'}$$

Cum $\Gamma^2_{123}$, $\Gamma^3_{123}$, $\Gamma^2_{323}$, $\Gamma^3_{323}$ nu pot fi toate nule, pentru că altfel formulele (22) ne spun că $a_{12} = a_{13} = a_{11} = 0$ și metrica lui $V_3$ este degenerată, rezultă că cel puțin una din primele două ecuații (22′) este o ecuație independentă de (22) și deci spațiul $V_3$ este cel mult de genul doi, fapt demonstrat încă în prima parte.

Observăm acum că dacă una din cantitățile $\Gamma^3_{213}$, $\Gamma^3_{212}$ nu este nulă, două din ultimele patru ecuații (22′) permit, împreună cu (22), să obținem toate cantitățile $a_{ij}$ cu ajutorul lui $a_{22}$, deci spațiul $V_3$, dacă există este de genul 1, deci un spațiu al lui Vagner. Pentru un spațiu $V_3$ de genul 2 trebuie, deci, să avem:

$$\Gamma^3_{213} = \Gamma^3_{212} = 0. \tag{23}$$

La fel trebuie să avem

$$\Gamma^2_{213} = \Gamma^2_{212} = 0, \tag{23′}$$

pentru că altfel a treia sau a patra ecuație (22′) ne spune că $a_{11} = 0$. Pe de altă parte, cum în acest caz nu putem avea $\Gamma^3_{123} = \Gamma^3_{323} = 0$, una cel puțin din primele două ecuații (22′) ne dă $a_{33}$ ca funcție de $a_{23}$ și rezultă că spațiul este de genul 1. Presupunînd că (23) și (23′) sînt verificate, presupunem la fel că avem

$$\Gamma^3_{123} = \Gamma^3_{323} = 0. \tag{23″}$$

În acest caz, primele două ecuații (22′) ne spun că $a_{23} = 0$, pentru că cel puțin una din cantitățile $\Gamma^2_{123}$, $\Gamma^2_{323}$ trebuie să fie diferită de zero.

Deci, ținînd seamă de (22), avem:

$$a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{11} = \rho a_{22}, \quad a_{13} = \lambda a_{22},$$

unde $\rho$, $\lambda$ sînt constante. Cum, dacă $V_3$ este de genul 2 trebuie să avem $a_{22}$, $a_{33}$ diferiți de zero, putem să punem $a_{22} = e^{2p}$, $a_{33} = \pm e^{2q}$ și atunci funcția $p - q$ nu trebuie să fie o constantă: deci trebuie să vedem dacă metrica

$$ds^2 = e^{2p}\,[\rho(dx^1)^2 + 2\lambda dx^1 dx^3 + (dx^2)^2] \pm e^{2q}(dx^3)^2, \tag{24}$$

cu $p - q$ care nu este constantă, are simbolurile lui Christoffel de specia a doua constante.

Pentru aceasta, putem observa că, dacă $\rho$ este diferit de zero, putem lua ca nouă variabilă $x^1$ pe $x^1 + \dfrac{\lambda}{\rho} x^3$ și atunci luînd ca $\pm e^{2q}$ funcția $\pm e^{2q} - \dfrac{\lambda^2}{\rho} e^{2p}$, metrica ia aceeași formă (24), dar cu $\lambda = 0$. Dacă $\rho = 0$ și deci $\lambda \neq 0$, putem, dacă înmulțim pe $x^1$ cu o constantă, să presupunem $\lambda = 1$.

În concluzie, avem deci ca metrică:

$$ds^2 = e^{2p}[2dx^1 dx^3 + (dx^2)^2] \pm e^{2q}(dx^3)^2, \tag{24′}$$

dacă $\lambda \neq 0$, $\rho = 0$, pe cînd dacă $\rho \neq 0$ putem lua

$$ds^2 = e^{2p}[\rho(dx^1)^2 + (dx^2)^2] \pm e^{2q}(dx^3)^2. \tag{24″}$$

Pentru a vedea dacă metrica (24′) este cu conexiune afină constantă, să considerăm interpretarea mecanică și, de aceea, să considerăm sistemul mecanic asociat lui $V_3$ a cărui forță vie este :

$$T = \frac{1}{2}\,[e^{2p}(2\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2) \pm e^{2q}\dot{z}^2],$$

unde am notat :

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

Geodezicele lui $V_3$ sînt deci date de ecuațiile lui Lagrange :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,(e^{2p}\dot{z}) &= e^{2p}p_z(2\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2) \pm e^{2q}q_z\dot{z}^2,\\
\frac{d}{dt}\,(e^{2p}\dot{y}) &= e^{2p}p_y(2\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2) \pm e^{2q}q_y\dot{z}^2,\\
\frac{d}{dt}\,(e^{2p}\dot{x} \pm e^{2q}\dot{z}) &= e^{2p}p_z(2\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2) \pm e^{2q}q_z\dot{z}^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Derivînd, în raport cu $t$, primii membrii ai primelor două ecuații și împărțind cu $e^{2p}$, avem :

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= p_x\dot{y}^2 - 2p_y\dot{y}\dot{z} - 2p_z\dot{z}^2 \pm e^{2q-2p}q_x\dot{z}^2,\\
\ddot{y} &= p_y\dot{y}^2 - 2p_x\dot{x}\dot{y} + 2p_y\dot{x}\dot{z} - 2p_z\dot{y}\dot{z} \pm e^{2q-2p}q_y\dot{z}^2.
\end{aligned} \tag{25′}$$

Aceste ecuații ne arată că în membrul al doilea avem coeficienți constanți numai dacă $p$ este o funcție liniară de $x$, $y$, $z$, pe care putem să o luăm de forma :

$$p = kx + ly + mz, \tag{25″}$$

și $q$ satisface ecuațiile :

$$e^{2q-2p}q_x = \alpha, \quad e^{2q-2p}q_y = \beta, \tag{26}$$

unde $\alpha$, $\beta$ sînt constante.

Să considerăm acum ultima ecuație (25). Ținînd seamă de (25″) și (26), aceasta se scrie $\ddot{x} \pm e^{2q-2p}(\ddot{z} + q_z\dot{z}^2) = m(2\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2) - 2\dot{x}(k\dot{z} + l\dot{y} + m\dot{z}) \mp$ $\mp 2\dot{z}(\alpha\dot{x} + \beta\dot{y})$.

Rezultă că această ecuație, asociată cu (25′) poate să furnizeze $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ ca forme pătratice, cu coeficienți constanți, în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, dacă se presupune că $p - q$ nu este constantă, numai dacă avem

$$q_z = \gamma, \qquad \ddot{z} = -\gamma\dot{z}^2, \tag{26′}$$

unde $\gamma$ este o constantă. Dacă ținem seamă de ultima din aceste ecuații, în prima din (25′), obținem o ecuație pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$ ,$\dot{z}$ care trebuie să fie identic verificată. Ținînd seamă de (25″), (26), (26′) avem deci condițiile :

$$k = l = 0, \qquad \pm\alpha + \gamma = 2m. \tag{26″}$$

De altă parte, ecuațiile (26) cu a doua din (26′)au condiția de integrabilitate

$$\alpha(\gamma - m) = 0, \qquad \beta(\gamma - m) = 0.$$

Deci, dacă $\gamma \neq m$ atunci $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 2m$ și se obține metrica

$$ds^2 = e^{2mz}[2dxdz + dy^2] \pm e^{4mz}dz^2. \tag{27}$$

În ceea ce privește ecuațiile geodezicelor, acestea se scriu :

$$\ddot{x} = m\dot{y}^2, \qquad \ddot{y} = -2m\dot{x}\dot{y}, \qquad \ddot{z} = -2m\dot{z}^2. \tag{27′}$$

Rezultă că acei $\Gamma^i_{jk}$ care nu sînt nuli sînt dați de formulele :

$$\Gamma^1_{22} = m, \qquad \Gamma^2_{23} = -m, \qquad \Gamma^3_{33} = -2m$$

și avem

$$\Gamma^1_{223} = -m^2, \qquad \Gamma^2_{323} = m^2.$$

Deci, dacă $m \neq 0$, spațiul $V_3$ cu metrica (27) nu este euclidian și constituie un exemplu de spațiu $V_3$ cu conexiune constantă de genul doi.

Dacă $\gamma = m$, atunci $\alpha = \pm m$ și ecuațiile (26) și prima din (26′) ne dau :

$$e^{2q} = 2e^{2mz}(\pm mx + \beta y + c)$$

și deci metrica lui $V_3$ se scrie :

$$ds^2 = e^{2mz}[2dxdz + dy^2 + 2(mx \pm \beta y + c)\,dz^2], \tag{27″}$$

unde $m$, $\beta$, $c$ sînt constante.

În ceea ce privește ecuațiile geodezicelor, acestea se scriu :

$$\ddot{x} = m\dot{y}^2 - 2(m\dot{x} \pm \beta\dot{y})\,\dot{z},$$

$$\ddot{y} = -2m\dot{y}\dot{z} \pm \beta\dot{z}^2, \qquad \ddot{z} = -m\dot{z}^2.$$

Deci, cantitățile $\Gamma^i_{jk}$ care nu sînt nule sînt date de formulele :

$$\Gamma^1_{22} = m, \qquad \Gamma^1_{13} = -m, \qquad \Gamma^1_{23} = \mp\beta,$$

$$\Gamma^2_{23} = -m, \qquad \Gamma^2_{33} = \pm\beta, \qquad \Gamma^3_{33} = -m,$$

și se constată ușor că tensorul de curbură este nul și deci, spațiul (28) este local euclidian.

Dacă aplicăm aceleași considerații la metrica (24″), rezultă ușor că, dacă $p - q$ nu este o constantă, această metrică este cu conexiune constantă numai dacă este produsul a două metrici ale lui Vagner și deci dacă avem

$$ds^2 = e^{2kx+2py}[\rho(dx)^2 + (dy)^2] \pm e^{2mz}(dz)^2 \tag{28}$$

și spațiul este local euclidian.

De altfel, subzistă următoarea teoremă generală :

*O metrică de tipul*

$$ds^2 = e^{2p}c_{ij}dx^i dx^j + e^{2q}c_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{28′}$$

*unde $i$, $j$ variază de la 1 la $m$ și $\alpha$, $\beta$ de la $m+1$ la $n$, este cu conexiune constantă, cînd $p-q$ nu este constantă, numai dacă $p$ este o funcție liniară de $x^i$ și $q$ este funcție liniară de $x^\alpha$.*

De fapt, scriind ecuațiile lui Lagrange pentru metrica (28'), rezultă imediat că $p$, $q$ trebuie să fie funcții liniare :

$$p = m_i x^i + m_\alpha x^\alpha + m,$$

$$q = n_i x^i + n_\alpha x^\alpha + n,$$

și în plus trebuie să avem

$$e^{2q-2p} n_i = a_i, \qquad e^{2p-2q} m_\alpha = a_\alpha,$$

unde $a_i$, $a_\alpha$ sînt constante.

Aceasta ne spune că $p-q$ nu este o constantă în cazul cînd $n_i = m_\alpha = 0$, deci spațiul (28) este produs direct a două spații Vagner $V_m$ și $V_{n-m}$. Spațiul (28') nu este euclidian numai dacă $m$ și $n-m$ sînt mai mari decît 2.

Presupunem, acum, că condițiile (23'') nu sînt îndeplinite. Vrem să arătăm că avem $\Gamma^3_{323} \neq 0$.

De fapt, din identitățile

$$\Gamma^h_{123} + \Gamma^h_{231} + \Gamma^h_{312} = 0, \qquad (h = 1, 2, 3),$$

$$\Gamma^1_{112} + \Gamma^2_{212} + \Gamma^3_{312} = 0,$$

dacă ținem seamă de (2), (23), (23'), rezultă formulele :

$$\Gamma^3_{123} = -\Gamma^3_{312} = \Gamma^1_{112},$$

$$\Gamma^3_{323} = -\Gamma^1_{123}, \qquad \Gamma^2_{123} = -\Gamma^2_{312}.$$

De altă parte, condițiile (1123), (1112) se scriu :

$$a_{11}\Gamma^1_{123} + a_{13}\Gamma^3_{123} = 0,$$

$$a_{11}\Gamma^1_{112} + a_{13}\Gamma^3_{112} = 0.$$

Dacă $\Gamma^3_{323}$ ar fi nulă și $\Gamma^3_{123}$ diferită de zero, atunci prima din aceste ecuații ne dă $a_{13} = 0$, pe cînd a doua ne dă $a_{11} = 0$ și atunci spațiul $V_3$, dacă există, este de genul 1. Trebuie deci să presupunem că $\Gamma^3_{323} \neq 0$. Considerînd schimbarea de variabile

$$x'^1 = b^2 c x^1, \qquad x'^2 = b x^2, \qquad x'^3 = c x^3,$$

care lasă neschimbată formula (21), avem :

$$\Gamma'^3_{323} bc = \Gamma^3_{323}, \qquad \Gamma'^2_{323} c^2 = \Gamma^2_{323},$$

așa că putem alege $b$, $c$ astfel încît $\Gamma^3_{323}$ să fie egală cu $-1$ și $\Gamma'^2_{323}$ să fie egală cu 0, $-1$, 1.

Formulele (22) și primele (22') ne dau, atunci, formulele :

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = a_{13} + \varepsilon a_{22}, \quad a_{11} = a_{13}, \quad a_{33} = \varepsilon(a_{13} + \varepsilon a_{22}), \quad \varepsilon = 0, 1, -1.$$

Punînd

$$a_{13} = e^{2p}, \quad a_{22} = \pm e^{2q}$$

avem metrica

$$ds^2 = e^{2p}[\rho(dx^1)^2 + 2dx^1dx^3 + 2dx^2dx^3 + \varepsilon(dx^3)^2] \pm \\ \pm e^{2q}[(dx^2)^2 + 2\varepsilon dx^2dx^3 + \varepsilon^2(dx^3)^2].$$

Luînd ca variabile

$$x^1 = x, \quad x^2 + \varepsilon x^3 = z, \quad x^3 = y,$$

această metrică se scrie:

$$ds^2 = e^{2p}[\rho dx^2 + 2(dx + dz)\,dy - \varepsilon dy^2] \pm e^{2q}dz^2. \tag{28''}$$

Presupunem că $\rho \neq 0$, atunci luînd ca nouă variabilă pe $x + \frac{y}{\rho}$ în loc de $x$, putem scrie:

$$ds^2 = e^{2p}\left[\rho dx^2 + 2dzdy - \frac{1+\rho\varepsilon}{\rho}dy^2\right] \pm e^{2q}dz^2, \tag{28'''}$$

și dacă $1 + \rho\varepsilon \neq 0$ atunci luînd ca nouă variabilă $y + \frac{\rho z}{1+\rho\varepsilon}$ și ca nouă funcție $\pm e^{2q}$ funcția

$$\pm e^{2q} - \frac{\rho}{1+\rho\varepsilon}e^{2p}, \tag{29}$$

metrica noastră devine:

$$ds^2 = e^{2p}\left[\rho dx^2 - \frac{1+\rho\varepsilon}{\rho}dy^2\right] \pm e^{2q}dz^2 \tag{30}$$

și nu poate fi cu conexiune constantă decît în cazul cînd este separabilă' deci de forma (28'), deci local euclidiană.

Dacă $1 + \rho\varepsilon = 0$, atunci metrica este de forma (24'), caz deja considerat.

Putem, deci, să ne limităm la considerarea metricii (28'') pentru $\rho = 0$. Dar în acest caz dacă $\varepsilon \neq 0$, se reduce la o metrică de tipul (24''), iar presupunînd încă $\varepsilon = 0$, în acest caz metrica este totuși de tipul (28').

Avem deci teorema:

*Un spațiu $V_3$ cu conexiune constantă, care nu este local euclidian, poate fi un spațiu al lui Vagner sau un spațiu de gen doi a cărui metrică poate fi redusă la forma canonică* (27) *).

În ceea ce privește spațiile lui Vagner $V_n$, schimbînd eventual semnul metricei, dacă aceasta nu este pozitiv definită, metrica poate fi redusă la forma canonică:

$$ds^2 = e^{2px^1}[(dx^1)^2 + \varepsilon_2(dx^2)^2 + \cdots + \varepsilon_n(dx^n)^2], \quad \varepsilon_i = \pm 1, \tag{31}$$

*) Pentru determinarea spațiilor $V_3$ cu conexiune constantă, local euclidiene, care sînt evident de genul șase, se poate întrebuința reducerea la forma canonică a conexiunii unui $A_3$, local euclidian, care a fost dată de P. Mocanu, *Sur la classification des espaces $A_3$ à connexion affine constante, localement euclidiens*, Comunicările Acad. R.P.R., 1951.

dacă vectorul $a_k$, din formula (4), nu este de lungime nulă, și la forma canonică :

$$ds^2 = e^{2px^1}[2dx^1dx^2 + \varepsilon_\alpha(dx^\alpha)^2], \quad (\varepsilon_\alpha = \pm 1,\ \alpha = 3, \ldots, n), \tag{32}$$

dacă acel vector este de lungime nulă. Rezultă, deci, că singurele spații $V_3$ cu conexiune constantă, care nu sînt local euclidiene, sînt spațiile (27) și spațiile (31), (32) pentru $n = 3$.

Vrem acum să observăm că metrica (27) poate fi extinsă la un spațiu $V_n$ sub forma :

$$ds^2 = e^{4mx^1}(dx^1)^2 \pm e^{2mx^1}[2dx^1dx^2 + \varepsilon_\alpha(dx^\alpha)^2], \tag{33}$$

care constituie astfel un exemplu de spațiu $V_n$ cu conexiune constantă, de genul doi.

Într-adevăr, ecuațiile geodezicelor acestui spațiu se scriu :

$$\begin{gathered}\frac{d^2x^1}{dt^2} = -2m\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2x^2}{dt^2} = m\varepsilon_\alpha\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2, \\ \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -2m\,\frac{dx^1}{dt}\,\frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (\alpha = 3, \ldots, n),\end{gathered} \tag{34}$$

ceea ce demonstrează faptul că $V_n$ este cu conexiune constantă.

Primită la redacție la 18 ianuarie 1962

## О ПРОСТРАНСТВАХ РИМАНА С ПОСТОЯННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

### РЕЗЮМЕ

Пространство Римана $V_n$, метрика которого задана формулой (2), называется с постоянной связностью если существует система переменных, в которой символы Кристоффеля второго рода постоянны. Для случая, когда метрика является положительно определенной, эти пространства найдены В. Вагнером и даются формулами (4). В настоящей работе показывается, что неэвклидово пространство $V_n$ может иметь род не больше $g = \frac{n(n-1)}{2} - 1$, следовательно, составляющие метрического тензора даются формулами (7), где $p \leqslant g$. Для случая $V_3$ род равен 2, и показывается, что пространства рода 2 имеют метрику, определенную формулой (27).

$$ds^2 = e^{2mz}[2dxdt + dy^2] \pm e^{4mz}dz^2,$$

где $m$ — постоянная. Показывается, что эта метрика может быть обобщена, и таким образом можно построить примеры пространств $V_n$ рода 2.

# SUR LES ESPACES DE RIEMANN À CONNEXION CONSTANTE


## RÉSUMÉ

Un espace de Riemann $V_n$ dont la métrique est donnée par la formule (2), est dit à connexion constante s'il existe un système de variables où les symboles de Christoffel de seconde espèce sont des constantes.

Si la métrique est positivement définie, ces espaces ont été déterminés par V. Vagner et ils sont donnés par les formules (4).

L'auteur montre qu'un espace $V_n$, non euclidien, peut être tout au plus du genre $g = \frac{n(n-1)}{2} - 1$. Donc les composantes du tenseur métrique sont données par les formules (7), où $p \leqslant g$.

Dans le cas d'un $V_3$, le genre est 2, et l'auteur montre que la métrique des espaces du genre 2 est donnée par la formule (27)

$$ds^2 = e^{2mz}[2\,dx\,dz + dy^2] \pm e^{4mz}dz^2$$

où $m$ est une constante. On montre que cette métrique se généralise et on obtient des exemples d'espace $V_n$ de genre deux.


## BIBLIOGRAFIE


1. G. VRÂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*. II. Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
2. V. VAGNER, *Spații ale lui Riemann cu simbolurile lui Christoffel constante*. Bul. Univ. Saratov, 1938.

# CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC. V

## PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI, LINIARE, CU COEFICIENȚI VARIABILI

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

### INTRODUCERE

În această lucrare ne ocupăm de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi cu coeficienți variabili :

$$\alpha_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+2\beta_i\frac{\partial u}{\partial x^i}+cu=f,\qquad i,j=1,2,\ldots,N, \tag{$\lambda$}$$

cu matricea coeficienților $\alpha_{ij}$

$$\|\,\alpha_{ij}\,\|$$

de rang $N-1$. Forma convenabilă pentru studiu este următoarea :

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i}+cu+\frac{\partial u}{\partial t}=f,\ i,j=1,2,\ldots,n, \tag{$\mu$}$$

coeficienții ecuației fiind funcții de $x^i$ și de $t$, cu matricea

$$\|\,a_{ij}\,\|$$

nesingulară. La baza lucrării stă metoda lui Jacques Hadamard expusă în [2]. Ne-a fost de un deosebit folos atît memoriul [1] de acad. prof. Gr. C. Moisil, cît și teza de doctorat [4] a lui Ion P. Elianu. În special [1] a netezit drumul care ducea la înțelegerea aspectului geometric al problemei.

Întrucît metoda folosită se sprijină pe proprietăţile spaţiului Riemann nesingular, definit de

$$d\sigma^2 = A_{ij}dx^i dx^j,$$

nu a fost nevoie de analiticitatea coeficienţilor $a_{ij}$, $b_i$, $c$ în raport cu variabila $t$. Numai în cap. II, § 5, într-o variantă de demonstraţie privind convergenţa uniformă a unei serii ce intervine în structura soluţiei fundamentale, am făcut această ipoteză.

Se înţelege că această lucrare nu epuizează problema ce se poate pune pentru ecuaţia ($\lambda$) şi chiar pentru ecuaţia ($\mu$). Este necesar să ne ocupăm de ecuaţia ($\mu$), cînd operatorul $\widetilde{E}$ nu este eliptic, cazul studiat în această lucrare, cît şi de ecuaţia ($\lambda$) cînd matricea $\| \alpha_{ij} \|$ este de rang $N - s$ cu $s > 1$. Un caz particular al acestui tip de ecuaţii a fost studiat în [5] şi [6].

## I

### REZULTATE PREGĂTITOARE

**1.** *Generalităţi.* După cum am spus, obiectul prezentei lucrări este rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuaţia

$$E(u) \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i} + cu + \frac{\partial u}{\partial t} = f, \tag{1}$$

cu $a_{ij}$, $b_i$, $c$ funcţii de $x^1, x^2, \ldots, x^n, t$, analitice în variabilele $x^i$ şi regulate în raport cu variabila $t$ într-un domeniu $\mathcal{D}$ din spaţiul cu $n+1$ dimensiuni, iar $f$ regulată în toate variabilele $x^i$ şi $t$. Precizăm că atunci cînd $M(x^1, x^2, \ldots, x^n, t) \in \mathcal{D}, t \in (t_1, t_2)$. În (1) matricea

$$\| a_{ij}(M) \| \tag{2}$$

pentru $M \in \mathcal{D}$ este nesingulară, deci este o matrice pătrată de rang $n$.

Ecuaţia (1) se mai poate scrie

$$\widetilde{E}(u) + \frac{\partial u}{\partial t} = f,$$

unde

$$\widetilde{E} \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i\frac{\partial}{\partial x^i} + c$$

este un operator pe care în această lucrare îl vom considera eliptic în $\mathcal{D}$ pentru orice $t \in (t_1, t_2)$, în consecinţă ecuaţia

$$\widetilde{E}(u) = 0 \tag{3}$$

este o ecuaţie liniară de tip eliptic, ai cărei coeficienţi depind de un parametru $t$.

Determinantul

$$\Delta(x, t) = | a_{ij}(M) |$$

nu se anulează pentru $M \in \mathcal{D}$.

**2.** *Caracteristici. Bicaracteristici. Conoid caracteristic.* Pentru ecuația (1) ecuația caracteristicilor este dată de

$$L(p, x, t) \equiv a_{ij} p_i p_j = 0, \quad p_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \tag{4}$$

cu $a_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n, t)$. Conform ipotezelor făcute, într-o vecinătate a punctului $M_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau) \in \mathcal{D}$ forma biliniară (4) este pozitiv definită, prin urmare determinanții

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} & a_{p2} \ldots a_{pp} \end{vmatrix}, \quad p = 0, 1, \ldots, n, \quad \Delta_0 = 1, \tag{5}$$

sînt pozitivi.

Caracteristicile ecuației (4) sînt bicaracteristicile ecuației (1) și sînt date de sistemul

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial p_i} = a_{ij} p_j, \qquad \frac{dt}{ds} = 0, \tag{6}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^i} p_i p_j, \\ \frac{dp_{n+1}}{ds} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} p_i p_j, \end{aligned} \tag{6'}$$

unde am pus $p_{n+1} = \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$.

Dacă considerăm bicaracteristicile care pleacă dintr-un punct $M_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau)$, din a doua ecuație din (6) rezultă că se găsesc în $n + 1$ - planul

$$t = \tau \tag{7}$$

și cum conoidul caracteristic cu vîrful în $M_0$ este locul bicaracteristicilor care pleacă din acest punct, urmează că pentru ecuația (1) ecuația conoidului caracteristic este dată de (7), adică este $n + 1$ - planul ce trece prin punctul $M_0$, perpendicular pe axa timpului $ot$. Rezultatul acesta se poate verifica direct pe ecuația

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu + f = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{8}$$

considerată de tip hiperbolic normal cu

$$\begin{aligned} a_{i, n+1} &= \lambda \bar{a}_{i, n+1}, \\ a_{n+1, j} &= \lambda \bar{a}_{n+1, j}, \end{aligned}$$

dacă se urmărește deformarea conoidului caracteristic cînd $\lambda \to 0$.

O concluzie imediată a acestei observații este că ecuația (1) trebuie considerată ca un caz limită de ecuație de tip hiperbolic normal (8) și anume acel caz în care coeficienții care în (8) dau termenul negativ din forma canonică sînt nuli.

Dacă introducem acum funcția

$$H(\dot{x}, x, t) = A_{ij} \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds}, \tag{9}$$

cu $A_{ij}$ minorii normalizați ai lui $a_{ij}$ din matricea (2), se verifică imediat că

$$L(p, x, t) = H(\dot{x}, x, t) \tag{10}$$

și

$$p_i = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Să arătăm acum că avem și

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{13}$$

Pentru relația (12) avem

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{dx^j}{ds} p_l \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} a_{kl} = -\frac{dx^j}{ds} p_l \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} A_{jk}, \tag{14}$$

deoarece din

$$A_{jk} a_{kl} = \delta_j^l$$

avem prin derivare în raport cu $x^i$ :

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} a_{kl} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} A_{jk} = 0.$$

Relația (14) se mai scrie, ținînd seama de (6),

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} p_l \cdot A_{jk} \frac{dx^j}{ds} = -\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} p_l p_k = -\frac{\partial L}{\partial x^i}.$$

Dacă se urmăresc calculele de mai sus, după ce se înlocuiește $x^i$ cu $t$ și se ține seamă că $a_{ik}$ — deci și $A_{ik}$ — sînt nuli dacă $j$ sau $k$ se înlocuiește cu $n + 1$, se ajunge la concluzia că avem și

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

**3.** *Cilindroidul geodezicelor.* În [1]*) se face un amplu studiu asupra geodezicelor unui spațiu Riemann singular. Fie

$$d\sigma^2 = \underset{MN}{g}\, dx^M dx^N, \qquad M, N = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

un spațiu Riemann singular, cu matricea

$$\| g_{MN} \|$$

de rang $r = n - s$, $s \neq 0$. În această situație, $d\sigma^2$ se poate scrie

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j, \quad |\gamma_{ij}| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r, \tag{16}$$

cu

$$\omega^i = e^i_M dx^M \tag{17}$$

liniar independente, prin urmare matricea dreptunghiulară $r \times n$

$$\| e^i_M \|$$

este de rang $r$. Din (17) rezultă că

$$g_{MN} = \gamma_{ij}\, e^i_M e^j_N. \tag{18}$$

Sistemul de ecuații

$$e^i_M \zeta^M = 0 \tag{19}$$

admite $\infty^s$ soluții de forma

$$\zeta^M = \eta^\alpha b^M_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \tag{20}$$

unde $\eta^\alpha$ sînt arbitrare și $b^M_\alpha$ sînt $s$ sisteme de soluții liniar independente

$$e^i_M b^M_\alpha = 0. \tag{21}$$

Din (18) și (20) rezultă că

$$g_{MN} b^N_\alpha = 0.$$

Dacă

$$L = \frac{1}{2}\, g_{MN}\, \dot{x}^M \dot{x}^N$$

este funcția lui Lagrange și

$$p_M = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M} = g_{MN}\dot{x}^N,$$

avem legăturile

$$p_M b^M_\alpha = 0,$$

de unde se deduce că $L$ este o integrală a sistemului

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}\, b^M_\alpha = 0.$$

*) p. 35.

Dacă considerăm acum ecuațiile geodezicelor

$$L_M = \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}\right] - \frac{\partial L}{\partial x^M} = 0,$$

avem combinațiile liniare

$$L_\alpha = b_\alpha^M L_M = 0,$$

care sînt echivalente cu

$$b_\alpha^M \begin{bmatrix} H & K \\ M & \end{bmatrix} dx^H dx^K = 0, \tag{22}$$

unde $\left|\begin{matrix} H & K \\ M & \end{matrix}\right|$ este simbolul lui Christoffel construit cu coeficienții lui (15). Prin urmare, *geodezicele spațiului Riemann singular* (16) *se găsesc pe varietatea* (22).

Fie acum spațiul lui Riemann asociat ecuației (1)

$$d\sigma^2 = A_{ij}\, dx^i dx^j, \tag{23}$$

unde $A_{ij}$ sînt minorii normalizați ai determinatului $|\, a_{ij}\,|$ pe care l-am presupus diferit de zero. Transpunînd rezultatele din [1] cazului nostru, avem, cu $x^{n+1} = t$,

$$g_{MN} = 0,$$

pentru $M$ sau $N$ egali cu $n+1$ și

$$\Upsilon_{ij} = A_{ij},$$

iar

$$e_M^i = \delta_M^i, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ M = 1, 2, \ldots, n+1, \end{matrix}$$

unde $\delta_M^i$ este simbolul lui Kronecker. Din (18) rezultă că $e_M^{n+1}$ putem să-luăm toți nuli. Rezultă de aici că

$$g_{MN} = A_{MN}, \qquad M, N = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Sistemul (21) se scrie, ținînd seamă că $\alpha = n+1$,

$$\delta_M^i b_{n+1}^M = 0,$$

care dă

$$b_{n+1}^1 = b_{n+1}^2 = \cdots = b_{n+1}^n = 0$$

și $b_{n+1}^{n+1}$ arbitrar.

Înlocuind acest rezultat în (22) rezultă că

$$b_\alpha^M \begin{bmatrix} H & K \\ M & \end{bmatrix} = b_{n+1}^{n+1} \cdot \frac{\partial A_{HK}}{\partial t}, \tag{24}$$

încît ecuația cilindroidului geodezicelor se scrie

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \cdot \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds} = 0, \tag{25}$$

sau

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{26}$$

4. *Geodezice.* În continuare în [1]*) se arată că ecuațiile geodezicelor spațiului Riemann definit de (16) sînt date de

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{ds} &= \frac{\partial K}{\partial p_i} - \lambda_\alpha^i \frac{dx^\alpha}{ds}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{\partial K}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda_\alpha^j}{\partial x^j} p_j \cdot \frac{dx}{ds}, \end{aligned} \tag{27}$$

și

$$b_\alpha^M \begin{bmatrix} H & K \\ M & \end{bmatrix} d\dot{x}^M d\dot{x}^N = 0,$$

cu $\alpha = r+1, \ldots, n$, $H, K = 1, 2, \ldots, n$; $i, j = 1, 2, \ldots, r$ și

$$K = \frac{1}{2} \gamma^{ij} p_i p_j,$$

$$e_\alpha^i = b_\alpha^i = \lambda_\alpha^i.$$

Revenind la problema noastră, avem

$$\gamma_{ij} = A_{ij}, \quad \gamma^{ij} = a_{ij}, \quad i, j, = 1, 2, \ldots, n,$$

deci

$$K = \frac{1}{2} a_{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} L(p, x, t)$$

și ecuațiile geodezicelor se scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{dx^i}{ds} = a_{ij} p_j, \quad \frac{dt}{ds} = 0, \\ &\frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad \frac{dp_{n+1}}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{28}$$

Conform relației (13), avem însă

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

*) p. 41.

încît ecuațiile geodezicelor au forma finală :

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial p_i}, \quad \frac{dt}{ds} = 0,$$
$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad \frac{dp_{n+1}}{ds} = 0, \tag{29}$$

ecuații din care rezultă că și geodezicele care pleacă din punctul $M_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau)$ sînt situate în $n+1$ - planul

$$t = \tau,$$

adică sînt situate tot pe conoidul caracteristic. Geodezicele de lungime nulă sînt date de (23) și anume de ecuația

$$\Gamma = 0, \tag{30}$$

însă forma (23) fiind pozitiv definită urmează că se reduce la axa cilindroidului definit de (23) și anume

$$x^i = \xi_i, \qquad i = 1,2, \ldots, n,$$

adică dreapta ce trece prin punctul $M_0$ paralelă cu axa *ot*.

De-a lungul acestei axe, distanța geodezică este nulă.

Faptul că geodezicele care pleacă dintr-un punct $M_0(\xi_i, \tau)$ sînt situate în planul $t = \tau$ este în contradicție cu însăși definiția geodezicelor, curbe determinate de două puncte *oarecare* din spațiu. Să lămurim acest lucru. Dacă considerăm două puncte $M_1(\xi_i^1, \tau^1)$ și $M_2(\xi_i^2, \tau^2)$, de-a lungul geodezicei $G$ care leagă aceste două puncte, integrala

$$s = \int_G ds \tag{31}$$

este minimă. Însă, din (29) rezultă că aceeași integrală (31) este minimă de-a lungul geodezicei $G'$, a spațiului Riemann nesingular definit de metrica (23) unde $t$ este un parametru, geodezică care unește punctul $M_2'(\xi_i^1, \tau^2)$ cu punctul $M_2(\xi_i^2, \tau^2)$ sau punctul $M_1'(\xi_i^2, \tau^1)$ cu $M_1(\xi_i^1, \tau^1)$.

Putem arăta că are chiar aceeași valoare. În adevăr, din (29) rezultă că geodezica $G$ ce unește punctul $M_1$ cu $M_2$ este formată din segmentul de dreaptă ce unește punctul $M_1(\xi_i^1, \tau^1)$ cu $M_2'(\xi_i^1, \tau^2)$ și segmentul de geodezică a spațiului Riemann nesingular definit de (23) care unește punctele $M_2'(\xi_i^1, \tau^2)$ și $M_2(\xi_i^2, \tau^2)$, deci

$$\int_G ds = \int_{M_1M_2'} ds + \int_{G'} ds,$$

însă pe $M_1M_2'$ distanța geodezică este nulă, deci

$$\int_G ds = \int_{G'} ds. \tag{32}$$

În particular faptul este echivalent cu a scufunda spațiul Riemann nesingular

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{33}$$

în spațiul lui Riemann singular în trei variabile $(x, y, z)$, cu metrica definită tot de (33). Axa cilindroidului este

$$(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 = 0$$

și de-a lungul acestei axe distanța geodezică (33) este nulă.

**5.** *Proprietăți extremale ale geodezicelor.* În [1] *) se arată:

*a*) geodezicele sînt extremalele integralei

$$I = \int_{s_0}^{s} L ds, \tag{34}$$

unde

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \frac{\omega^i \omega^j}{ds^2};$$

*b*) expresia

$$\mathcal{J} = \int \eta_i \omega^i - H \delta t, \tag{35}$$

unde

$$H = \frac{1}{2} \gamma^{ij} \eta_i \eta_j, \qquad \eta_i = \gamma_{ij} \frac{\omega^j}{ds},$$

pentru o deplasare pe geodezice, este un invariant integral;

*c*) proprietățile *a*) și *b*) sînt echivalente cu

$$\frac{d}{ds} [e_L^i \eta_i] + \frac{\partial H}{\partial x^L} - \eta_i \frac{\partial e_R^i}{\partial x^L} \frac{dx^R}{ds} = 0 \tag{36}$$

și

$$\frac{\omega^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}.$$

Transpunînd totul la problema noastră, urmează că avem:

$$\eta_i = a_{ij} \frac{dx^j}{ds},$$

$$H = \frac{1}{2} a_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

$$e_L^i = \delta_L^i = \text{constant},$$

deci (36) se transformă în

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0, \tag{36'}$$

*) p. 45.

unde, ținînd seamă de (13) și (14), obținem

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{36''}$$

sau

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0, \tag{36'''}$$

cît și

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{t}}\right) = 0,$$

deoarece $e_L^{n+1} = 0$. În (36'), (36''), (36'''), $s$ este arcul de geodezică.

6. *Funcția* $\Gamma(x, \xi, t)$. Să considerăm spațiul Riemann nesingular

$$d\sigma^2 = A_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{37}$$

unde $A_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n, t)$ sînt minorii normalizați ai elementelor $a_{ik}$ dați de (2), $t$ fiind considerat parametru. Pentru $t \in (t_1, t_2)$ forma biliniară (37) este pozitiv definită.

Prin $\Gamma(x, \xi, t)$ se înțelege pătratul distanței geodezice definită de (37). Deoarece ecuația (3) este de tip eliptic, urmează că distanța geodezică este nulă numai în punctul $x^i = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și orice $t \in (t_1, t_2)$, adică de-a lungul axei cilindroidului definit de $\Gamma(x, \xi, t)$, deci

$$\Gamma(\xi, \xi, t) = 0$$

iar ecuația

$$\Gamma(x, \xi, t) = 0$$

implică neapărat $x^i = \xi_i$. Pentru orice punct în afara acestei axe și în domeniul $\mathcal{D}$ unde este definită $\Gamma$, avem

$$\Gamma(x, \xi, t) > 0.$$

Considerînd în permanență $t$ parametru, deci referindu-ne la spațiul Riemann nesingular definit de (37), urmează că funcția $\Gamma$ se bucură, în raport cu variabilele $x^i$ și $\xi_i$, de proprietățile stabilite de J. Hadamard în [2], și la care vom face în permanență apel în capitolul care urmează, capitol care se ocupă de soluția fundamentală a ecuației (1).

Funcția $\Gamma$ nu poate juca însă în structura soluției singulare același rol ca în cazul ecuațiilor de tip hiperbolic, sau polihiperbolic normal [4], deoarece este nulă pentru orice punct de pe axa cilindroidului și nu numai în punctul $x^i = \xi_i$ și $t = \tau$. Va trebui să intervină în soluția elementară pe lîngă funcția $\Gamma$ și funcția $\gamma = t - \tau$ după cum se va vedea imediat.

## II

### SOLUȚIA FUNDAMENTALĂ

**1.** *Ecuația adjunctă.* Deoarece folosim metoda lui Riemann pentru rezolvarea problemei lui Cauchy, ne este necesară ecuația adjunctă ecuației (1) fără partea a doua. Ecuația adjunctă este dată de

$$\mathcal{L}(v) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(a_{ij}v) - 2\frac{\partial}{\partial x^i}(b_i v) - \frac{\partial v}{\partial t} + cv = 0, \tag{1}$$

deci se scrie

$$\mathcal{L}(v) \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i'\frac{\partial v}{\partial x^i} + c'v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{1'}$$

cu

$$b_i' = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} - b_i, \qquad c' = c + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial b_i}{\partial x^i},$$

și avem identitatea:

$$vE(u) - u\mathcal{L}(v) = \frac{\partial P_i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}(uv), \tag{2}$$

unde

$$P_i = va_{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k} - ua_{ik}\frac{\partial v}{\partial x^k} + uv\left(2b_i - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^k}\right). \tag{3}$$

Ne propunem să găsim soluția fundamentală care permite rezolvarea problemei lui Cauchy, adică o soluție a ecuației (1') care prezintă proprietăți speciale pe $n+1$ - planul $t = \tau$.

**2.** *Construcția soluției fundamentale.* Pentru ecuația (1') căutăm o soluție de forma

$$v = (t-\tau)^p V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right], \qquad t > \tau, \tag{4}$$

și

$$v \equiv 0 \text{ pentru } t \leqslant \tau,$$

unde $\alpha$ este o constantă, $V = V(x^1, x^2, \ldots, x^n, t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau)$ este o funcție regulată în vecinătatea punctului $M_0(x^i = \xi_i, t = \tau)$, nenulă în acest punct, iar

$$\Gamma = 0$$

este ecuația conoidului caracteristic al spațiului Riemann nesingular (37), (unde $t$ este considerat parametru), cu vîrful în punctul $x^i = \xi_i$. Avem

$$\Gamma = \Gamma(x^1, x^2, \ldots, x^n, t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

și

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$$

pentru orice $t \in (t_1, t_2)$.

Calculînd derivatele parțiale ale lui $v$, care intervin în (1'), obținem :

$$\frac{\partial v}{\partial x^i} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(t-\tau)^p \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] - \\ -\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{p-1}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i} V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right], \tag{5}$$

deci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(t-\tau)^p \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] - \\ -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} + \frac{\partial V}{\partial x^j}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\right](t-\tau)^{p-1}\exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] + \\ +\frac{1}{\alpha^2}(t-\tau)^{p-2}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] - \\ -\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{p-1}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^i \partial x^j} V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] \tag{6}$$

și

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p(t-\tau)^{p-1} V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] + \frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{p-2} V\Gamma \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] - \\ -\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{p-1}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} V \exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right] + (t-\tau)^p \frac{\partial V}{\partial t}\exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right]. \tag{7}$$

Dacă înlocuim derivatele găsite în (1'), obținem pentru $\mathcal{E}(v)$ expresia :

$$\mathcal{E}(v) \equiv [\lambda(t-\tau)^2 + \mu(t-\tau) + \theta](t-\tau)^{p-2}\exp\left[-\frac{\Gamma}{\alpha(t-\tau)}\right]$$

cu

$$\lambda = a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i'\frac{\partial V}{\partial x^i} - \frac{\partial V}{\partial t} + c'V = \mathcal{E}(V), \tag{8}$$

$$\mu = -\frac{1}{\alpha}a_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} + \frac{\partial V}{\partial x^j}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{\alpha}a_{ij}V\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \\ -\frac{2}{\alpha}b_i' V\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i} + \frac{1}{\alpha}V\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - pV \tag{9}$$

și

$$\theta = \frac{1}{\alpha^2}a_{ij}V\frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} - \frac{1}{\alpha}V\Gamma. \tag{10}$$

Funcția $\Gamma$ atașată spațiului Riemann nesingular (37), în raport cu variabilele $x^i$ ($t$ fiind considerat în permanență parametru), se bucură de următoarea proprietate, conform [2]*):

$$a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j}=4\Gamma \tag{11}$$

și dacă luăm $\alpha=4$ rezultă imediat că $\theta=0$.

Tot în [2]**) se arată că

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}=2sp_i, \tag{12}$$

$s$ fiind arcul de geodezică, iar de-a lungul unui arc de geodezică avem [2]***):

$$a_{ij}\frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x^j}=2s\frac{dU}{ds}\cdot \tag{13}$$

Cu aceste elemente putem scrie

$$\mu=-s\frac{dV}{ds}-\frac{V}{4}\left[a_{ij}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^i\partial x^j}+2b_i'\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+4p\right],$$

încît dacă punem

$$Q=a_{ij}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^i\partial x^j}+2b_i'\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma}{\partial t}, \tag{14}$$

obținem pentru $V$ ecuația:

$$s\frac{dV}{ds}+V\left(p+\frac{Q}{4}\right)-(t-\tau)\,\mathcal{L}(V)=0, \tag{15}$$

după ce, bineînțeles, am înlăturat factorul $(t-\tau)^{p-1}\exp\left[-\frac{\Gamma}{4(t-\tau)}\right]$.

Cerem funcției $V$ de a fi regulată în vecinătatea punctului $M_0(x_i=\xi_i,\ t=\tau)$ și să ia valoare nenulă în acest punct.

În punctul $M_0$ avem

$$Q(M_0)=2n, \tag{16}$$

deoarece [2]****)

$$\left.\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^i\partial x^j}\right|_{M_0}=A_{ij},\qquad \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial x^i}\right|_{M_0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right|_{M_0}=0 \tag{17}$$

*) p. 89, formula (32).
**) p. 90, formula (33).
***) p. 91, formula (34).
****) p. 93.

și ecuația (15) devine în $M_0$:

$$s\frac{dV}{ds}+V\left(p+\frac{n}{2}\right)=0.$$

Pentru ca $V$ să fie regulată în punctul $M_0$ trebuie ca

$$p+\frac{n}{2}=0, \tag{18}$$

încît ecuația care dă pe $V$ ia forma finală:

$$s\frac{dV}{ds}+V\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}\right)-(t-\tau)\,\mathcal{L}(V)=0. \tag{19}$$

3. *Determinarea funcției* $V$. Funcția $V=V(x^1, x^2, \ldots, x^n, t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau)$ trebuie să fie o soluție particulară a ecuației (19) care să îndeplinească următoarele condiții:

*a*) pentru $s=0$ să se reducă la o constantă diferită de zero;

*b*) cînd $t\to\tau+0$ să tindă uniform către o valoare finită diferită de zero;

*c*) pentru $\tau<t<t_1$ cu $t_1$ convenabil ales și într-un domeniu conținut în domeniul de analiticitate al funcțiilor $a_{ij}$, $b_i$, $c$, $f$, funcția $V$ trebuie să fie continuu derivabilă de două ori. Cum $V$ va fi obținută printr-o serie de funcții, urmează că seria respectivă trebuie să fie uniform convergentă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul doi într-o vecinătate a lui $M_0$.

Vom lua pentru funcția $V$ o soluție de forma

$$V=V_0+(t-\tau)^{m_1}V_1+(t-\tau)^{m_2}V_2+\cdots+(t-\tau)^{m_p}V_p+\cdots, \tag{20}$$

cu $m_k$ numere reale. Folosind metoda lui J. Hadamard [2]*) pentru integrarea ecuației (19), obținem pentru $V_0$ ecuația

$$s\frac{dV_0}{ds}+V_0\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}\right)=0, \tag{21}$$

care dă

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi,t)}}\exp\left[-\int_0^s\frac{1}{s}\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}\right)ds\right], \tag{22}$$

unde $s$ este arcul de geodezică al spațiului Riemann nesingular (cap. I, (37)), $t$ fiind considerat parametru, iar

$$\Delta(\xi,t)=\left|a_{ij}\right|_{x^i=\xi_i}. \tag{23}$$

*) § 62, pp. 94–95.

Urmează de aici că

$$\lim_{s\to 0} V_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, t)}}$$

iar în punctul $M_0(x^i = \xi_i,\ t = \tau)$ valoarea lui $V_0$ este

$$V_0(M_0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \tau)}}. \tag{24}$$

Pentru aflarea lui $V_1$ înlocuim în (19) pe $V$ cu $V_0 + (t-\tau)^{m_1} V_1$, ceea ce ne dă:

$$s\left[\frac{dV_0}{ds} + V_0\left(\frac{Q}{4} - \frac{n}{2}\right) - (t-\tau)\,\mathcal{E}(V_0) + \right.$$

$$\left. + (t-\tau)^{m_1}\left[s\frac{dV_1}{ds} + V_1\left(\frac{Q}{4} - \frac{n}{2}\right) - (t-\tau)\,\mathcal{E}(V_1)\right] + m_1(t-\tau)^{m_1} V_1 = 0,\right.$$

de unde, ținînd seama de (21), obținem:

$$s\frac{dV_1}{ds} + V_1\left(\frac{Q}{4} - \frac{n}{2} + m_1\right)(t-\tau)^{1-m_1}\mathcal{E}(V_0) - (t-\tau)\,\mathcal{E}(V_1) = 0. \tag{25}$$

Ecuația (25) se mai scrie, dacă înlăturăm ultimul termen,

$$s\frac{d}{ds}\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + m_1\frac{V_1}{V_0} - (t-\tau)^{1-m_1}\frac{1}{V_0}\mathcal{E}(V_0) = 0, \tag{26}$$

deoarece

$$s\frac{d}{ds}\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \frac{1}{V_0}\,s\frac{dV_1}{ds} - \frac{V_1}{V_0^2}\,s\frac{dV_0}{ds} = -\frac{V_1}{V_0}\left(\frac{Q}{4} - \frac{n}{2} + m_1\right) +$$

$$+ \frac{1}{V_0}(t-\tau)^{1-m_1}\mathcal{E}(V_0) + \frac{V_1}{V_0}\left(\frac{Q}{4} - \frac{n}{2}\right).$$

Integrînd pe (26) obținem, dacă luăm constanta de integrare nulă,

$$V_1 = (t-\tau)^{1-m_1}\frac{V_0}{s^{m_1}}\int_0^s \frac{s^{m_1-1}}{V_0}\,\mathcal{E}(V_0)\,ds. \tag{27}$$

Înainte de a merge mai departe, să observăm că $V = V_0 + (t-\tau)^{m_1} V_1$ este regulată în $s = 0$ (ca și $V_0$ și $V_1$), iar pentru $t \to \tau + 0$

$$\lim_{t\to\tau+0} V = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \tau)}},$$

deși (dacă $m_1 > 1$) funcția componentă $V_1$ este discontinuă pe $n+1$-planul $t = \tau$. De aceeași proprietate se bucură și derivatele sale (care există).

Din aproape în aproape se determină $V_2$, $V_3$, ... În general, ecuația lui $V_p$ este dată de

$$s\frac{dV_p}{ds}+V_p\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}+m_p\right)-(t-\tau)^{1+m_{p-1}-m_p}\mathcal{E}(V_{p-1})-(t-\tau)\mathcal{E}(V_p)=0. \quad (28)$$

Pentru determinarea lui $V_p$ luăm ecuația

$$s\frac{dV_p}{ds}+V_p\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}+m_p\right)-(t-\tau)^{1+m_{p-1}-m_p}\mathcal{E}(V_{p-1})=0, \quad (29)$$

echivalentă cu

$$s\frac{d}{ds}\left(\frac{V_p}{V_0}\right)+\frac{V_p}{V_0}m_p-(t-\tau)^{1+m_{p-1}-m_p}\cdot\frac{1}{V_0}\mathcal{E}(V_{p-1})=0,$$

care integrată, cu constanta de integrare nulă, ne dă:

$$V_p=(t-\tau)^{1+m_{p-1}-m_p}\frac{V_0}{s^{m_p}}\int_0^s\frac{s^{m_p-1}}{V_0}\mathcal{E}(V_{p-1})\,ds. \quad (30)$$

În $V$, termenul $V_p$ intervine cu elementul

$$W_p=(t-\tau)^{1+m_{p-1}}\cdot\frac{V_0}{s^{m_p}}\cdot\int_0^s\frac{s^{m_p-1}}{V_0}\mathcal{E}(V_{p-1})\,ds. \quad (31)$$

Observăm că

$$\lim_{s\to 0}W_p=0. \quad (32)$$

Să arătăm că avem și

$$\lim_{t\to\tau+0}W_p=0.$$

Pentru aceasta, observăm din

$$V_1=(t-\tau)^{1-m_1}A_1,$$

cu $A_1\neq 0$ pentru $t=\tau$, că

$$V_2=(t-\tau)^{1-m_2}A_2,$$

cu $A_2\neq 0$ pentru $t=\tau$, și în general

$$V_p=(t-\tau)^{1-m_p}A_p, \quad (33)$$

cu $A_p\neq 0$ pentru $t=\tau$.

Înlocuind acum pe $V_{p-1}$ dat de (33) în (31), rezultă imediat că

$$\lim_{t\to\tau+0}W_p=0, \quad (34)$$

independent de $s$. Vom lua pentru $m_k$ un șir de *numere pozitive*.

Înlocuind acum pe $V_p$ în (20) obținem pe $V$:

$$V = V_0\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{1+m_{p-1}}}{s^{m_p}} \int_0^s \frac{s^{m_p-1}}{V_0}\, \mathcal{E}(V_{p-1})\, ds\right] \tag{35}$$

cu $m_0 = 0$.

Cu numerele $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots$ pozitive, din cele de mai sus rezultă că soluția (35) îndeplinește condițiile *a*) și *b*) impuse la începutul acestui alineat. Cît privește convergența seriei (35), adică a condiției *c*), ne vom ocupa în alineatul următor.

4. *Convergența seriei lui V.* S-a văzut din alineatul precedent, că numerele $m_p$ sînt considerate pozitive. Să vedem ce condiții suplimentare trebuie să îndeplinească pentru ca seria (35) să fie convergentă în vecinătatea lui $M_0$. Metoda folosită este o adaptare a metodei lui J. Hadamard [2]*) la situația noastră. În baza unor raționamente asemănătoare [2]**), putem considera în (35) funcția $V_0$ constantă.

Vom presupune că funcțiile $a'_{ij}$, $b'_j$, $c'$ admit în $\mathcal{D}$ o majorantă comună

$$\frac{\alpha}{1 - \dfrac{\sigma}{r}}, \tag{36}$$

unde $\alpha$, $r$ sînt funcții de $t$ și $\sigma = |x^1 - \xi_1| + |x^2 - \xi_2| + \cdots + |x^n - \xi_n|$; putem lua însă pe $\alpha$ și $r$ constante, înlocuind pe $\alpha$ cu maximul său și pe $r$ cu minimul său cînd $t > \tau$ și $t \in (t_1, t_2)$.

Dacă $v(x^1, x^2, \ldots, x^n, t)$ este o funcție regulată care împreună cu derivata sa în raport cu $t$ admite în vecinătatea $D(\xi, \varepsilon)$ a punctului $x^i = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = \tau + \varepsilon$ vecinătate situată în $n+1$ - planul $t = \tau + \varepsilon$, o majorantă de forma

$$\frac{K}{\left(1 - \dfrac{\sigma}{r}\right)^{\lambda}}, \qquad K > 0,$$

atunci avem și

$$\mathcal{E}(v) \ll \frac{\alpha' K \lambda(\lambda+1)}{\left(1 - \dfrac{\sigma}{r}\right)^{\lambda+3}}, \tag{37}$$

cu

$$\alpha' = \frac{\alpha n^2}{r^2} + \frac{n\alpha}{r(\lambda+1)}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right) + \frac{\alpha}{\lambda(\lambda+1)}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2 + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^3 \tag{38}$$

cum se poate verifica imediat.

*) pp. 96–98.
**) pp. 97 și 268.

Să arătăm acum că funcțiile $V_p$ în $D(\xi, \varepsilon)$, definite de (30), admit o majorantă de forma

$$V_p \ll \frac{K_p}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p}} . \tag{39}$$

Numerele $K_p$ depind de $\varepsilon$ și anume cînd $\varepsilon \to 0$, $K_p \to \infty$ dacă $m_p > 1$, cum rezultă din (33). În realitate avem efectiv $m_p > 1$, însă în expresia lui $V$ nu intervin funcțiile $V_p$ ci $W_p$, care sînt nule cînd $\varepsilon = 0$. Pentru $\varepsilon > 0$ însă, neegalitatea (39) este adevărată $K_p$ fiind un număr finit. În (35) integralele se vor calcula în $n+1$ - planul $t = \tau + \varepsilon$, deci putem folosi neegalitatea (39) pentru a stabili o majorantă a seriei (35).

Numerele $\frac{1}{K_p}$ tind către zero, cînd $\varepsilon \to 0$, ca și $\varepsilon^{m_{p-1}-1}$, și, după cum rezultă din structura termenului general al seriei (35), acest termen va tinde și el către zero cînd $\varepsilon \to 0$, fapt de altfel consemnat în relația (34).

Folosind pe (37) avem:

$$\mathcal{E}(V_p) \ll \frac{\alpha' K_p \, 3p(3p+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}} , \tag{40}$$

deci

$$V_{p+1} \ll \frac{K_p \alpha' \, 3p(3p+1)}{s^{m_{p+1}}} (t-\tau)^{1+m_p-m_{p+1}} \int_0^s \frac{s^{m_{p+1}-1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}} \, ds.$$

Putem considera pe $\sigma$ proporțional cu $s$, pentru $s$ suficient de mic [2]*) și deoarece

$$\left( \frac{1}{m_{p+1}} \cdot \frac{\sigma^{m_{p+1}}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}} \right)' > \frac{\sigma^{m_{p+1}-1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}} ,$$

urmează că o majorantă a funcției $V_{p+1}$ este dată de

$$V_{p+1} \ll K_p \frac{\alpha' \, 3p(3p+1)}{m_{p+1}} \cdot \frac{(t-\tau)^{1+m_p-m_{p+1}}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}} , \tag{41}$$

care este tot de forma (39).

*) p. 98.

Dacă înlocuim în dezvoltarea (35) pe (39) și (41), urmează că termenii $W_p$ și $W_{p+1}$ admit majorante, respectiv, de forma

$$(t-\tau)^{m_p}\frac{K_p}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{3p}}$$

și

$$(t-\tau)^{1+m_p}\frac{\alpha' 3p(3p+1)}{m_{p+1}}\frac{K_p}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{3p+3}}.$$

Trebuie să avem

$$\frac{W_{p+1}}{W_p}=\frac{\alpha' 3p(3p+1)}{m_{p+1}}\frac{t-\tau}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{3}}<1$$

și dacă ținem seamă că limita lui $\alpha'$, cînd $p\to\infty$, este

$$\frac{\alpha n^2}{r^2},$$

rezultă că seria (35) este convergentă numai dacă $m_{p+1}$ este un polinom de gradul doi — cel puțin — în $p$. Pentru

$$m_p=3p\,(3p+1),$$

urmează că trebuie să avem

$$0<t-\tau<\frac{r^2}{\alpha n^2}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^3$$

care împreună cu $\sigma<r$ determină o regiune de convergență a seriei (35).

Convergența stabilită mai sus se transformă în convergență uniformă dacă se înlocuiește $r$ cu minimul și $\alpha$ cu maximul valorilor lor dintr-o vecinătate a punctului $M_0$.

5. *Observație.* Să considerăm acum că $a_{ij}$, $b_i$, $c$ sînt funcții analitice și de $t$. În această situație, într-o vecinătate $D^*(\xi,\ \varepsilon)$ a punctului $x^i=\xi_i$, $t=\tau+\varepsilon$, care nu conține punctul $M_0$, punct care nu aparține nici închiderii $\overline{D}^*(\xi,\ \varepsilon)$, putem lua majorantă pentru $V_p$ pe

$$\frac{K_p^*(\varepsilon)}{\left(1-\frac{\sigma^{*\,3p}}{\rho}\right)},\qquad K^*>0,$$

cu $\sigma^* = |x^1 - \xi_1| + |x^2 - \xi_2| + \cdots + |x^n - \xi_n| + |t - \tau - \varepsilon|$, cu $\frac{1}{K_p^*(\varepsilon)} \to 0$ ca și $\varepsilon^{m_{p-1}-1}$. În această situație avem

$$\mathcal{E}(V_p) \ll \frac{\alpha' 3p(3p+1) K_p^*}{\left(1 - \frac{\sigma^*}{\rho}\right)^{3p+3}},$$

cu

$$\alpha' = \frac{\alpha n^2}{\rho^2} + \frac{n\alpha}{\rho(3p+1)}\left(1 - \frac{\sigma^*}{\rho}\right) + \left[\frac{1}{\rho(3p+1)} + \frac{\alpha}{3p(3p+1)}\right]\left(1 - \frac{\sigma^*}{\rho}\right)^2$$

și unde

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\sigma^*}{\rho}}, \qquad \alpha > 0,$$

este o majorantă a coeficienților $a'_{ij}$, $b'_i$, $c'$ în $\mathcal{D}$.

Rezultă de aici, printr-un raționament analog, că

$$V_{p+1} \ll K_p^* \frac{\alpha' 3p(3p+1)}{m_{p+1}} \cdot \frac{(t-\tau)^{1+m_p-m_{p+1}}}{\left(1 - \frac{\sigma^*}{\rho}\right)^{3p+3}},$$

de unde se obține cu ușurință, pentru $m_p = 3p(3p+1)$, că trebuie să avem

$$0 < t - \tau < \frac{\rho^2}{\alpha n^2}\left(1 - \frac{\sigma^*}{\rho}\right)^3.$$

## III

### SOLUȚIA PROBLEMEI LUI CAUCHY

1. *Formula lui Green.* Ecuația adjunctă ecuației

$$E(u) \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu + \frac{\partial u}{\partial t} = f \tag{1}$$

este, după cum am văzut (cap. II, § 1),

$$\mathcal{E}(v) \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + 2b'_i \frac{\partial v}{\partial x^i} + c'v - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

unde

$$b'_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} - b_i, \qquad c' = c + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial b_i}{\partial x^i},$$

și avem identitatea

$$vE(u) - u\mathcal{E}(v) = \frac{\partial P_i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}(uv), \tag{3}$$

cu

$$P_i = a_{ik}\left(v\frac{\partial u}{\partial x^k} - u\frac{\partial v}{\partial x^k}\right) + uv\left(2b_i - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^k}\right). \tag{4}$$

Fie acum $D$ un domeniu din spațiul cu $n$ dimensiuni, $FD$ frontiera sa, $\nu_i$ și $\beta$ cosinușii directori ai normalei exterioare la $FD$, $d(D)$ și $d(FD)$ elementul de volum și de suprafață relativ la $D$ și $FD$. Dacă $D$ și $FD$ sînt astfel încît li se poate aplica formulele stokesiene, putem scrie:

$$\int_D [vE(u) - u\mathcal{E}(v)]\, d(D) = \int_{FD} (P_i\nu_i + \beta uv)\, d(FD). \tag{5}$$

Dacă introducem derivata transversală în spațiul Riemann nesingular definit de (37) (cap. I, § 6), dată de

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{1}{\nu} a_{ik}\nu_k \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6}$$

normală pe axa timpului $ot$ ($\nu_{n+1} = 0$), deci situată în planul $t = \text{const.}$, și unde

$$\nu = [(a_{ik}\nu_k)(a_{ik}\nu_k)]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

relația integrală (5) se scrie

$$\int_D [vE(u) - u\mathcal{E}(v)]\, d(D) = \int_{FD} \left[\nu\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + wuv\right] d(FD), \tag{8}$$

cu

$$w = \left(2b_i - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^k}\right)\nu_i + \beta. \tag{9}$$

**2.** *Domeniul $D$.* Alegem semnul funcției $\Gamma$ (cap. I, § 6) în așa fel încît pentru $t > \tau$, $\Gamma > 0$. Să considerăm acum o suprafață $S$ din spațiul cu $n + 1$ dimensiuni — suprafață care va purta datele problemei lui Cauchy — și $n + 1$ - planul $t = \tau$. Presupunem că $n + 1$ - planul $t = \tau$ taie pe suprafața $S$ o porțiune $S_0$, care are comun cu $n + 1$ - planul $t = \tau$ o varietate închisă $C$, în așa fel încît frontiera formată din $S_0$ și porțiunea din $n + 1$ - planul $t = \tau$ închisă de $C$, pe care o notăm cu $P_0$, să formeze un domeniu mărginit $D$ situat în întregime în $\mathcal{D}$. Mai presupunem că $S_0$ se găsește în regiunea unde $t \geqslant \tau$. Punctul $M_0(x^i = \xi_i,\ t = \tau)$ se găsește în interiorul lui $C$, deci pe frontiera lui $D$. Frontiera $FD$ este deci formată din $S_0$ reunit cu $P_0$.

**3.** *Enunțul problemei lui Cauchy.* Transpunînd enunțul problemei lui Cauchy din cazul ecuațiilor de tip parabolic normal, deci considerînd

ecuația (1) ca un caz limită de acest tip de ecuații, conoidul caracteristic cu vîrful în $M_0$ degenerînd în $n+1$ - planul $t=\tau$, urmează că enunțul problemei lui Cauchy pentru ecuația (1) este următorul:

*Să se găsească soluția $u(x, t)$ a ecuației*

$$E(u) = f$$

*cînd se cunosc valorile funcției $u$ și ale derivatei de ordinul întîi în raport cu una din variabilele $x^i$ pe suprafața $S$.*

După cum se știe, cunoașterea unei derivate în raport cu $x^i$ este echivalentă cu cunoașterea derivatei transversale, deci în cele ce urmează vom presupune cunoscute pe $S$ valorile lui $u$ și ale derivatei $\frac{du}{d\nu}$.

Derivata transversală este nulă într-un $n+1$ - plan paralel cu planul $t=\tau$ deoarece toți $\nu_i$ sînt nuli. Urmează că dacă o porțiune din $S$ are această proprietate, pe porțiunea de suprafață respectivă este suficient să se dea numai valorile lui $u$. În acest capitol vom da soluția problemei în condițiile generale de mai sus pentru $D$. Vom vedea însă că dacă vrem să verificăm soluția găsită, sîntem nevoiți să impunem domeniului $D$ o formă particulară, formă care corespunde în totul cazului curent întîlnit la ecuația căldurii în două variabile. Discuția aceasta o vom face la ultimul alineat al lucrării.

4. *Soluția problemei lui Cauchy.* Plecăm de la formula integrală

$$\int_D [vE(u) - u\mathcal{E}(v)]\,d(D) = \int_{FD} \left[\nu\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + wuv\right] d(FD), \qquad (10)$$

luînd pentru început pentru $D$ domeniul $D(\varepsilon)$ ($D(\varepsilon) \to D$ cînd $\varepsilon \to 0$)

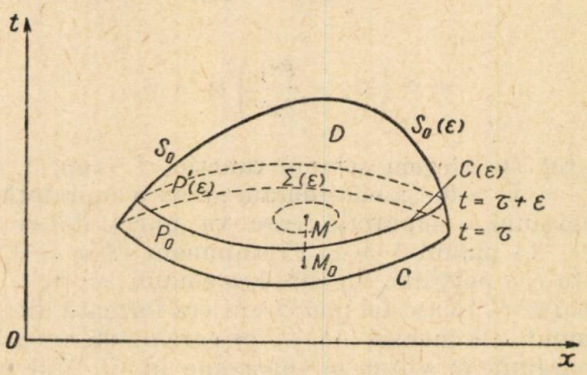



Fig. 1

obținut din $D$ prin înlocuirea planului $t=\tau$ cu planul $t=\tau+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ (fig. 1).

Suprafața $S_0$ se înlocuiește cu $S_0(\varepsilon)$, $n+1$ - planul $P_0$ se înlocuiește cu $n+1$ - planul $P(\varepsilon)$, iar porțiunea din acest plan mărginită

de $C$ o descompunem în două: o porțiune, notată cu $\Sigma(\varepsilon)$, care este mărginită de suprafața închisă a conoidului caracteristic al spațiului Riemann nesingular definit de (7) (cap. I, § 6), cu $s = s_0 = \text{const.}$, cu centrul în punctul $M$ de coordonate $x^i = \xi_i$, $t = \tau + \varepsilon$ și $P'(\varepsilon)$ complementara lui $\Sigma(\varepsilon)$ față de $P(\varepsilon)$. Suprafața $\Sigma(\varepsilon)$ se parcurge făcînd pe $s$ să varieze de la 0 pînă la valoarea $s_0 = \text{const.}$

Cu aceste elemente, formula integrală (10) se scrie:

$$\int_{D(\varepsilon)} [vE(u) - u\mathcal{E}(v)]\,d(D) = \int_{S_0(\varepsilon)} \left[\nu\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + wuv\right] d(S_0) +$$

$$+ \int_{P'(\varepsilon)} uv\,d(P) + \int_{\Sigma(\varepsilon)} uv\,d(P), \tag{10'}$$

deoarece pe $P(\varepsilon)$ toți $\nu_i$ sînt nuli. Pe $P(\varepsilon)$ avem

$$d(P) = -\,dx^1 dx^2 \ldots dx^n,$$

pentru că normala la $FD$ este cea exterioară, deci $w = -1$. Să presupunem acum că $v$ este soluția elementară, construită la capitolul precedent,

$$\mathcal{E}(v) = 0,$$

iar $u$ este soluția căutată

$$E(u) = f,$$

care pe suprafața $S_0$ ia, împreună cu derivata $\dfrac{du}{d\nu}$, valorile $\varphi$ și respectiv $\psi$.

Formula (10') cu datele de mai sus se transformă în:

$$\iint\!\!\ldots\!\int_{P'(\varepsilon)} uv\,dx^1 dx^2 \ldots dx^n + \iint\!\!\ldots\!\int_{\Sigma(\varepsilon)} uv\,dx^1 dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \iint\!\!\ldots\!\int_{S_0(\varepsilon)} \left[\varphi\left(wv - \nu\frac{dv}{d\nu}\right) + \psi\,\nu v\right] d(S_0) - \iint\!\!\ldots\!\int_{D(\varepsilon)} vf\,dx^1 dx^2 \ldots dx^n dt. \tag{11}$$

Primele trei integrale din (11) sînt integrale multiple de ordinul $n$ iar ultima este integrală multiplă de ordinul $n+1$.

Ținînd seama de faptul că soluția elementară $v$ este dată de

$$v = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{\Gamma}{4(t-\tau)}\right] \cdot V, \tag{12}$$

unde $V(M)$ este o funcție regulată pentru $M$ în $\mathcal{D}$ $(t > \tau)$, iar în vecinătatea acestui punct $\Gamma > 0$, urmează că pe $P'(\varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v = 0$$

și prin urmare

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{P'(\varepsilon)} \ldots \int uv\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n = 0. \tag{13}$$

Suprafața $S_0$ avînd o normală continuă, sau fiind formată din porțiuni de-a lungul cărora normala variază continuu, putem scrie și

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_0(\varepsilon)} \ldots \int \left[ \varphi \left( wv - \nu \frac{dv}{d\nu} \right) + \psi \nu v \right] d(S_0) = \iint_{S_0} \ldots \int \left[ \varphi \left( wv - \nu \frac{dv}{d\nu} \right) + \psi \nu v \right] d(S_0) \tag{14}$$

și

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D(\varepsilon)} \ldots \int v f\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n dt = \iint_{D} \ldots \int v f\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n dt. \tag{14'}$$

Ne rămîne să ne mai ocupăm de limita integralei

$$\iint_{\Sigma(\varepsilon)} \ldots \int uv\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n \tag{15}$$

cînd $\varepsilon \to 0$. Deoarece cînd $\varepsilon \to 0$, $M \to M_0$, urmează că

$$\lim_{M \to M_0} u(M) = u(M_0), \tag{16}$$

încît, în definitiv, nu avem a cerceta în (15) decît

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Sigma(\varepsilon)} \ldots \int v\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n \tag{17}$$

și unde $s_0$ este oricît de mic dorim. Din structura funcției $V$ (cap. II, (35)) rezultă că putem lua pentru $V$ valoarea

$$V \cong \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \tau + \varepsilon)}},$$

dacă $s_0$ este suficient de mic și

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V \cong \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \tau)}},$$

încît

$$\lim_{s_0 \to 0} \left( \lim_{\varepsilon \to 0} V \right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\xi, \tau)}}. \tag{18}$$

Din cauza structurii eliptice a ecuației $\widetilde{E}(u) = 0$ (cap. I, § 1), funcția $\Gamma$ în vecinătatea punctului $M$ are forma [3] *) :

$$\Gamma \leqslant s_0^2 \left[ \alpha_1^2 \left( \frac{dx^1}{ds} \right)^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{dx^2}{ds} \right)^2 + \cdots + \alpha_n^2 \left( \frac{dx^n}{ds} \right)^2 \right],$$

cu

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 = | A_{ij} | = \frac{1}{\Delta(\xi, \tau)},$$

încît după o rotație

$$y^1 - \xi_1 = \alpha_1 (x^1 - \xi_1), \ldots, y^n - \xi_n = \alpha_n (x^n - \xi_n), \tag{19}$$

cu determinantul transformării

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \sqrt{\Delta(\xi, \tau)},$$

integrala (15), în afara unor cantități care tind către zero cînd $\varepsilon \to 0$ și $s_0 \to 0$, are valoarea

$$u(\xi, \tau) \iint_{r^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[ - \frac{s_0^2 r^2}{4(t - \tau)} \right] dy^1 dy^2 \ldots dy^n, \tag{20}$$

unde

$$r^2 = \left( \frac{dy^1}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy^2}{ds} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{dy^n}{ds} \right)^2. \tag{21}$$

Înlocuind mai departe pe

$$\frac{dy^i}{ds} = \frac{y^i - \xi_i}{s_0},$$

pentru $s_0$ suficient de mic, integrala (20) se transformă în

$$u(\xi, \tau) \iint_{\rho^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp \left[ - \frac{\rho^2}{4\varepsilon} \right] dy^1 dy^2 \ldots dy^n, \tag{22}$$

unde

$$\rho^2 = (y^1 - \xi_1)^2 + (y^2 - \xi_2)^2 + \cdots + (y^n - \xi_n)^2,$$

integrala fiind întinsă la $n$-sfera de rază unitatea și centru în punctul $M_0$. Deoarece avem

$$dy^1 dy^2 \ldots dy^n = \rho^{n-1} d\rho \, d\Omega_n,$$

*) p. 211.

$d\Omega_n$ fiind elementul de arie al $n$-sferei de rază unitatea, urmează că (22) se scrie:

$$u(\xi, \tau) \iint_{\Omega_n} \ldots \int d\Omega_n \int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho,$$

însă

$$\iint_{\Omega_n} \ldots \int d\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

iar

$$\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho = 2^{n-1} \int_0^1 \left(\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\left(\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right),$$

care cu transformarea

$$\frac{\rho^2}{4\varepsilon} = z^2$$

devine

$$2^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} z^{n-2} \exp(-z^2)\, d(z^2)$$

și cînd $\varepsilon \to 0$ are valoarea

$$2^{n-1} \int_0^{\infty} u^{\frac{n-2}{2}} \exp(-u)\, du = 2^{n-1}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

încît integrala (22) are valoarea finală

$$(4\pi)^{\frac{n}{2}}\, u(\xi, \tau)$$

și înlocuind-o în (11), după ce ținem seamă de (13), (14) și (14'), obținem soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (1):

$$u(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \tau) =$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{S_0} \ldots \int \left[\varphi\left(wv - \nu \frac{dv}{d\nu}\right) + \psi v \nu\right] d(S_0) - (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{D} \ldots \int v f\, d(D), \quad (23)$$

$\varphi$ și $\psi$ fiind valorile pe care le ia $u$ și $\frac{du}{d\nu}$ pe suprafața $S_0$.

În (23), prima integrală din partea a doua este multiplă de ordinul $n$, iar a doua integrală din partea a doua multiplă de ordinul $n + 1$.

**5.** *Discuția soluției obținute.* Verificarea soluției (23) se face la fel ca în [2]*) și este simplă dacă $f \equiv 0$. Pentru $f \not\equiv 0$ se ține seama și de faptul că domeniul de integrare depinde de punctul $M_0$, fapt expus explicit în [2]*), încît nu vom mai insista asupra acestui lucru.

O importanță deosebită capătă în expunerea de față verificarea condițiilor pe contur. Să reamintim că J. Hadamard precizează [2]**) că soluția găsită pentru ecuația de tip hiperbolic normal verifică condițiile pe contur impuse numai dacă suprafața $S_0$, care poartă datele problemei, satisface condiția că atunci cînd vîrful $M_0$ al conoidului caracteristic se apropie de un punct de pe $S_0$, volumul mărginit de $S_0$ și conoid tinde către zero. Se mai consideră cazul limită cînd, deși volumul mărginit tinde către zero, suprafața care mărginește volumul respectiv nu tinde către $M_0$ ci degenerează într-o varietate cu un număr mai mic de dimensiuni și se arată că și în această situație soluția dată verifică condițiile pe contur.

În cazul problemei noastre se verifică ușor pe figura 1 că în cazul cînd $S_0$ nu îndeplinește condiții speciale, atunci cînd punctul $M_0$ se apropie de un punct de pe suprafața $S_0$, volumul $(D)$ tinde către zero numai pentru o mulțime discretă de puncte de pe $S_0$, mulțime care poate fi și vidă, deoarece se poate să nu găsim pe $S_0$ nici un punct unde planul tangent la $S_0$ să fie perpendicular pe axa $Ot$. Rezultă de aici că tocmai cazul curent de rezolvare al ecuațiilor de tip hiperbolic normal, este cazul în care pentru ecuațiile parabolice condițiile pe contur nu sînt verificate, deoarece condițiile impuse de această situație nu pot fi îndeplinite.

Cazul al doilea cercetat de d'Adhémar, și prezentat de J. Hadamard în [2]***), este acela care convine problemei noastre. În adevăr, dacă luăm pentru suprafața $S_0$ suprafața $S_0^*$ a unui cilindru cu generatoarele paralele cu axa $Ot$, cuprins între $n+1$ - planele $P_0(t = \tau)$ și $P(t = t', t' > \tau)$, reunită cu porțiunea $P^*$ decupată de cilindru în planul $P$, astfel că $S_0^*$, $P_0$, $P^*$ închid un domeniu $D$ din spațiul cu $n+1$ dimensiuni situat în $\mathcal{D}$ (fig. 2),

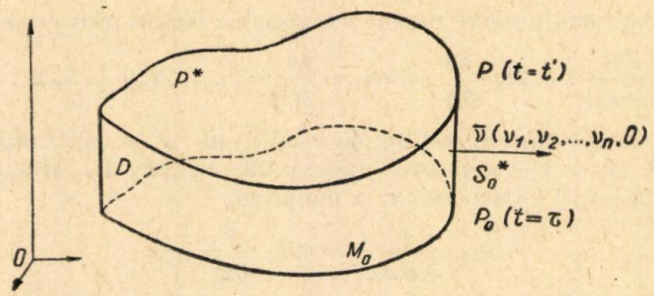



Fig. 2

*) pp. 181–183.
**) pp. 183–185.
***) p. 186.

atunci formula (23) se transformă în :

$$u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{S_0^*} \ldots \int \left[ \varphi \left( wv - \nu \frac{dv}{d\nu} \right) + \psi v \nu \right] d(S_0) +$$

$$+ (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{P^*} \ldots \int \bar{\varphi}\, v\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n - (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{D} \ldots \int v f\, d(D), \qquad (24)$$

unde $\varphi$ și $\psi$ sînt valorile lui $u$ și ale derivatei transversale $\frac{du}{d\nu}$ pe $S_0^*$, iar $\bar{\varphi}$ valoarea funcției $u$ pentru $t=t'$, adică pe n + 1 - planul $P^*$.

Cînd punctul $M_0$ tinde către un punct situat în $P^*$, se verifică cu ușurință că soluția (24) verifică condiția pe contur. Cît privește cazul cînd punctul $M_0$ se apropie de un punct situat pe $S_0^*$, se folosește procedeul lui J. Hadamard.

Lucrarea de față va fi continuată de cîteva note tratînd cazul cînd ecuația $\widetilde{E}(u) = 0$ este de tip hiperbolic normal, cît și cazul cînd numărul variabilelor $t$ este oarecare.

Primită la redacție la 18 noiembrie 1961

## К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. V

### ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе решается задача Коши для уравнения

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu + \frac{\partial u}{\partial t} = f, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\alpha)$$

где $a_{ij}$, $b_i$, $c$ — аналитические функции по $x^i$ и регулярные по $t$ в области $D$ $(n + 1)$ - мерного пространства $(x^i, t)$. Предполагается, что матрица $\| a_{ij} \|$ — неособая, а оператор

$$a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + 2b_i \frac{\partial}{\partial x^i} + c$$

эллиптический в $D$. В первой главе характеристики и бихарактеристики уравнения $(\alpha)$ определяются формулами (4) и соответственно (6), (6′). Уравнению $(\alpha)$ присоединяется неособое риманово пространство, определенное формулой

$$d\sigma^2 = A_{ij} dx^i dx^j, \quad a_{ij} A_{ij} = 1, \quad A_{ij} a_{hk} = 0. \qquad (\beta)$$

Выводятся уравнения (28) геодезических сингулярного риманова пространства (в переменных $x^i$ и $t$), в которое погружается (β), и устанавливаются экстремальные свойства.

Во второй главе строится фундаментальное решение (4), где функция $V$ определяется уравнением (15) или (19) и исследуется сходимость ряда для $V$.

Последняя глава посвящена эффективному вычислению решения задачи Коши. Решение находится в виде (23). В последнем параграфе показываются некоторые критические аспекты полученной формулы и замечается, что в случае области $D$ из рис. 2 решение, удовлетворяющее граничным условиям, дается формулой (24). Работа основана на методе Адамара [2].

## CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE. V

### PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE, LINÉAIRES, À COEFFICIENTS VARIABLES

RÉSUMÉ

On considère le problème de Cauchy dans le cas de l'équation

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+2b_i\frac{\partial u}{\partial x^i}+cu+\frac{\partial u}{\partial t}=f,\qquad i,j=1,2,\ldots,n \tag{α}$$

$a_{ij}$, $b_i$ et $c$ étant des fonctions analytiques de variables $x^i$ et régulières par rapport à $t$ dans un domaine $D$ de l'espace à $n$ dimensions $x^i$, $t$. On suppose la matrice $\|a_{ij}\|$ non singulière et l'opérateur

$$a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}+2b_i\frac{\partial}{\partial x^i}+c$$

elliptique dans $D$. Au premier chapitre, l'auteur trouve les caractéristiques et les bicaractéristiques de l'équation (α) donnée par (4) et respectivement par (6) et (6′). Il associe à l'équation (α) l'espace de Riemann, non singulier, défini par

$$d\sigma^2=A_{ij}dx^i dx^j,\qquad a_{ij}A_{ij}=1,\qquad A_{ij}a_{hk}=0, \tag{β}$$

et il trouve les équations des courbes géodésiques (28) de l'espace de Riemann singulier (dans les variables $x^i$ et $t$) dans lequel plonge (α), et on établit des propriétés extrémales.

Au chapitre II il construit la solution fondamentale, fournie par (4), la fonction $V$ étant définie par l'équation (15) ou (19), et il s'occupe de la convergence de la série de $V$.

Le dernier chapitre traite du calcul effectif de la solution du problème de Cauchy. Cette solution est donnée par (23). Au dernier paragraphe on fait quelques remarques concernant la formule obtenue et on y montre que, dans le cas du domaine $(D)$ donné par la figure 2, la solution qui vérifie les conditions à la limite est (24). Le présent travail est fondé sur la méthode de Jacques Hadamard [2].

## BIBLIOGRAFIE

1. GRIGORE C. MOISIL, *Sur les géodésiques des espaces de Riemann singuliers*. Bull. Math. Soc. Roum. sci., *42* (*1*) (1940).
2. JACQUES HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem*. New York, 1952.
3. ROBERT SAUER, *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*. Springer Verlag, Berlin, 1952.
4. ION P. ELIANU, *Problema lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale liniare polihiperbolice normale*. Studii și cercetări matematice, **III**, *3—4* (1952).
5. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. I. Studiul unei clase de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi*. Studii și cercetări matematice, **XI**, *2* (1960).
6. — *Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. II. Ecuații iterate*. Studii și cercetări matematice, **XI**, *2* (1960).

# ASUPRA UNEI TEOREME A LUI NORMAN LEVINE

DE

SOLOMON MARCUS

**1.** Norman Levine a demonstrat următoarea teoremă:

*Fie $R$ mulțimea numerelor reale și fie o funcție $f: R \to R$. O condiție necesară și suficientă ca $f$ să fie continuă aproape peste tot pe $R$ este ca pentru orice mulțime deschisă $G^* \subset R$ să avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A$ este de măsură Lebesgue nulă* (teorema 1 din [2]).

În cele ce urmează ne propunem să dăm o extensiune a teoremei de mai sus.

**2.** Fie $\mathcal{F}$ o familie de submulțimi ale spațiului topologic $P$. Vom spune că $\mathcal{F}$ este *ereditară* dacă din $M \in \mathcal{F}$ și $N \subset M$ rezultă $N \in \mathcal{F}$. Vom spune că $\mathcal{F}$ este *complet additivă* dacă din $M_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, \ldots)$ și $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ rezultă $M \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 1. *Fie $P$ și $S$ două spații topologice. Fie $\mathcal{F}$ o familie ereditară de părți ale lui $P$. Fie $f: P \to S$ o funcție ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulțime $D \in \mathcal{F}$. În aceste condiții, pentru orice mulțime deschisă $G^* \subset S$ avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A \in \mathcal{F}$.*

Demonstrație. Fie $X = f^{-1}(G^*)$. Să notăm cu $C$ mulțimea punctelor de continuitate ale lui $f$. Avem $X = X_c \cup X_d$, unde $X_c = C \cap X$, $X_d = D \cap X$. Fie $x \in X_c$. După însăși definiția continuității într-un punct, există o mulțime deschisă $G_x \subset P$, astfel încît $x \in G_x$ și $f(G_x) \subset G^*$, deci $G_x \subset X$. Rezultă:

$$X \subset \left(\bigcup_{x \in X_c} G_x\right) \cup X_d \subset X$$

și, deoarece mulțimea $G$ definită de

$$G = \bigcup_{x \in X_c} G_x$$

este deschisă, avem

$$X = G \cup X_d.$$

Însă $X_d$ este o parte a mulțimii $D$; deoarece $D \in \mathcal{F}$ iar $\mathcal{F}$ este ereditară, rezultă că, punînd $A = X_d$, obținem $X = G \cup A$, $G$ și $A$ avînd proprietățile cerute de teorema 1.

*Exemple.* Fie $f : P \to S$. Să presupunem, pe rînd, că $D$ este: rară; risipită; izolată; frontieră; numărabilă; de prima categorie. În aceste condiții, dacă se dă o mulțime deschisă $G^* \subset S$, avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă în $P$ iar $A$ este, în $P$, pe rînd: rară; risipită; izolată; frontieră; numărabilă; de prima categorie.

Fie $f$ o funcție reală, cu variație mărginită pe intervalul $[a, b]$. Se știe că $D$ este, în acest caz, numărabilă. Rezultă că pentru orice mulțime deschisă $G^*$, formată din numere reale, $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A$ este numărabilă.

Fie $f$ o funcție reală, de prima clasă Baire pe intervalul $[a, b]$. Se știe că $D$ este, în acest caz, de prima categorie. Rezultă că, pentru $G^*$ deschisă, $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A$ este de prima clasă Baire. Drept cazuri particulare, aici intră funcțiile derivate și funcțiile aproximativ continue în fiecare punct din $[a, b]$.

Dacă $P = R^n$ și $S = R$, atunci, presupunînd că $D$ este de măsură Lebesgue nulă sau de măsură Jordan nulă, rezultă că, pentru orice mulțime deschisă $G^* \subset R$ avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă în $R^n$ iar $A$ este de măsură $n$-dimensională Lebesgue nulă, respectiv de măsură jordaniană $n$-dimensională nulă.

Fie $f$ o funcție reală, integrabilă Riemann pe intervalul $n$-dimensional $I_n \subset R^n$. Se știe că $D$ este, în acest caz, de măsură $n$-dimensională Lebesgue egală cu zero. Rezultă că, pentru orice mulțime deschisă $G^* \subset R$, avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă în $R^n$ iar $A$ este de măsură $n$-dimensională Lebesgue egală cu zero.

TEOREMA 2. *Fie $P$ un spațiu topologic și fie $T$ un spațiu metric separabil. Fie $\mathcal{F}$ o familie ereditară și complet aditivă de părți ale lui $P$. Fie $f : P \to T$. Să presupunem că pentru orice mulțime deschisă $G^* \subset T$ avem $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă în $P$ iar $A \in \mathcal{F}$. În aceste condiții, dacă $D$ este mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui $f$, avem $D \in \mathcal{F}$.*

Demonstrație. Fie $x \in D$. Faptul că $f$ nu este continuă în $x$ revine la următoarea situație: există o mulțime deschisă $G_x^* \subset T$ cu următoarele două proprietăți: $f(x) \in G_x^*$; pentru orice mulțime deschisă $G \subset P$ astfel încît $x \in G$, avem $f(G) \not\subset G_x^*$.

Din faptul că $T$ este metric și separabil rezultă că $T$ are bază numărabilă (a se vedea, de exemplu, [1], p. 133). Fie $V(u, r)$ acea sferă din $T$ care are centrul în $u \in T$ și raza egală cu numărul rațional $r > 0$. Există o mulțime $H \subset T$, numărabilă și densă în $T$, astfel încît, notînd prin $K$ mulțimea numerelor raționale pozitive, să avem (în baza teoremei lui Lindelöf; a se vedea, de exemplu, [1], p. 131):

$$T = \bigcup_{u \in H,\ r \in K} V(u, r).$$

Să revenim acum la punctul $x \in D$. Este uşor de văzut că există o sferă $V(u, r) \subset T$, cu $u \in H$ şi $r \in K$, astfel încît

$$f(x) \in V(u, r) \subset G_x^* \tag{1}$$

şi, pentru orice mulţime deschisă $G \subset P$, cu proprietatea $x \in G$, avem $f(G) \not\subset V(u, r)$. Conform ipotezei, avem

$$f^{-1}(V(u, r)) = G_{u,r} \cup A_{u,r}, \tag{2}$$

unde $G_{u,r}$ este deschisă în $P$ iar $A_{u,r} \in \mathcal{F}$. Dacă am avea $x \in G_{u,r}$, atunci, luînd pe $G_{u,r}$ în rolul mulţimii $G$ de mai sus, ar rezulta $f(G_{u,r}) \not\subset V(u, r)$, ceea ce este fals; aşadar $x \in G_{u,r}$. Însă din (1) rezultă că

$$x \in f^{-1}(V(u, r)).$$

Ţinînd seamă de (2), obţinem $x \in A_{u,r}$.

Am demonstrat astfel că

$$D \subset A = \bigcup_{u \in H,\, r \in K} A_{u,r}. \tag{3}$$

Cum, pentru orice $u \in H$ şi $r \in K$, $A_{u,r} \in \mathcal{F}$ şi deoarece $\mathcal{F}$ este complet additivă, rezultă că $A \in \mathcal{F}$. Ţinînd seamă că $\mathcal{F}$ este ereditară, rezultă din (3) că $D \in \mathcal{F}$ şi teorema 2 este demonstrată.

*Exemple.* Fie $f : P \to T$. Să presupunem, pe rînd, că $\mathcal{F}$ este : familia părţilor numărabile ale lui $T$; familia părţilor de prima categorie ale lui $T$. În aceste condiţii, $D$ este, pe rînd : numărabilă; de prima categorie.

Fie $P = R^n$, $T = R$. Fie $\mathcal{F}$ familia mulţimilor din $R^n$, de măsură $n$-dimensională Lebesgue egală cu zero. În aceste condiţii, $D$ este de măsură nulă în sensul lui Lebesgue.

**3.** Din teorema pe care am citat-o la începutul acestui articol, Norman Levine deduce următorul corolar :

*Fie $R$ mulţimea numerelor reale şi fie $f : R \to R$. O condiţie necesară şi suficientă ca $f$ să fie continuă aproape peste tot pe $R$ este ca pentru orice mulţime închisă $F^* \subset R$ să avem $f^{-1}(F^*) = F - A$, unde $F$ este închisă iar $A$ este de măsură Lebesgue nulă* (corolarul din [2]).

Pe o cale asemănătoare celeia urmată de Norman Levine, vom obţine, în cele ce urmează, drept corolarii ale teoremelor 1 şi 2, teoremele 1′ şi 2′.

TEOREMA 1′. *Fie $P$ şi $S$ două spaţii topologice. Fie $\mathcal{F}$ o familie ereditară de părţi ale lui $P$. Fie $f : P \to S$ o funcţie ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulţime $D \in \mathcal{F}$. În aceste condiţii, pentru orice mulţime închisă $F^* \subset S$ avem $f^{-1}(F^*) = F - A$, unde $F$ este închisă iar $A \in \mathcal{F}$.*

Demonstraţie. Avem $f^{-1}(F^*) = P - f^{-1}(S - F^*)$. Să punem $G^* = S - F^*$. $G^*$ este deschisă deci, în baza teoremei 1, $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A \in \mathcal{F}$. Aşadar : $f^{-1}(F^*) = P - (G \cup A) = (P - G) \cap (P - A)$. Punînd $F = P - G$ şi observînd că $F$ este închisă, rezultă $f^{-1}(F^*) = F - A$ şi teorema 1′ este demonstrată.

TEOREMA 2'. *Fie $P$ un spațiu topologic și fie $T$ un spațiu metric separabil. Fie $\mathcal{F}$ o familie ereditară și complet additivă de părți ale lui $P$. Fie $f: P \to T$. Să presupunem că pentru orice mulțime închisă $F^* \subset T$ avem $f^{-1}(F^*) = F - A$, unde $F$ este închisă în $P$ iar $A \in \mathcal{F}$. În aceste condiții, dacă $D$ este mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui $f$, avem $D \in \mathcal{F}$.*

Demonstrație. Fie o mulțime deschisă $G^* \subset T$. Să punem $F^* = T - G^*$. $F^*$ este închisă, deci avem, prin ipoteză, $f^{-1}(F^*) = F - A$, unde $F$ este închisă iar $A \in \mathcal{F}$. Trecînd la complementară, obținem

$$S - f^{-1}(F^*) = (S - F) \cup A. \tag{4}$$

Însă

$$S - f^{-1}(F^*) = f^{-1}(G^*)$$

iar mulțimea $G = S - F$ este deschisă. Din (4) rezultă deci că $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, unde $G$ este deschisă iar $A \in \mathcal{F}$. În baza teoremei 2 rezultă că $D \in \mathcal{F}$ și teorema 2' este demonstrată.

4. *Semnalarea unor analogii.* Este ușor de văzut că măsurabilitatea Lebesgue a unei funcții reale de variabilă reală poate fi caracterizată prin fiecare dintre următoarele două proprietăți: 1) Pentru orice mulțime $M$ de tipul borelian $F_\sigma$, avem $f^{-1}(M) = L \cup N$, unde $L$ este o mulțime de tipul borelian $F_\sigma$ iar $N$ este o mulțime de măsură Lebesgue nulă; 2) Pentru orice mulțime $M'$ de tipul borelian $G_\delta$, avem $f^{-1}(M') = L' - N'$, unde $L'$ este de tipul borelian $G_\delta$ iar $N'$ este o mulțime de măsură Lebesgue nulă. Pe de altă parte, se știe că o funcție reală de variabilă reală este măsurabilă în sensul lui Lebesgue dacă și numai dacă $f$ este aproximativ continuă aproape peste tot. În sfîrșit, să mai ținem seama că măsurabilitatea Jordan a unei funcții se caracterizează prin continuitatea ei aproape peste tot [4]. Aceste observații arată că, cel puțin parțial, funcționează următoarea analogie între teoremele din această lucrare și corespondentul lor în cazul în care *continuitatea* se înlocuiește prin *continuitatea aproximativă*:

| continuitate | continuitate aproximativă |
|---|---|
| mulțimi deschise | mulțimi de tipul $F_\sigma$ |
| mulțimi închise | mulțimi de tipul $G_\delta$ |
| măsurabilitate Jordan | măsurabilitate Lebesgue |

Să considerăm acum funcțiile cu proprietatea lui Baire în sens larg ([1], p. 306). Este ușor de văzut că aceste funcții pot fi caracterizate prin fiecare din următoarele două proprietăți: 1) pentru orice mulțime boreliană $M$ de tipul $F_\sigma$, avem $f^{-1}(M) = L - N = L' \cup N'$, unde $L$ este de tipul $F_\sigma$, $N$ și $N'$ sînt de prima categorie Baire, iar $L'$ este de tipul $G_\delta$; 2) pentru orice mulțime $M'$ de tipul $G_\delta$, avem $f^{-1}(M') = L - N = L' \cup N'$, unde $L$, $L'$, $N$ și $N'$ au aceleași semnificații ca mai sus. Pe de altă parte, funcțiile cu proprietatea lui Baire se caracterizează prin aceea că punctele în care o astfel de funcție nu este calitativ continuă (în sensul din [3]) formează o mulțime de prima categorie. Aceste observații arată că, cel puțin parțial,

funcționează următoarea analogie între teoremele din această lucrare și corespondentul lor în cazul în care *continuitatea* se înlocuiește prin *continuitatea calitativă*:

| continuitate | continuitate calitativă |
|---|---|
| mulțimi deschise din spațiul valorilor | mulțimi de tipul $F_\sigma$ din spațiul valorilor |
| mulțimi deschise din spațiul argumentului | mulțimi de tipul $G_\delta$ din spațiul argumentului |
| mulțimi închise din spațiul valorilor | mulțimi de tipul $G_\delta$ din spațiul valorilor |
| mulțimi închise din spațiul argumentului | mulțimi de tipul $F_\sigma$ din spațiul argumentului |
| continuitate | proprietatea lui Baire |

**5.** În [2], Norman Levine, bazîndu-se pe teorema 1 din [2], mai obține două teoreme și anume:

*Fie $f$ și $g$ continue aproape peste tot. Să presupunem că pentru orice mulțime reală $A$, de măsură pozitivă, mulțimea $g(A)$ este de asemenea de măsură pozitivă. În aceste condiții, funcția $h(x) = f(g(x))$ este continuă aproape peste tot* (teorema 2 din [2]).

*Fie $f$ continuă iar $g$ continuă aproape peste tot. În aceste condiții, funcția $h(x) = f(g(x))$ este continuă aproape peste tot* (teorema 3 din [2]).

Dar aceste teoreme se obțin mai ușor pe cale directă, folosind însăși definiția funcțiilor continue aproape peste tot, decît folosind teorema 1 din [2] așa cum face Norman Levine. Este suficient să observăm că, fiind date două funcții $f$ și $g$, continue aproape peste tot, o condiție suficientă ca funcția $h(x) = f(g(x))$ să fie continuă aproape peste tot este ca mulțimea $g^{-1}(A)$ să fie de măsură nulă de îndată ce mulțimea $A$ a discontinuităților lui $f$ este de măsură nulă. Din această observație rezultă imediat teoremele 2 și 3 din [2]. Pentru teoreme mai speciale referitoare la suprapunerea funcțiilor continue aproape peste tot, a se vedea [5] și [6].

Ca generalizare a observațiilor de mai sus, obținem următoarea propoziție:

*Fie $\mathcal{F}$ o familie ereditară și additivă de părți ale lui $R$. Fie $f$ și $g$ două funcții reale de variabilă reală, astfel încît dacă $D_f$ este mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui $f$ iar $D_g$ este mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui $g$, atunci $D_f \in \mathcal{F}, D_g \in \mathcal{F}$. În aceste ipoteze, o condiție suficientă ca punctele de discontinuitate ale funcției $h = f(g(u))$ să formeze o mulțime $D_h \in \mathcal{F}$ este ca mulțimea $g^{-1}(A)$ să aparțină lui $\mathcal{F}$ ori de cîte ori mulțimea $A \in \mathcal{F}$.*

*Problemă.* Ar fi interesant să se edifice o teorie a integralei Riemann în spații abstracte, luîndu-se ca punct de plecare teorema 1 din [2] precum și generalizările date ei în lucrarea de față.

Primită la redacție la 29 decembrie 1961

# ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ НОРМАНА ЛЕВИНА


## РЕЗЮМЕ

Устанавливаются следующие теоремы, обобщающие результаты работы [2].

Теорема 1. Пусть $P$ и $S$ топологические пространства. Пусть $\mathcal{F}$ семейство подмножеств $P$ такое, что вместе с любым подмножеством $A$ содержит все подмножества $A$. Пусть $f: P \to S$ функция, точки разрыва которой образуют множество $D \in \mathcal{F}$. Тогда для любого открытого множества $G^* \subset S$ имеем $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, где $G$ открыто, а $A \in \mathcal{F}$.

Теорема 2. Пусть $P$ топологическое пространство и $T$-метрическое сепарабельное пространство. Пусть $\mathcal{F}$ вполне аддитивное семейство подмножеств $P$, такое же, как и выше в теореме 1. Пусть $f: P \to T$. Предположим, что для любого открытого множества $G^* \subset T$ имеем $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, где $G$ открыто в $P$, а $A \in \mathcal{F}$. Тогда, если $D$ — множество точек разрыва функции $f$, то $D \in \mathcal{F}$.

Теоремы 1 и 2 остаются верными, если открытые множества заменяются замкнутыми, а $\cup$ заменяется через —.

Даются приложения к разным классам действительных функций одного или нескольких действительных переменных и указываются некоторые аналогии между непрерывностью в смысле Коши, апроксимативной непрерывностью и непрерывностью через резидуальные множества.


# SUR UN THÉORÈME DE NORMAN LEVINE


## RÉSUMÉ

Généralisant des résultats établis dans [2], l'auteur démontre les théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soient $P$ et $S$ deux espaces topologiques. Soit $\mathcal{F}$ une famille héréditaire de parties de $P$. Soit $f: P \to S$ une fonction dont les points de discontinuité forment un ensemble $D \in \mathcal{F}$. Dans ces conditions, pour tout ensemble ouvert $G^* \subset S$ nous avons $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, où $G$ est ouvert et $A \in \mathcal{F}$.*

Théorème 2. *Soit $P$ un espace topologique et soit $T$ un espace métrique séparable. Soit $\mathcal{F}$ une famille héréditaire et complètement additive de parties de $P$. Soit $f: P \to T$. Supposons que pour tout ensemble ouvert $G^* \subset T$ nous ayons $f^{-1}(G^*) = G \cup A$, où $G$ est ouvert en $P$, et $A \in \mathcal{F}$. Dans ces conditions, si $D$ est l'ensemble des points de discontinuité de $f$, nous avons $D \in \mathcal{F}$.*

Les théorèmes 1 et 2 restent vrais si les ensembles ouverts sont remplacés par des ensembles fermés, et $\cup$ par $-$.

L'auteur indique des exemples d'application à différentes classes de fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles, et il signale des analogies entre la continuité de Cauchy, la continuité approximative et la continuité par des ensembles résiduels.

BIBLIOGRAFIE

1. C. KURATOWSKI, *Topologie*. I. Warszawa-Wrocław, 1948.
2. NORMAN LEVINE, *A note on functions continuous almost everywhere*. Amer. Math. Monthly, *66*, 791—792 (1959).
3. S. MARCUS, *Contribuții la o analiză a funcțiilor reale bazată pe noțiunea de categorie în sensul lui Baire*. Studii și cercetări matematice, **VII**, *3—4*, 251—272 (1956).
4. — *La mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann dans un espace mesuré topologique*. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **XX**, *3—4*, 156—163 (1959).
5. — *Sur la superposition de deux fonctions intégrables au sens de Riemann et sur le changement de variable dans l'intégrale de Riemann*. Revue de math. pures et appl., Acad. R.P.R., **IV**, *3*, 381—389 (1959).
6. I. D. ZASLAVSKI, *On R-integrability of the superposition of R-integrable functions*. Vestnik Leningrad. Univ., **11**, 49—55 (1953) (citat după Math. Rev., **17**, 721 (1956)).

# ASUPRA MIȘCĂRII UNUI FLUID VÎSCOS ÎN TUBURI ELASTICE, CU REFERIRE LA HEMODINAMICĂ. II

DE

L. DRAGOȘ

În [1] am studiat mișcarea unui fluid vîscos într-un tub elastic, considerînd că la intrare în tub se cunoaște viteza fluidului, și am dat soluția problemei sub formă explicită susceptibilă de aplicații în hemodinamică. Considerații de ordin medical impun rezolvarea aceleiași probleme în cazul cînd la intrare se cunoaște nu viteza ci presiunea. Aceasta vom face în nota de față.

Neglijînd termenii neliniari și considerînd mișcarea axial simetrică, ecuațiile Navier-Stokes se scriu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

iar ecuația de continuitate

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,, \tag{2}$$

notațiile fiind cele din [1]. Considerarea greutății fluidului nu produce nici o dificultate, după cum rezultă din [1].

Vom integra ecuațiile (1), (2) în următoarele condiții la limită : presupunem că la intrare se dă presiunea, deci

$$\begin{aligned} -P + 2\nu\frac{\partial v_z}{\partial z} &= \sigma(r, t), \qquad z = 0\,; \\ \nu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &= \tau(r, t), \qquad z = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

În particular, vom considera $\sigma(r, t) = a(1 - \cos \beta t)$, $\tau(r, t) = 0$.

Pe suprafața laterală avem racordare cu mișcarea tubului elastic. Considerînd forma particulară a mișcării tubului,

$$u_r = \frac{A}{r} e^{i\alpha(z-c't)}, \qquad u_z = Be^{i\alpha(z-c''t)}. \tag{4}$$

Condițiile de racordare se scriu :

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \; v_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}, \; -P + 2\nu \frac{\partial v_r}{\partial r} = \sigma_{rr}; \qquad r = R. \tag{5}$$

Aici $\sigma_{rr}$ are expresie cunoscută dacă se folosesc deplasările (4).

Presupunem de asemenea

$$\lim_{z \to \infty} (v_r, \; v_z) = 0. \tag{6}$$

Vom considera, pentru simplitatea calculelor, următoarele condiții inițiale :

$$v_r(r, z, 0_+) = 0, \quad v_z(r, z, 0_+) = 0; \tag{7}$$

$$\lim_{t \to \infty} (v_r, v_z) = \text{finit}. \tag{8}$$

Metoda dezvoltată permite integrarea sistemului (1), (2) în condiții inițiale oarecare.

Determinarea soluției sistemului (1), (2) se face urmînd aceeași cale ca în [1]. Făcînd o transformare integrală Laplace :

$$u(r, z, p) = \int_0^\infty v_r(r, z, t)\, e^{-pt}\, dt, \quad w(r, z, p) = \int_0^\infty v_z\, e^{-pt}\, dt,$$
$$\Pi(r, z, p) = \int_0^\infty P\, e^{-pt}\, dt \tag{9}$$

și o transformare Hankel cu limite finite :

$$\tilde{u}(s, z, p) = \int_0^R r\, u(r, z, p)\, J_1(rs)\, dr,$$
$$\tilde{w}(s, z, p) = \int_0^R r\, w(r, z, p)\, J_0(rs)\, dr, \tag{10}$$
$$\tilde{\Pi}(s, z, p) = \int_0^R r\, \Pi(r, z, p)\, J_0(rs)\, dr,$$

unde $s$ este o rădăcină a ecuației transcendente

$$J_0(Rs) = 0. \tag{11}$$

Sistemul (1), (2) conduce la următoarea soluție, ținînd cont și de condițiile de racordare a mișcării cu mișcarea tubului elastic :

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \frac{\omega}{s} C_1(s, p)\, e^{-\omega z} + C_2(s, p)\, e^{-sz} - \frac{1}{s} T'(s, z, p), \\
\overline{w} &= C_1(s, p)\, e^{-\omega z} + C_2(s, p)\, e^{-sz} + T(s, z, p), \\
\overline{\Pi} &= \frac{p}{s} C_2(s, p)\, e^{-sz} - \frac{\nu}{s^2}(\omega^2 T' - T''') + \frac{\nu}{s} f(z);
\end{aligned} \tag{12}$$

aici

$$T(s, z, p) = \frac{s\nu}{p}\left(\frac{\operatorname{sh} sz}{s} - \frac{\operatorname{sh} \omega z}{\omega}\right)\int [sg(z) + f'(z)]dz\,;\ \omega^2 = s^2 + \frac{p}{\nu};$$

$$g(z) = -Rsw(R, z, p)\, J_1(Rs)\,;\quad f(z) = sRJ_1'(Rs)u(R, z, p) - \tag{13}$$

$$- RJ_1(Rs)\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} + \frac{1}{\nu} RJ_1(Rs)\,\Pi(R, z, p).$$

Condițiile la intrare (3), în cazul special care ne interesează, se scriu :

$$-\Pi + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = \Sigma(r, p), \qquad z = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial_r} = 0, \qquad z = 0\,, \tag{15}$$

unde

$$\Sigma(r, p) = \int_0^\infty \sigma(r, t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{a\beta^2}{p(p^2 + \beta^2)}.$$

Amplificăm (14) cu $rJ_0(rs)dr$, iar (15) cu $rJ_1(rs)dr$ și integrînd în intervalul $(0, R)$ obținem :

$$\begin{aligned}
&-\overline{\Pi} + 2\nu \frac{d\overline{w}}{dz} = \overline{\Sigma}(s, p) = \frac{aR\beta^2}{sp(p^2 + \beta^2)} J_1(Rs), \qquad z = 0; \\
&-s\overline{w} + \frac{d\tilde{u}}{dz} = -Rw(R, 0, p)\, J_1(Rs), \qquad z = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

De aici determinăm funcțiile $C_1(s, p)$ și $C_2(s, p)$. Se obține următorul sistem :

$$\begin{aligned}
&2\nu s\omega\, C_1 + (2\nu s^2 + p)\, C_2 = -s\,\overline{\Sigma} + \nu s \int g(z)\, dz \,\Big|_{z=0}, \\
&(2s^2\nu + p)\, C_1 + 2s^2\nu C_2 = \nu s Rw(R, 0, p)\, J_1(Rs),
\end{aligned} \tag{16'}$$

a cărui soluție este :

$$C_1(s,p)=\left\{\frac{2s^2\left[-\frac{a\beta^2}{sp(p^2+\beta^2)}+\frac{\nu sc''B}{i\alpha c''+p}\right]+\frac{i\alpha c''B(2\nu s^2+p)}{i\alpha c''+p}}{\Delta}\right\}RsJ_1(Rs),$$

$$C_2(s,p)=-\left\{\frac{\frac{2\nu i\alpha c''B\omega s}{i\alpha c''+p}-(2\nu s^2+p)\left[\frac{c''Bs}{i\alpha c''+p}-\frac{a\beta^2}{\nu sp(p^2+\beta^2)}\right]}{\Delta}\right\}RsJ_1(Rs), \tag{17}$$

cu notația

$$\Delta=4\nu\omega s^3-\frac{1}{\nu}(2\nu s^2+p)^2.$$

Folosind teorema de inversiune a integralelor (10), [2], rezultă soluția următoare :

$$w(r,z,p)=\frac{2}{R^2}\sum_i\frac{J_0(rs_i)}{[J_1(Rs_i)]^2}[C_1(s_i,p)\,e^{-\omega z}+C_2(s_i,p)\,e^{-s_iz}+T(s_i,z,p)], \tag{18}$$

$$\Pi(r,z,p)=\frac{2}{R^2}\sum_i\frac{J_0(rs_i)}{[J_1(Rs_i)]^2}\left\{\frac{p}{s_i}C_2(s_i,p)e^{-s_iz}-\frac{\nu}{s_i^2}[\omega^2T'(s_i,z,p)-\right.$$
$$\left.-T''''(s_i,z,p)]+\frac{\nu}{s_i}f(s_i,z,p)\right\},$$

suma luîndu-se pe toate rădăcinile pozitive ale ecuației (11). Seriile de mai sus sînt uniform convergente [2]. Folosind teorema de inversiune relativă la integralele de tip (9), avem :

$$v_z(r,z,t)=\frac{1}{\pi iR^2}\sum_j\frac{J_0(rs_j)}{[J_1(Rs_j)]^2}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}[C_1(s_j,p)\,e^{-\omega z}+C_2(s_j,p)\,e^{-s_jz}+$$
$$+T(s_j,z,p)]\,e^{pt}\,dp, \tag{19}$$

$$P(r,z,t)=\frac{1}{\pi iR^2}\sum_j\frac{J_0(rs_j)}{[J_1(Rs_j)]^2}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left\{\frac{p}{s_j}C_2(s_j,p)\,e^{-s_jz}-\frac{\nu}{s_j^2}[\omega^2T'-T''']+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu}{s_j}f(s_j,z,p)\right\}e^{pt}dp\,.$$

$C_1(s,p)$, $C_2(s,p)$ avînd valorile (17), integralele de mai sus capătă o formă mai simplă. Nu insistăm asupra calculelor.

Din ecuația de continuitate (2) se deduce $v_r(r,z,t)$.

*Teorema de unicitate.* Presupunînd că ar exista două soluții ale sistemului (1), (2) $w_1$ și $w_2$, diferența $w=w_1-w_2$ ar satisface același sistem cu

condiţiile la limită (3) în care $\sigma = 0$, (5) în care $\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \sigma_{rr} = 0$. Rezultă din (13) $g = f = 0$, deci $T(s, z, p) = 0$. Sistemul (16′) este omogen, deci $C_1 = C_2 = 0$. Rezultă deci $w = \Pi = 0$.

Primită la redacţie la 15 august 1961

## О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ТРУБАХ В СВЯЗИ С ДИНАМИКОЙ КРОВИ. II

### РЕЗЮМЕ

Исследуется движение вязкой жидкости в упругой трубе, предполагая, что при входе жидкости в трубу известно давление, то есть имеем условия (3). Эти условия вытекают из практических соображений.

Уравнения Навие-Стокса (1) и уравнение непрерывности (2) с условиями на входе (3), условия (5) и начальные условия (7) интегрируются тем же методом, как и в [1]. Получается окончательное решение (19) и доказывается теорема единственности.

## SUR LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX DANS DES TUBES ÉLASTIQUES EN SE RÉFÉRANT À LA HÉMODYNAMIQUE. II

### RÉSUMÉ

L'auteur étudie le mouvement d'un fluide visqueux dans un tube élastique en considérant que, à l'entrée du fluide dans le tube, on connaît la pression — c'est-à-dire les conditions (3). Celles-ci s'imposent au point de vue pratique.

L'équation de Navier-Stokes (1) et l'équation de continuité (2), avec les conditions à l'entrée (3), les conditions de raccordement (5) et

les conditions initiales (7) s'intègrent par les mêmes méthodes que dans [1]. L'auteur obtient la solution définitive (19) et il formule le théorème d'unicité.

BIBLIOGRAFIE

1. L. DRAGOȘ, Studii și cercetări matematice, **XIII**, *1* (1962).
2. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*. New York–Toronto–London, 1951.

# ASUPRA APLICĂRII METODELOR STATISTICE LA PROSPECTAREA MINEREURILOR ȘI SUBSTANȚELOR UTILE

DE

A. CREANGĂ, I. LARI și R. THEODORESCU

Epoca istorică în care ne aflăm, epoca construirii socialismului și comunismului, avînd ca imperativ creșterea producției și productivității muncii, impune cu necesitate folosirea rezultatelor științei și tehnicii celei mai înaintate.

Dezvoltarea științei și tehnicii moderne au făcut ca matematica să pătrundă într-o măsură din ce în ce mai mare în numeroase domenii de activitate. Orientarea cercetărilor matematice către viața practică are o mare însemnătate în etapa actuală în țara noastră; de aceea hotărîrile Congresului al III-lea al P.M.R. pun în fața cercetării matematice sarcina de a dezvolta lucrările de calcul mecanic, grafic și statistic cu aplicații la economia națională.

Dintre ramurile matematicii care oferă posibilități multiple de aplicație, atît ca metode de cercetare în cadrul altor științe, cît și în tehnică, se remarcă în special teoria probabilităților și statistica matematică. În cele ce urmează, ne propunem să prezentăm cîteva aspecte care ilustrează aplicațiile acestor domenii ale matematicii la unele probleme din domeniul geologiei zăcămintelor de minereuri și substanțe utile.

Pentru rezolvarea cu succes a problemei consolidării și dezvoltării prospecțiunilor miniere, problemă căreia Partidul și Guvernul țării noastre îi acordă o deosebită atenție, este necesar să se asigure bazele științifice ale prospectării, astfel încît să se poată ajunge la o estimare justă a perspectivelor diferitelor regiuni (a se vedea I. P. Antropov [3]). Deoarece s-a dovedit experimental că atît conținutul în minereu cît și conținutul în substanțe utile al unui zăcămînt urmează o repartiție lognormală, este logic ca la baza estimării perspectivelor miniere în diferite regiuni să stea metode cu caracter probabilistic-statistic. Este necesar să subliniem că utilizarea acestor metode ne permite ca prin mijloace minime de investiții

să obţinem un maxim de informaţii asupra posibilităţilor miniere, cantitative şi calitative, ale fiecărei regiuni analizate, realizîndu-se astfel însemnate economii.

Prima parte a lucrării se ocupă de aplicaţiile repartiţiei lognormale la zăcămintele de minereuri şi substanţe utile. După unele consideraţii cu privire la repartiţia lognormală, se trece la analiza repartiţiei conţinuturilor în minereuri şi substanţe utile în zăcăminte, analizîndu-se lognormalitatea repartiţiei corespunzătoare şi permanenţa lognormalităţii. Pentru determinarea preciziei informaţiilor cu privire la valoarea numerică a conţinutului mediu în minereuri şi substanţe utile ale probelor extrase din zăcămînt, sînt apoi analizate erorile care corespund categoriilor de probe care nu au suferit o distrugere a corelaţiei existente între diferitele conţinuturi de minereuri specifice fiecărui zăcămînt.

Partea a doua a lucrării este consacrată evaluării conţinutului mediu în minereuri şi substanţe utile al unui zăcămînt. Sînt analizate mai întîi procedeele utilizate în cazul zăcămintelor liniare, în scopul estimării prin sondaje a valorii cantităţii de zăcămînt mineralizate precum şi a densităţii medii de mineralizare. Se trece apoi la problema optimizării planurilor de prospectare minieră în cazul general.

În sfîrşit, amintim că în [11] a fost utilizată o teorie algebrică pentru formularea unei metode generale pentru prospectarea şi exploatarea metalelor rare.

Lucrarea de faţă se adresează în special inginerilor şi tehnicienilor care folosesc metode statistice în probleme legate de geologia zăcămintelor şi substanţelor utile.

## I. APLICAŢIILE REPARTIŢIEI LOGNORMALE LA ZĂCĂMINTELE DE MINEREURI ŞI SUBSTANŢE UTILE

### § 1. GENERALITĂŢI ASUPRA REPARTIŢIEI LOGNORMALE

Experimental, M. Allais a arătat [1] că numeroase fenomene naturale şi economice urmează o repartiţie lognormală ; citǎm, de exemplu : variaţia în timp a debitului unui fluviu ; valoarea numerică a diametrelor particulelor de praf în suspensie în atmosfera unei mine de cărbuni ; granulometria obţinută ca rezultat al unei operaţii de concasare, precum şi cea obţinută ca rezultat al unei analize efectuate asupra probelor naturale ; conţinutul în minereu al unui zăcămînt.

Repartiţia lognormală se caracterizează prin faptul că logaritmul variabilei aleatoare considerate urmează o lege normală ; rezultă de aici că densitatea de repartiţie $f(x)$ a unei variabile aleatoare $X$ care urmează repartiţia lognormală este dată de expresia

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \ln \gamma)^2}{2\sigma^2}},$$

unde $\ln\gamma$ și $\sigma^2$ sînt respectiv valoarea medie și dispersia logaritmului natural $\ln X$. Pentru ușurarea practicii curente de lucru, se efectuează, de obicei, următoarea schimbare de variabilă:

$$Z = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{X}{\gamma}, \tag{1.1.1}$$

de unde rezultă

$$X = \gamma e^{\sigma Z};$$

în acest caz $Z$ este o variabilă aleatoare normală $N(0,1)$.

Din faptul că $\ln\gamma$ este valoarea medie a variabilei aleatoare $\ln X$, rezultă că $\gamma$ este mediana și media geometrică a variabilei aleatoare $X$.

Momentele repartiției lognormale sînt:

$$\alpha_n = \gamma^n e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}},$$

de unde rezultă că valoarea medie a lui $X$ este

$$\alpha_1 = \gamma e^{\frac{\sigma^2}{2}}, \tag{1.1.2}$$

deci o funcție de mediană și de dispersia logaritmică. De asemenea, dispersia variabilei aleatoare lognormale $X$ este

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1^2 (e^{\sigma^2} - 1).$$

Coeficientul de corelație $\rho$ a două variabile aleatoare lognormale $X'$ și $X''$, poate fi evaluat cu ajutorul unei selecții de volum $n$ prin intermediul relației:

$$r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln x_i' - \ln\gamma')(\ln x_i'' - \ln\gamma'')}{\sigma'\sigma''},$$

unde $\gamma'$ și $\gamma''$, $\sigma'$ și $\sigma''$ sînt medianele și abaterile tip logaritmice ale variabilelor $X'$ și $X''$.

Este interesant de studiat repartiția lui $\ln X''$ în cazul în care $\rho \neq 0, \pm 1$ și $X' = x'$ este fixat. Să aplicăm cele cunoscute asupra repartiției normale bidimensionale variabilelor $\ln X'$ și $\ln X''$. În cazul existenței unei corelații între $X'$ și $X''$, găsim pentru $\ln X''$ valoarea medie

$$M(\ln X'' \mid X' = x') = \ln\gamma'' + \rho \frac{\sigma''}{\sigma'} \ln\left(\frac{x'}{\gamma'}\right)$$

și dispersia

$$D^2(\ln X'' \mid X' = x') = \sigma''^2 (1 - \rho^2).$$

Aşadar, pentru $X'$ fix, $X''$ este tot o variabilă aleatoare lognormală caracterizată de parametrii :

$$\gamma'' \left(\frac{x'}{\gamma'}\right)^{\rho \frac{\sigma''}{\sigma'}}, \sigma''^2 (1 - \rho^2). \tag{1.1.3}$$

Din relaţia (1.1.2) rezultă că valoarea medie a lui $X''$ pentru $X' = x'$ fixat este :

$$M(X'' \mid X' = x') = \gamma'' \left(\frac{x'}{\gamma'}\right)^{\rho \frac{\sigma''}{\sigma'}} e^{\frac{\sigma''^2(1-\rho^2)}{2}}. \tag{1.1.4}$$

Parametrii $\gamma$ şi $\sigma^2$, care caracterizează repartiţia lognormală, se pot estima pe baza selecţiilor. Pentru valoarea medie $\ln\gamma$ se alege ca cea mai bună estimaţie media aritmetică a variabilelor aleatoare normale obţinute în $n$ probe :

$$\ln \gamma^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i .$$

Se observă că $\ln\gamma^*$ este o variabilă aleatoare normală $N(\ln\gamma, \sigma^2/n)$, deci $\gamma^*$ este o variabilă aleatoare lognormală de mediană $\gamma$, de dispersie logaritmică $\sigma^2/n$ şi de valoare medie $\gamma e^{\frac{\sigma^2}{2n}}$. Pentru estimarea dispersiei logaritmice se alege, în conformitate cu cele cunoscute asupra repartiţiei normale, următoarea expresie :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \ln \gamma^*)^2 ;$$

pentru $n$ destul de mare, $\sigma^{*2}$ este asimptotic normal.

## § 2. ANALIZA REPARTIŢIEI CONŢINUTURILOR ÎN MINEREURI ŞI SUBSTANŢE UTILE ÎN ZĂCĂMINTE

Cercetarea posibilităţilor de aplicare a proprietăţilor repartiţiei lognormale, în cazul zăcămintelor de minereuri şi substanţe utile, necesită definirea noţiunii de populaţie. Aceasta se poate da în două moduri după felul în care se ia în considerare zăcămîntul : *a*) dacă acesta este luat în considerare ca fiind o unire a unui număr mare de blocuri alăturate, de acelaşi volum $V$ şi aceeaşi formă geometrică, atunci *populaţia este constituită din mulţimea conţinuturilor $X$ în minereu sau substanţă utilă a fiecărui volum $V$* ; *b*) dacă zăcămîntul este considerat ca o juxtapunere de suprafeţe alăturate de aceeaşi arie $S$ şi aceeaşi formă geometrică, atunci *populaţia este constituită din mulţimea produselor $hX$, corespunzătoare intensităţii de mineralizare $h$ şi conţinutul în minereu $X$, asociate fiecărei suprafeţe.* În acest sens, în evaluarea cantităţii de minereu dintr-un zăcămînt se va folosi fie metoda volumelor, fie metoda suprafeţelor.

Fiind dat zăcămîntul, analiza repartiției minereurilor în zăcămînt se execută pe baza unui plan de carotaj întocmit fie în conformitate cu metoda volumelor, fie în conformitate cu metoda suprafețelor, extrăgîndu-se carote de același volum sau de aceeași suprafață. Pe aceste carote se verifică lognormalitatea repartiției unui minereu. Dacă după extragerea unui număr suficient de carote repartiția nu apare lognormală, se deduce că zăcămîntul nu este omogen, adică conține mai multe tipuri de minereuri. Acesta este cazul unui zăcămînt eterogen.

Un mijloc rapid și intuitiv de punere în evidență a eterogenității este construirea norului de corelație. Se alege un sistem de axe de coordonate în care pe abscisă sînt trecute valorile numerice ale lui $\ln X'$ și pe ordonată cele ale lui $\ln X''$, iar rezultatului obținut din analizele de conținut al fiecărei probe i se face să-i corespundă în planul $\ln X'$, $\ln X''$ un punct. Mulțimea punctelor obținute din analizele efectuate asupra carotelor extrase constituie norul de corelație. Dacă zăcămîntul este eterogen, punctele se distribuie în mai multe grupe eliptice, fapt care dovedește existența în același zăcămînt a două minereuri *depuse simultan în loc.* Este deci important de a sublinia faptul că un procedeu statistic intuiește existența unor diferențieri mineralogice nebănuite la începutul operației de analizare. Se poate afirma chiar mai mult : dacă grupele eliptice care constituie norul de corelație nu se întretaie, atunci procedeul statistic permite chiar separarea diferiților componenți mineralogici. În cazul că grupele eliptice se întretaie, separarea componenților mineralogici se efectuează pe baze și criterii de analiză petrografică. Experimental, se constată că fiecărui component mineralogic, semnalat în norul de corelație, îi este asociată o repartiție lognormală.

În analiza repartiției carotelor cu ajutorul metodei volumelor — în cazul celeilalte metode concluziile rămînînd valabile — se pune întrebarea dacă lognormalitatea depinde de alegerea volumului $V$ a fiecărei carote. Cu alte cuvinte, dacă vom face o nouă selecție în care carotele vor avea volumul egal cu $2V$, găsim aceeași repartiție sau nu ? Experiențele confirmă că lognormalitatea se păstrează, însă parametrii $\gamma$ și $\sigma^2$ variază. În cele ce urmează se va demonstra permanența lognormalității cu ajutorul teoriei lui Wijs [21]. Pentru aceasta, să considerăm un zăcămînt de volum $W$ și cu un conținut mediu în minereu sau substanță utilă $m$. În interiorul acestui zăcămînt considerăm o împărțire în subvolume $V_i$ cu un conținut $m_i$ variabil. Fiecare volum $V_i$ este considerat ca fiind format din ansamblul unor volume $V$ mai mici, alăturate, egale între ele și caracterizate printr-un conținut în minereu sau substanță utilă egal cu $X$.

Se alege unul dintre volumele $V$ și se divide în mai multe moduri în două volume egale, de conținut $X_1$ și $X_2$. Considerăm variabila aleatoare

$$d = \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1}, \qquad (1.2.1)$$

corespunzătoare abaterii relative a variabilelor aleatoare $X_1$ și $X_2$. Fiecărui mod de divizare a volumului $V$ îi corespunde un $d$, care este o variabilă aleatoare. Fie $\delta$ valoarea sa medie. Se introduce ipoteza — justificată în

practică într-o primă aproximaţie — că $d$ este egal cu $\delta$. Atunci din (1.2.1) rezultă :

$$X_1 = (1 - d)\ m, \qquad X_2 = (1 + d)m.$$

Împărţind din nou volumele obţinute în cîte două volume egale, se obţin conţinuturile în minereu sau substanţe utile, date de expresiile $(1 + d)^2\ m$, $(1 + d)(1 - d)m$, $(1 - d)\ (1 + d)\ m$ şi $(1 - d)^2\ m$. Repetînd de $k$ ori procesul, se obţin $2^k$ volume, valorile numerice ale conţinutului în minereu sau substanţe utile fiind date în tabela următoare :

*Tabela 1*

| Numărul volumelor | Conţinutul în minereu |
|---|---|
| 1 | $(1 + d)^k\ m$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $k$ | $(1 + d)^{k-1}\ (1 - d)\ m$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $k$ | $(1 + d)^{k-r}(1 - d)^r\ m$ |
| $\overline{r\,!\,(k - r)\,!}$ | . |
| . | . |
| . | . |
| 1 | $(1 - d)^k\ m$ |

Rezultă deci că probabilitatea ca unul din cele $2^k$ volume să aibă un conţinut de minereu

$$X = (1 + d)^{k-r}\,(1 - d)^r\ m \tag{1.2.2}$$

este egală cu

$$\frac{C_k^r}{2^k} = \frac{k\,!}{2^k\ r\,!\,(k - r)\,!}.$$

Avem de-a face deci cu o repartiţie binomială, rezultînd deci că pentru valori mari ale lui $k$, repartiţia lui $r$ converge către o repartiţie normală. Deoarece din (1.2.2) se vede că $\ln X$ este o funcţie liniară de $r$,

$$\ln X = \ln m + k \ln (1 + d) + r \ln \frac{1 - d}{1 + d},$$

rezultă că $\ln X$ este o variabilă aleatoare normală. Aşadar, pentru valori mari ale lui $k$, $X$ urmează o repartiţie lognormală. Din cele arătate se deduce permanenţa lognormalităţii, în sensul că prin aplicarea procedeului indicat, două volume vecine $V$ au următoarele conţinuturi :

$$X_i = (1 + d)^{k-r}\,(1 - d)^r\ m,$$
$$X_j = (1 + d)^{k-r-1}\ (1 - d)^{r+1}\ m.$$

Volumul $2V$, format prin alăturarea volumelor vecine $V$, va avea un conținut în minereu dat de relația

$$X = (1 + d)^{k-r-1} (1 - d)^r m.$$

Deci conținutul în minereu sau în substanțe utile al volumelor $2V$ urmează o repartiție asemănătoare cu aceea urmată de conținutul volumelor $V$, înlocuind pe $k$ cu $k - 1$. Deoarece prima repartiție este lognormală pentru valori mari ale lui $k$, urmează că pentru aceleași valori și a doua repartiție este lognormală.

O concluzie care rezultă din permanența lognormalității și din faptul că suma a două variabile aleatoare lognormale independente nu este o variabilă aleatoare lognormală, este că există o corelație între conținuturile în minereu sau substanțe utile a două volume vecine, fapt care explică constatarea experimentală a unei anumite continuități de mineralizare. Aceasta înseamnă că este mult mai probabil ca în apropierea unei regiuni bogate în minereu sau substanțe utile să existe zăcăminte similare, decît în regiuni mai îndepărtate.

Un caz interesant, întîlnit uneori în analiza repartiției conținuturilor în zăcămintele a căror formă implică aplicarea metodei suprafețelor, este acela în care există o anumită corelație între intensitatea de mineralizare $h$ și conținutul $X$ în minereu sau substanță utilă. Într-un asemenea caz, raționamentele se fac asupra conținutului ponderat $hX$ care, ca și intensitatea $h$, se observă că urmează o repartiție lognormală. Conținutul mediu al zăcămîntului este dat în aceste cazuri de către raportul dintre conținutul ponderat și intensitatea medie de mineralizare. În cazul în care intensitatea de mineralizare $h$ este inferioară intensității minime de mineralizare $h'$, corespunzătoare probelor obținute prin carotajul mecanic, valoarea conținutului real obținut prin efectuarea operațiilor de exploatare este dată de raportul $hX/h'$. Întrucît $h'$ este o constantă, este suficient ca desfășurarea raționamentelor să aibă ca bază valorile $hX$, mai ales că dispersia valorilor lui $hX$ nu diferă de dispersia valorilor lui $X$.

Dacă intensitatea de mineralizare $h$ este superioară intensității $h'$, atunci pentru a se stabili rentabilitatea zăcămîntului, este necesar să se studieze repartiția conținutului în minereu sau substanță utilă în funcție de tonajul zăcămîntului.

Prin procedeul de selecționare a probelor găsim repartiția variabilei $X$ în funcție de suprafața orizontală, și nu în funcție de tonaj. Pentru a găsi repartiția lui $X$ în funcție de tonaj, considerăm suprafața zăcămîntului împărțită într-un număr oarecare de porțiuni de arie $S$ egală cu aria unei probe.

Într-un mod corespunzător, considerăm că volumul zăcămîntului este împărțit în același număr de cilindri, de secțiune $S$. Notăm parametrii variabilelor aleatoare lognormale $X$, $h$, $Y = hX$, cu $\gamma_x$, $\gamma_h$, $\gamma_Y$ și $\sigma_x$, $\sigma_h$, $\sigma_Y$. Fie

$$z = \frac{1}{\sigma_x} \ln \frac{x}{\gamma_x} \tag{1.2.3}$$

şi $\rho$ coeficientul de corelaţie, în general negativ, între $h$ şi $X$. Intensitatea de mineralizare medie a suprafeţelor $S$ avînd acelaşi conţinut de minereu $X = x$, se obţine din formula (1.1.4),

$$M(h \mid X = x) = \gamma_h \left[\frac{x}{\gamma_x}\right]^{\rho \frac{\sigma_h}{\sigma_x}} e^{\frac{\sigma_h^2 (1-\rho^2)}{2}}.$$

Ţinînd seamă de formula (1.2.3), găsim :

$$M(h \mid X = x) = m_h e^{\rho \sigma_h z - \rho^2 \frac{\sigma_h^2}{2}}, \tag{1.2.4}$$

unde $m_h$ este valoarea medie a lui $h$.

Deoarece, cu notaţia (1.2.3), avem $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ suprafeţe $S$ care au un conţinut în minereu cuprins între valorile $x$ şi $x + dx$, urmează că procentul, în funcţie de tonajul zăcămîntului, al cilindrilor de secţiune $S$ care conţin o cantitate de minereu cuprinsă între $x$ şi $x + dx$ este :

$$f(z)dz = \frac{M(h \mid X = x)}{m_h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Înlocuind pe $M(h \mid X = x)$ cu valoarea sa din (1.2.4), găsim

$$f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-\rho\sigma_h)^2}{2}} dz.$$

Deci repartiţia lui $X$ în funcţie de tonaj este tot o repartiţie lognormală, iar transformarea de variabile (1.1.1) are forma

$$z' = z - \rho\, \sigma_h = \frac{1}{\sigma_x} \ln \left[\frac{x}{\gamma_x e^{\rho \sigma_h \sigma_x}}\right].$$

De aici urmează că : *a*) dispersia lui $X$ în funcţie de tonaj este egală cu $\sigma_x$, adică cu dispersia lui $X$ în funcţie de suprafaţă ; *b*) mediana lui $X$ în funcţie de tonaj are valoarea

$$\gamma_x' = \gamma_x e^{\rho \sigma_h \sigma_x};$$

*c*) valoarea medie a lui $X$ în funcţie de tonaj, adică media ponderată, se deduce din media neponderată $\alpha_1$ după cum urmează

$$\alpha_1' = \alpha_1 e^{\rho \sigma_h \sigma_x}.$$

## § 3. DETERMINAREA PRECIZIEI INFORMAŢIILOR DATE DE PROBE

În practica selecţionării probelor din zăcămintele de minereuri şi substanţe utile, s-au constatat două tipuri de erori, corespunzătoare celor două feluri de probe : proba medie de carote naturale sfărîmate şi prelucrate

în laborator şi proba geologică de carote naturale. Din prima categorie fac parte selecţionările de carote naturale efectuate în laborator după sfărîmarea bucăţilor de analizat. Această categorie se caracterizează prin faptul că populaţia care se analizează a suferit, înainte de analiza carotelor, diferite operaţii de spargere, sfărîmare, care au distrus structura zăcămîntului şi au anulat orice corelaţie între diferitele conţinuturi de minereuri. În consecinţă, erorile corespunzătoare acestei probe vor urma o repartiţie normală, ca toate fenomenele absolut aleatoare.

Carotele naturale, care ne interesează aici, sînt constituite din selecţionarea unor bucăţi masive de rocă, sau minereu, care nu schimbă structura geologică a zăcămîntului. Astfel de carote conţin particule alăturate, între care există anumite corelaţii. Aşadar, erorile care vor corespunde acestei categorii de probe vor urma o repartiţie lognormală, ca toate fenomenele cu o structură organizată. Este cazul erorilor de care ne vom ocupa mai departe : *eroarea sistematică* şi *eroarea globală*, arătînd cauzele lor şi modul de a le corecta sau înlătura.

Pentru a determina eroarea sistematică, care intervine în procesul de selecţie, datorită faptului că raţionamentele se bazează pe volumele probelor $V$ şi nu pe volumele $V_i$, este necesar să se demonstreze formula lui Krige.

Considerăm o împărţire a zăcămîntului pe care îl studiem în condiţiile de mai sus şi cu notaţiile corespunzătoare. Datorită lognormalităţii repartiţiei avem : 1) cantităţile $m_i$ urmează o repartiţie lognormală în fiecare $V_i$, cu parametrii $\gamma'$ şi $\sigma'^2$; 2) cantităţile $X$ urmează o repartiţie lognormală în fiecare $V_i$ cu valoarea medie $m_i$ şi parametrii $\gamma_i$ şi $\sigma_i^2$; 3) cantităţile $X$ urmează o repartiţie lognormală în $W$ cu parametrii $\gamma$ şi $\sigma^2$.

Fie $\rho$ coeficientul de corelaţie între $X$ şi $m_i$. Atunci, pentru $m_i$ fixaţi, obţinem din 2), 3) şi din formula (1.1.3) :

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 (1 - \rho^2). \tag{1.3.1}$$

Observăm că $\sigma_i^2$ nu depinde de $m_i$ ; dispersia lui $X$ este aceeaşi în toţi $V_i$.

Valoarea medie a lui $X$ pentru $m_i$ fixaţi o găsim din 1), 2) şi din formula(1.1.4) :

$$M(X \mid m_i) = \gamma \left(\frac{m_i}{\gamma'}\right)^{\rho \frac{\sigma}{\sigma'}} e^{\frac{\sigma^2(1-\rho^2)}{2}}. \tag{1.3.2}$$

Înlocuind valoarea medie din membrul stîng al relaţiei (1.3.2) cu expresia sa în funcţie de parametrii $\gamma$ şi $\sigma^2$ dată de formula (1.1.2), găsim

$$\rho = \frac{\sigma'}{\sigma}. \tag{1.3.3}$$

Revenind la formula (1.3.1), ajungem la formula lui Krige

$$\sigma^2 = \sigma_i^2 + \sigma'^2. \tag{1.3.4}$$

Dispersia lui $V$ în $W$ este suma dispersiei lui $V$ în $V_i$ cu dispersia lui $V_i$ în $W$; astfel ea este superioară fiecăreia din cele două dispersii.

O consecință a formulei lui Krige este posibilitatea de a verifica că $X$ și $m_i$ au aceeași valoare medie în $W$. Pentru $X$ în $W$, această valoare medie, în conformitate cu formula (1.1.2), este:

$$M(X) = \gamma e^{\frac{\sigma^2}{2}}. \tag{1.3.5}$$

Valoarea medie a lui $m_i$ este

$$M(m_i) = \gamma' e^{\frac{\sigma'^2}{2}}. \tag{1.3.6}$$

Deoarece fiecare $m_i$ este de forma

$$m_i = \gamma_i e^{\frac{\sigma_i^2}{2}},$$

deducem că $\gamma'$ este egal cu mediana valorilor $\gamma_i$ multiplicată cu $e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}$. Or, mediana valorilor $\gamma_i$ este $\gamma$; urmează că

$$M(m_i) = \gamma e^{\frac{\sigma_i^2 + \sigma'^2}{2}}.$$

Deci

$$M(X) = M(m_i) = m. \tag{1.3.7}$$

Din formula lui Krige rezultă că

$$\sigma^2 = F(W, V).$$

Să determinăm forma funcției $F$. Scriind formula (1.3.4) în funcție de $F$, avem:

$$F(W, V) = F(V_i, V) + F(W, V_i).$$

Dacă fixăm pe $V_i$ și facem să varieze $W$ și $V$, obținem pentru $F(W, V)$ forma

$$F(W, V) = g_1(V) + g_2(W).$$

Aplicînd acestei forme încă o dată formula lui Krige (1.3.4), găsim

$$g_1(V) + g_2(W) = g_1(V) + g_2(V_i) + g_1(V_i) + g_2(W),$$

care trebuie să fie adevărată pentru orice $V_i$. De aici rezultă că

$$g_1(x) = \lambda - g_2(x),$$

unde $\lambda$ este o constantă. Revenind la $F(W, V)$, deducem:

$$F(W, V) = g_2(W) + \lambda - g_2(V). \tag{1.3.8}$$

Pentru a determina pe $\lambda$, considerăm cazul în care $W = V$. Atunci $\sigma^2 = 0$. Din (1.3.8) rezultă $\lambda = 0$ și, prin urmare,

$$\sigma^2 = f(W) - f(V). \tag{1.3.9}$$

Formula lui Krige are o reală însemnătate în practica selecționării probelor într-un zăcămînt. Astfel, dacă se iau, de exemplu, $N$ probe de volum $V$ și conținut în minereu $X$, din $N$ volume $V_i$ ale zăcămîntului, valoarea medie a cantităților $m_i$, pentru $X = x$ fixat, după formula (1.1.4), este :

$$M(m_i \mid X = x) = \gamma' \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\rho \frac{\sigma'}{\sigma}} e^{\frac{\sigma'^2 (1-\rho^2)}{2}}. \tag{1.3.10}$$

Din formulele (1.3.5), (1.3.6) și (1.3.7), deducem

$$\gamma' = m\, e^{-\frac{\sigma'^2}{2}}, \qquad \gamma = m\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Înlocuind aceste valori în (1.3.10) și ținînd seamă de formulele (1.3.3) și (1.3.4), găsim

$$M(m_i \mid X = x) = m \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma_i^2 \sigma'^2}{2\sigma^2}}.$$

Dacă punem

$$K = \left[\frac{x}{m}\right]^{-\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma_i^2 \sigma'^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.3.11}$$

$M(m_i \mid X = x)$ se va putea scrie astfel :

$$M(m_i \mid X = x) = K\ x. \tag{1.3.12}$$

Aceasta ne spune că valoarea medie a conținuturilor celor $N$ volume $V_i$ diferă de conținutul $X$ al unei probe cu factorul $K$, unde

$$K \begin{cases} < 1 \text{ dacă } x > m e^{\frac{\sigma'^2}{2}}, \\ > 1 \text{ dacă } x < m e^{\frac{\sigma'^2}{2}}, \end{cases}$$

adică atunci cînd $X$ este mai mare decît valoarea medie a zăcămîntului, valoarea probabilă a lui $m_i$ este inferioară lui $X$ și reciproc.

Eroarea sistematică, care intervine în procedeul de selecționare a probelor, constă în faptul că raționamentele se fac pe conținuturile $X$ și nu pe $m_i$ ; dacă pentru estimarea conținutului mediu al zăcămîntului acest fapt nu are importanță, nu se poate spune același lucru despre dispersia conținuturilor $m_i$ în $W$ , care este inferioară dispersiei cantităților $X$ în $W$,

după cum reiese din formula lui Krige (1.3.4). Coeficientul lui Krige, dat de formula (1.3.11), are tocmai rolul de a corecta această supraestimare a dispersiei, dînd o evaluare mai bună valorii medii a lui $m_i$. Avînd în vedere cele arătate, am putea fi tentați de a înlocui în raționamente populația valorilor $X$ cu populația valorile $KX$, dar în felul acesta s-ar comite o eroare inversă de subestimare a dispersiei lui $m_i$. Aceasta reiese din faptul că s-ar identifica $m_i$ cu valoarea sa medie $Kx$ și astfel s-ar neglija dispersia $\frac{\sigma_i^2 \sigma'^2}{\sigma^2}$ a lui $m_i$ pentru $X = x$ fixat.

Variabila aleatoare lognormală $KX$ are media $m$, dar dispersia sa este $\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$, deci inferioară lui $\sigma'^2$.

Altă eroare care apare mai ales în cazul recunoașterii zăcămîntului prin sondaje este eroarea globală. Aceasta constă fie în stabilirea repartiției tonajului, fie în subestimarea tonajului exploatabil și supraestimarea conținutului mediu al tonajului exploatabil, fie în supraestimarea atît a tonajului exploatabil cît și a conținutului său mediu.

Pentru a vedea cum trebuie înlăturată această eroare, este necesar să dezvoltăm calculul care intervine la descompunerea tonajului unui zăcămînt în tranșe de conținut în minereu și să demonstrăm formula lui Wijs.

În primul rînd să considerăm două conținuturi oarecare $x_1$ și $x_2$ din interiorul unui zăcămînt; fie variabilele transformate $z_i$ după formula (1.1.1):

$$z_i = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{x_i}{\gamma}\right), \quad i = 1,2. \tag{1.3.13}$$

Atunci, tonajul corespunzător conținuturilor în minereuri mai mari decît $x$ este egal cu

$$T_1^{\infty} = \Phi(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{1.3.14}$$

iar tonajul cuprins în tranșa $x_1 x_2$ este egal cu

$$T_1^2 = \Phi(z_1) - \Phi(z_2).$$

Conținutul mediu al acestei tranșe este dat de:

$$(m)_1^2 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} \gamma e^{\sigma z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz},$$

de unde rezultă

$$(m)_1^2 = m \frac{\Phi(z_1 - \sigma) - \Phi(z_2 - \sigma)}{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}.$$

Pentru $x_2 = \infty$, conținutul mediu va fi

$$m_1 = m \frac{\Phi(z_1 - \sigma)}{\Phi(z_1)}. \tag{1.3.15}$$

Dacă $T$ este tonajul de minereu total al zăcămîntului, mai putem scrie această formulă astfel:

$$m_1 T \Phi(z_1) = mT\Phi(z_1 - \sigma),$$

ceea ce arată că $\Phi(z_1 - \sigma)$ reprezintă procentajul tonajului unui anumit minereu cuprins în tranșa respectivă.

Pentru a deduce formula lui Wijs, amintim că în procedeul său de a demonstra permanența lognormalității, descris la § 2, logaritmul variabilei $X$, dat de (1.2.2), urma o repartiție normală. Dispersia sa este dată de formula

$$\sigma^2 = \frac{k}{4}\left(\ln \frac{1-d}{1+d}\right)^2. \tag{1.3.16}$$

Deoarece procedeul de demonstrație consta în împărțirea volumului $W$ al zăcămîntului în $2^k$ volume $V$, rezultă că valoarea lui $k$ este

$$k = \frac{\ln \frac{W}{V}}{\ln 2}.$$

Înlocuind această valoare în formula (1.3.16), găsim:

$$\sigma^2 = \beta \ln \frac{W}{V}, \tag{1.3.17}$$

unde

$$\beta = \frac{1}{4 \ln 2}\left(\ln \frac{1-d}{1+d}\right)^2. \tag{1.3.18}$$

Formula lui Wijs (1.3.17) arată că dispersia logaritmică depinde de doi factori, dintre care unul depinde de $W$ și $V$ și celălalt, numit dispersia absolută, este o constantă caracteristică a zăcămîntului.

Cu aceste preciziuni vom arăta cum se poate înlătura eroarea globală.

Să presupunem că zăcămîntul total are o greutate $P$ și că fiecare probă are o greutate $p$; atunci, se calculează dispersia absolută după formula (1.3.18), ținînd seamă de formula (1.3.16),

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\ln\left(\frac{P}{p}\right)}.$$

Dacă unitatea de exploatare are o greutate $p'$, atunci dispersia cantităţilor $m_i$ în $W$ este după formula lui Wijs (1.3.17):

$$\sigma'^2 = \beta \ln \frac{P}{p'} = \sigma^2 \frac{\ln \frac{P}{p'}}{\ln \frac{P}{p}}.$$

Astfel, avînd dispersia repartiţiei reale, găsim şi mediana corespunzătoare din formulele (1.3.6) şi (1.3.7) şi cu ajutorul acestora calculăm tonajul corespunzător conţinutului mai mare decît conţinutul limită $x_0$ şi valoarea conţinutului mediu al acestei tranşe cu ajutorul formulelor (1.3.14) şi (1.3.15):

$$T = P\Phi(z_0), \quad m_0 = m \frac{\Phi(z_0 - \sigma')}{\Phi(z_0)},$$

unde $z_0$ satisface formula (1.3.13) pentru $i = 0$.

*Observaţia* 1. Este interesant de remarcat că formula lui Wijs (1.3.17) poate fi obţinută pe altă cale şi anume prin intermediul principiului similitudinii. Acest principiu spune că dispersia cantităţilor volumelor $V$ într-un volum $W$, este aceeaşi cu a cantităţilor $\lambda V$ într-un volum $\lambda W$ al aceluiaşi zăcămînt. Aşadar, dispersia este o funcţie de raportul $W/V$

$$\sigma^2 = g(W/V).$$

Ţinînd seamă de consecinţa formulei lui Krige (1.3.9), rezultă că

$$\sigma^2 = f(W) - f(V).$$

Deoarece numai funcţia logaritmică se poate pune în acelaşi timp sub aceste două forme, rezultă formula lui Wijs

$$\sigma^2 = \beta \ln (W/V).$$

*Observaţia* 2. Principiul similitudinii, enunţat mai sus, într-o nouă formulare, va permite demonstrarea pe altă cale decît a lui Wijs a permanenţei lognormalităţii.

Să considerăm un volum $v$ cu un conţinut în minereu $X$, selecţionat dintr-un volum $V$ de conţinut în minereu $m$. Să definim conţinutul relativ a lui $v$ în raport cu $V$ prin cantitatea

$$Y = \frac{X}{m}.$$

Să exprimăm principiul similitudinii în funcţie de $Y$. Conţinutul relativ al volumului $v$ în raport cu $V$ şi conţinutul relativ al volumului $v'$ în raport cu $V'$ urmează aceeaşi repartiţie, astfel încît

$$\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'}.$$

Trebuie specificat că nu se face nici o ipoteză asupra repartiției teoretice a lui $Y$; se presupune doar că valoarea sa medie este 1 și că dispersia sa depinde doar de raportul $\frac{V}{v}$.

Acum să considerăm un șir crescător de volume astfel ca $v_j \subset v_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$ și a căror valori satisfac relațiile:

$$\frac{v_2}{v_1} = \ldots = \frac{v_n}{v_{n-1}} = \lambda. \tag{1.3.19}$$

De aici rezultă

$$v_n = \lambda^{n-1} v_1. \tag{1.3.20}$$

Facem notația

$$y_j = \frac{x_j}{x_{j+1}}, \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

unde $x_j$ sînt conținuturile volumelor $v_j$.

Din principiul similitudinii și din relațiile (1.3.19), rezultă că $y_j$ pot fi considerați ca valorile unei variabile aleatoare $Y'$, cu o valoare medie egală cu 1.

Să considerăm conținutul relativ a lui $v_1$ în raport cu $v_n$:

$$Y'' = \frac{x_1}{x_n} = \prod_{j=1}^{n-1} y_j.$$

Urmează că logaritmul său are valoarea

$$\ln Y'' = \sum_{j=1}^{n-1} \ln y_j.$$

Dacă fixăm pe $v_1$ și $v_2$ și facem pe $n$ să tindă către $\infty$ și pe $\lambda$ să tindă către 1, $\ln Y''$ devine atunci suma unui număr mare de variabile aleatoare a căror dispersie este foarte mică. Într-adevăr, pentru $v_1 = v_2$, $\sigma^2$ se anulează. Astfel, repartiția lui $\ln Y''$ converge către o repartiție normală cînd $n \to \infty$. Deci $Y''$ este o variabilă aleatoare lognormală pentru valorile mari ale lui $n$. Dispersia logaritmică a lui $Y''$ va fi

$$\sigma^2 = (n-1)\, h, \tag{1.3.21}$$

unde $h$ este dispersia foarte mică a lui $\ln y_j$.

Putem determina valoarea lui $n-1$ din formula (1.3.20):

$$n - 1 = \frac{\ln \left( \frac{v_n}{v_1} \right)}{\ln \lambda}$$

și înlocuind-o în formula (1.3.21), găsim:

$$\sigma^2 = \frac{h}{\ln \lambda} \ln \left( \frac{v_n}{v_1} \right),$$

adică formula lui Wijs cu

$$\beta = \frac{h}{\ln \lambda}.$$

Prin urmare, am arătat că conținutul relativ $Y$ al unui volum oarecare $v$ în raport cu un volum oarecare $V$ este o variabilă aleatoare lognormală. Atunci și conținutul real $X$ urmează o repartiție lognormală deoarece $X = Ym$, unde $m$ este o constantă. Deci permanența lognormalității este demonstrată. În plus, am găsit că dispersia logaritmică a conținutului real $X$ este dată de formula lui Wijs.

## II. EVALUAREA CONȚINUTULUI MEDIU ÎN MINEREURI ȘI SUBSTANȚE UTILE ALE UNUI ZĂCĂMÂNT

### § 1. CAZUL ZĂCĂMINTELOR LINIARE

Să considerăm un zăcământ liniar căruia îi facem să-i corespundă un segment de dreaptă $AB$ de lungime $L$. Presupunem că zăcământul se compune din anumite părți mineralizate $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_kB_k$, care sînt dispuse întîmplător pe segmentul $AB$ și separate între ele de părți sterile. Fie $l$ lungimea totală a părților mineralizate.

Ceea ce se caută în acest caz este estimarea prin sondaje a valorii $l$ și a densității medii de mineralizare $\alpha$, care este dată de formula:

$$\alpha = \frac{l}{L}.$$

Problema care se pune și care este tratată de R. Murard în [15] este alegerea amplasamentelor de sondaj, astfel ca să se obțină cea mai bună estimare a lui $\alpha$.

Vom numi *pozitive* acele sondaje care întîlnesc segmente mineralizate și *negative* acele sondaje care întîlnesc segmente sterile. Fie $n$ numărul sondajelor pozitive.

În cele ce urmează vom descrie cîteva procedee prin care se tratează problema pusă mai sus.

P r o c e d e u l $P_1$. Se efectuează $N$ sondaje la întîmplare după o repartiție de densitate uniformă pe segmentul $AB$. Probabilitatea ca unul din aceste sondaje să fie pozitiv este egală cu $\alpha$. Numărul sondajelor pozitive $n$, urmează atunci o repartiție binomială, a cărei probabilitate este dată de formula:

$$P_1(n) = C_N^n \alpha^n (1 - \alpha)^{N-n}$$

și ale cărei momente de primele două ordine sînt egale cu

$$M(n) = N\alpha, \tag{2.1.1}$$

$$M_2(n) = N\alpha + N(N-1)\alpha^2. \tag{2.1.2}$$

Din formula (2.1.1) rezultă că densitatea de mineralizare este egală cu raportul dintre numărul mediu al sondajelor pozitive și numărul total al sondajelor.

Cu ajutorul formulelor (2.1.1) și (2.1.2), deducem valoarea dispersiei

$$D^2(n) = N\alpha(1 - \alpha). \qquad (2.1.2')$$

Pe această expresie se verifică faptul că dispersia sondajelor pozitive este nulă cînd toate sondajele sînt negative (cazul $\alpha = 0$) sau cînd toate sondajele sînt pozitive (cazul $\alpha = 1$) și este maximă $\left(D^2(n) = \frac{N}{4}\right)$ în cazul $\alpha = \frac{1}{2}$.

Procedeul $P_2$. Se împarte arbitrar segmentul $AB$ printr-o diviziune realizată cu părți egale între ele, avînd valoarea comună $a = \frac{L}{N}$. Originea diviziunii $O$ se alege la întîmplare pe segmentul $AH = a$, după o repartiție de densitate uniformă pe $AB$. Fie variabila aleatoare $AO = X$, care variază între $O$ și $a$. Probabilitatea ca $X$ să se găsească în segmentul $x$, $x + dx$ este, prin urmare:

$$p(x)\,dx = \frac{dx}{a}.$$

Nodurile diviziunii în care se efectuează sondajele au abscisele egale cu: $x$, $x + a$, $x + 2a, \ldots, x + (N - 1)a$. De asemenea, numărul sondajelor pozitive depinde de alegerea lui $O$, deci este o funcție $n(X)$. Să considerăm, în particular, că $O$ coincide cu $A$ și că suprapunem toate segmentele diviziunii peste segmentul $AH$. Atunci, dacă notăm cu $a$ lungimea totală a segmentelor conținute în $AH$, pe care funcția $n(X)$ ia valoarea $i$ ($i = 0,1,\ldots, N$), obținem relațiile:

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + Na = N\alpha a, \qquad (2.1.3)$$

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_N = a. \qquad (2.1.4)$$

Probabilitatea ca $n$ sondaje să fie pozitive va fi dată de relația

$$P_2(n) = \int_{a_n} \frac{dx}{a} = \frac{a_n}{a}. \qquad (2.1.5)$$

Ținînd seamă de formula (2.1.5), numărul mediu de sondaje pozitive va fi egal cu

$$M(n) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{N} n a_n,$$

de unde, aplicînd formula (2.1.3), obținem

$$M(n) = N\alpha. \qquad (2.1.6)$$

Momentul de ordinul doi este în acest caz

$$M_2(n) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{N} n^2 a_n , \tag{2.1.7}$$

iar dispersia

$$D^2(n) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{N} n^2 a_n - N^2\alpha^2. \tag{2.1.8}$$

Observăm că momentul de ordinul doi şi dispersia numărului de sondaje pozitive depind, în afară de $\alpha$, de nişte coeficienţi $a_i$ care caracterizează structura zăcămîntului.

Dacă presupunem că valorile $a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ reprezintă masele punctelor de abscisă $i$, formulele de mai sus se pretează la următoarea interpretare mecanică. Formula (2.1.4) arată că masa totală este $a$. Urmează din (2.1.3) şi (2.1.6) că abscisa centrului de greutate este egală cu $M(n)$. Formula (2.1.7) ne arată că $M_2(n)$ este cîtul dintre momentul de inerţie în raport cu originea şi masa totală. Din formula (2.1.8) reiese că abaterea tip $D(n)$ este egală cu raza de rotaţie. Aceeaşi formulă ne spune că dispersia este nulă cînd toată masa este concentrată în centrul de greutate. Aceasta corespunde cazului cînd, oricare ar fi poziţia originii $O$ se găseşte acelaşi $n$. Dispersia va fi maximă cînd masele sînt concentrate în cele două puncte extreme $O$ şi $N$, adică în cazul cînd pentru orice poziţie a diviziunii, $n$ nu ia decît valorile $O$ şi $N$. Atunci toţi $a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ sînt nuli şi din formulele (2.1.3), (2.1.7) şi (2.1.8) rezultă :

$$\begin{aligned} a_N &= a\alpha, \\ M_2(n)_{\max} &= N^2\alpha, \\ D^2(n)_{\max} &= N^2\alpha(1-\alpha). \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

P r o c e d e u l $P_3$. Se divide segmentul $AB$ într-un număr oarecare $P$ de segmente succesive $S_i$, pe care se efectuează respectiv sondajele $N_i$ după procedeul $P_1$, unde

$$\sum_{i=1}^{P} N_i = N.$$

Pentru fiecare segment $S_i$ de lungime totală $L_i$ şi lungime mineralizată $l_i$, densitatea de mineralizare va fi

$$\alpha_i = \frac{l_i}{L_i}.$$

Atunci, numărul sondajelor pozitive de pe $S_i$, $n_i$, va avea valoarea medie

$$M(n_i) = N_i\alpha_i$$

şi dispersia

$$D^2(n_i) = N_i\alpha_i - N_i\alpha_i^2.$$

Numărul sondajelor pozitive de pe $AB$ este dat de

$$n = \sum_{i=1}^{P} N_i ,$$

adică este o sumă de variabile aleatoare independente. Urmează că

$$M(n) = \sum_{i=1}^{P} \frac{N_i}{L_i} l_i \tag{2.1.10}$$

și

$$D^2(n) = \sum_{i=1}^{P} N_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{P} N_i \alpha_i^2 . \tag{2.1.11}$$

P r o c e d e u l $P_4$. Se împarte segmentul $AB$ într-un număr de segmente egal cu numărul sondajelor, în cazul nostru $N$, și în fiecare diviziune se efectuează la întîmplare un sondaj; atunci numărului $n$ de sondaje pozitive îi va corespunde valoarea medie

$$M(n) = N\alpha \tag{2.1.12}$$

și dispersia

$$D^2(n) = N\alpha - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 . \tag{2.1.13}$$

Să facem acum o comparație între procedeele prezentate. Analizînd formulele (2.1.1), (2.1.6), (2.1.10) și (2.1.12), observăm că prin toate procedeele expuse se obține același număr mediu de sondaje pozitive, care împărțit la numărul total al sondajelor să dea valoarea densității medii de mineralizare. În cazul procedeului $P_3$, afirmația aceasta este adevărată dacă se presupune apriori

$$\frac{N_i}{L_i} = \frac{N}{L} ,$$

adică că numărul sondajelor de pe un subsegment al diviziunii lui $AB$ este proporțional cu lungimea sa.

Urmează că procedeul cel mai eficace va fi acela care va da cea mai mică dispersie a numărului de sondaje pozitive.

Din formulele (2.1.2′) și (2.1.9) se poate trage concluzia că dispersia obținută prin procedeul $P_1$ este cuprinsă între valorile maxime ale dispersiei obținute prin procedeul $P_2$; asupra unei eventuale alegeri între procedee, n-ar putea decide decît caracteristicile unui zăcămînt. Dacă, în cazul procedeului $P_3$, se presupune că punctele materiale de masă $N_i$ sînt repartizate în punctele segmentului $AB$ de abscisă $\alpha_i$ și că centrul de greutate are abscisa $\alpha$, atunci expresia $\sum_{i=1}^{P} N_i \alpha_i^2$ reprezintă momentul de inerție al punctelor $N_i$ în raport cu originea. Deoarece se știe că

$$\sum_{i=1}^{P} N_i \alpha_i^2 \geqslant N\alpha^2 ,$$

unde membrul doi al inegalităţii reprezintă momentul de inerţie al centrului de greutate, în care se presupune concentrată toată masa, în raport cu originea, rezultă din formulele (2.1.2′) şi (2.1.11) că dispersia dată de procedeul $P_3$ este întotdeauna mai mică decît cea dată de procedeul $P_1$. Deci între cele două procedee trebuie preferat $P_3$. Plasarea sondajelor în acest caz, se poate face pentru fiecare subsegment al diviziunii, fie după procedeul $P_2$, fie după procedeul $P_4$. Dacă zăcămîntul este cunoscut, alegerea între procedeele $P_2$ şi $P_4$ depinde de caracteristicile sale. Aceasta, însă, se întîmplă foarte rar în practică. În general, coeficienţii $\alpha_i$, care exprimă densitatea de mineralizare a unui zăcămînt, ca şi coeficienţii $a_i$, care exprimă existenţa unei periodicităţi de mineralizare a zăcămîntului, sînt necunoscuţi. Atunci este posibilă o alegere între procedeele $P_2$ şi $P_4$ doar dacă se poate determina o probabilitate ca zăcămîntul considerat să aibă anumite caracteristici. Astfel, dacă atribuim sistemelor de coeficienţi $a_i$ şi $\alpha_i$ un punct $Q$ în spaţiul $\Omega$ $(2N-3)$ - dimensional şi dacă cunoaştem probabilitatea $P(Q)\,\mathrm{d}\Omega$ ca $Q$ să se găsească în elementul de volum $\mathrm{d}\Omega$, atunci găsim probabilităţile

$$P_2'(n) = \int_\Omega P(Q)\, P_2(n)\, \mathrm{d}\Omega,$$

$$P_4'(n) = \int_\Omega P(Q)\, P_4(n)\, \mathrm{d}\Omega,$$

ca prin procedeele $P_2$ şi $P_4$ să existe $n$ sondaje pozitive, condiţionate de faptul că punctul $Q$ să se afle în $\mathrm{d}\Omega$. Obţinem, pentru cele două procedee, valorile medii

$$n_2' = N\alpha, \quad n_4' = N\alpha,$$

şi dispersiile

$$D_2'(n) = \int_\Omega P(Q)\, D_2^2(n)\, \mathrm{d}\Omega, \quad D_4'(n) = \int_\Omega P(Q)\, D_4^2(n)\, \mathrm{d}\Omega.$$

Observăm că dispersiile în acest caz sînt egale cu valorile medii ale dispersiilor obţinute prin procedeele $P_2$ şi $P_4$. Urmează că atunci cînd cunoaştem probabilitatea $P(Q)$, putem alege între procedeele $P_2$ şi $P_4$, pe acela cu valoare medie a dispersiei mai mică.

Dacă se consideră un ansamblu de zăcăminte cu o repartiţie întîmplătoare a mineralizării, dar cu aceeaşi densitate de mineralizare, se constată experimental că în medie procedeele $P_2$ şi $P_4$ sînt echivalente.

De multe ori în practică se preferă totuşi procedeul $P_2$ datorită simplicităţii lui şi avantajului pe care îl dă posibilităţii de aproximare a altor caracteristici ale zăcămîntului, care se cer de analizat.

Aceste rezultate obţinute în cazul unui zăcămînt liniar se observă că se pot generaliza fără dificultate în cazul unor zăcăminte cu două dimensiuni.

## § 2. CAZUL ZĂCĂMINTELOR NELINIARE

Se consideră o regiune de prospectat, de arie $A$, despre care avem puține informații geologice. Se presupune că depozitele de minereuri sînt distribuite întîmplător atît în plan, cît și față de orientarea axelor principale, deci că probabilitatea aprioric ă de descoperire a lor este peste tot aceeași. De asemenea, se consideră că condițiile geologice sînt uniforme în adîncime pînă la minereuri și că săparea sondajelor se face vertical. În aceste condiții, după cum arată L. B. Slichter în [18], singurele caracteristici ale depozitelor de minereuri care vor influența posibilitatea descoperirii lor sînt forma și aria proiecțiilor lor pe suprafața orizontală. Deci, discuția se va purta asupra unor obiective bidimensionale de formă dreptunghiulară, circulară sau inelară. Scopul care se urmărește, în acest caz, în prospectare, este elaborarea unui plan optim de amplasare a puțurilor de sondaj într-o rețea uniformă, astfel ca raportul $R$ dintre valorile probabile ale minereurilor descoperite și costul total al prospectării, $R = V/c$ să fie maxim. Aici $V$ se evaluează prin formula

$$V = \int_{a_0}^{a_m} \int_{1}^{\lambda_m} N_d(a, \lambda)\, v(a, \lambda)\, da\, d\lambda, \tag{2.2.1}$$

unde $a$ și $\lambda$ sînt parametrii caracteristici ai unui obiectiv reprezentînd respectiv aria și forma sa (de exemplu, în cazul unui obiectiv dreptunghiular $\lambda$ este raportul dintre lungime și lățime), $N_d(a, \lambda)$ este numărul de puțuri de descoperire a obiectivelor cu arii cuprinse între $a$ și $a + da$ și de forme caracterizate de parametri cuprinși între $\lambda$ și $\lambda + d\lambda$ (dacă un obiectiv este străpuns de mai multe puțuri, doar primul se consideră puț de descoperire) și $v(a, \lambda)$ este valoarea conținutului în minereu a unui depozit de parametri $a$ și $\lambda$.

Presupunem că pe suprafața inițială $A$ am aplicat o rețea, în care distanța dintre noduri este $s$ și că puțurile de sondaj sînt amplasate în nodurile rețelei.

Dacă notăm cu $N_0$ cazurile în care nici unul din numărul total $N$ de puțuri nu nimerește vreun depozit, cu $N_1$ cazurile în care în același depozit pătrunde un singur puț, cu $N_2$ cazurile în care în același depozit nimeresc două puțuri ș.a.m.d., atunci numărul puțurilor de descoperire $N_d(a, \lambda)$ va fi dat de suma

$$N_d(a, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} N_i, \tag{2.2.2}$$

iar numărul total al puțurilor care nimeresc depozite va fi

$$N_p = N - N_0 = \sum_{i=1}^{N} i\, N_i. \tag{2.2.3}$$

Pe de altă parte, $N_p$ este dat de expresia

$$N_p = \frac{N\,\eta(a,\lambda)\,a}{A}, \tag{2.2.3'}$$

unde $\eta(a, \lambda)$ reprezintă frecvența obiectivelor de parametri $a$ și $\lambda$.

Să introducem mărimile $E(a, \lambda)$ și $C(a, \lambda)$ care reprezintă respectiv raportul dintre numărul puțurilor de descoperire și străpungere și raportul dintre cantitatea de minereu găsit și existent în realitate. Ținînd seamă de formulele (2.2.2) și (2.2.3), găsim pentru $E(a, \lambda)$ expresia

$$E(a,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{N} N_i}{\sum_{i=1}^{N} i\,N_i}. \tag{2.2.4}$$

Atunci, dacă în expresia lui

$$C(a,\lambda) = \frac{N_d(a,\lambda)}{\eta(a,\lambda)} \tag{2.2.5}$$

facem înlocuirile rezultînd din formulele (2.2.4) și (2.2.3'), găsim

$$C(a,\lambda) = \frac{E\,a\,N}{A}. \tag{2.2.6}$$

Revenind la valoarea care ne interesează, dată de formula (2.2.1), să ținem seamă de formula (2.2.5); obținem:

$$V = \int_{a_0}^{a_m}\int_{\lambda_1}^{\lambda_m} C(a,\lambda)\,\eta(a,\lambda)\,v(a,\lambda)\,da\,d\lambda. \tag{2.2.7}$$

Evident, $V$ este o funcție de $s$; ea depinde de alegerea rețelei.

Cantitățile $\eta(a, \lambda)$ și $v(a, \lambda)$, din formula (2.2.7), se estimează pe baza informațiilor date de probe, iar $C(a, \lambda)$ din formule (2.2.6). Raportul $E(a, \lambda)$ se calculează diferit pentru obiective de formă diferită. Pentru aceste calcule este interesantă exprimarea lui $E(a, \lambda)$ în funcție de probabilitățile aposteriorice $T_i$, ca un puț care a nimerit un depozit să fie din categoria $i$, adică ca în același depozit să nimerească $i$ puțuri. Dacă notăm cu $p_i$ probabilitatea ca un punct al rețelei să facă parte din categoria $i$, avem evident

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \qquad (i = 0,1, \ldots), \tag{2.2.8}$$

unde $N_i$ au aceeași semnificație ca în formula (2.2.2) și

$$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1. \tag{2.2.9}$$

Înlocuind în formula (2.2.4) valorile lui $N_i$ date de (2.2.8) și ținînd seamă de (2.2.9), găsim :

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{N} \frac{i-1}{i} p_i}{1 - p_0}. \tag{2.2.10}$$

Deoarece probabilitatea aposteriorică $T_i$ ca un puț care a nimerit un obiectiv să se găsească în categoria $i$ are forma

$$T_i = \frac{p_i}{1 - p_0},$$

urmează că (2.2.10) devine

$$E = 1 - \sum_{i=2}^{N} \frac{i-1}{i} T_i.$$

Pentru evaluarea raportului $R$ trebuie să mai găsim costul total $c$ al prospectării. Acesta se compune din prețul $L$ al terenului cercetat, costul $P$ al procedeelor preliminarii de descoperire, costul $D$ al forajului și un preț suplimentar $O$, care sînt presupuse de forma :

$$L = \gamma a, \tag{2.2.11}$$

$$P = \delta \iint N_d(a, \lambda)\, a\, da\, d\lambda, \tag{2.2.12}$$

$$D = N\,[(d_0 + d_1 f) + d_2 s], \tag{2.2.13}$$

$$O = \alpha c + \beta A, \tag{2.2.14}$$

unde $d_0$ este costul montării, înzestrării și demontării forajului, $d_1$ costul forării proporțional cu operația de foraj $f$ și $d_2 s$ costul deplasării de la un puț la altul. Deoarece puțurile sînt considerate asemănătoare, și prin urmare $\overline{d} = d_0 + d_1 f$ este constant, și pentru că numărul $N$ al puțurilor satisface relația

$$N = \frac{A}{s^2}, \tag{2.2.15}$$

formula (2.2.13) se mai poate scrie :

$$D = \frac{A}{s^2}(\overline{d} + d_2 s). \tag{2.2.16}$$

De asemenea, $P$ din formula (2.2.12), ținînd seamă de formulele (2.2.5), (2.2.7) și de ipoteza proporționalității cantității de minereu $v(a, \lambda)$ cu aria $a$ ($v(a, \lambda) = ka$), devine :

$$P = \frac{\delta V}{k}. \tag{2.2.17}$$

Atunci, din formulele (2.2.11), (2.2.14), (2.2.16) şi (2.2.17) rezultă că costul total $c$ al prospectării are valoarea:

$$c = \frac{A(\bar{\beta} + \delta V k^{-1} A^{-1} + d_2 s^{-1} + \bar{d} s^{-2})}{1 - \alpha},$$

unde

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma.$$

Urmează că raportul căutat are valoarea:

$$R = \frac{(Vk^{-1}A^{-1})(1 - \alpha)k}{\bar{\beta} + \delta V k^{-1} A^{-1} + d_2 s^{-1} + \bar{d} s^{-2}}, \qquad (2.2.18)$$

unde $V$ este dat de formula (2.2.7).

În raportul dat de (2.2.18) cantităţile $\alpha$ şi $A$ sînt date. De asemenea, $\delta$ este cunoscut. Rezultă că $R$ va depinde de $k$, $\bar{\beta}$, $\bar{d}$ şi $d_2$ şi de la caz la caz se cercetează cum trebuie alese aceste cantităţi independente, pentru ca $R$ să devină maxim.

Desigur că dacă la evaluarea cantităţii de minereu descoperită, se va ţine seama de repartiţia sa în adîncimea şi grosimea depozitelor, precum şi de existenţa depozitelor suprapuse, după cum procedează R. M. Ellis şi J. H. Blackwell în [5], calculele se vor complica, dar precizia determinării lui $R$ va creşte simţitor.

Primită la redacţie la 10 ianuarie 1962

## О ПРИМЕНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К РАЗВЕДКЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

### РЕЗЮМЕ

Обзорный доклад, в котором показываются некоторые классические статистические методы, которые можно использовать при разведке полезных ископаемых. В первой части работы изучается логнормальность распределения содержания полезных веществ в месторождениях, а также точность информаций, полученных извлечением проб из заданного месторождения. Во второй части указываются некоторые способы оценки среднего содержания полезных веществ данного месторождения и задача оптимизации планов горной разведки.

Статья предназначена для научных работников в области геологии.

# SUR L'APPLICATION DES MÉTHODES STATISTIQUES À LA PROSPECTION DES MINERAIS ET DES SUBSTANCES UTILES

RÉSUMÉ

Article de synthèse qui présente quelques méthodes statistiques classiques utilisables pour la prospection des minerais et des substances utiles. Dans la première partie du travail, on expose la lognormalité de la répartition des teneurs en minerais et substances utiles dans les gisements, ainsi que la précision des informations fournies par des échantillons recueillis dans un gisement quelconque. Dans la seconde partie du travail, on donne différents procédés servant à évaluer la teneur moyenne en minerais et substances utiles d'un gisement, et on s'occupe aussi de la question de l'optimisation des plans de prospection minière. L'article s'adresse surtout aux chercheurs scientifiques qui travaillent dans le domaine de la géologie.

BIBLIOGRAFIE

1. ALLAIS M., *Méthode d'évaluation des perspectives économiques de la recherche minière sur de grands espaces.* Revue de l'industrie minérale, Janvier, 329—382 (1956).
2. — *Method of Appraising Economic Prospects of Mining Exploration over Large Territories : Algivan Sahara Case Study.* Management Science, *3*, 285—347 (1957).
3. АНТРОПОВ И.П., *Задачи научно-исследовательских работ по теоретическим основам поисков в разведки нефтяных и газовых месторождений в свете решений XXI Съезда КПСС и июньского Пленума ЦК КПСС.* Геология нефти и газа, *1*, 1—6, (1960).
4. BLONDEL F., *Les lois statistiques de la répartition géographique des productions minières.* Revue de l'industrie minérale, Jan., 319—328 (1956).
5. ELLIS R. M., BLACKWELL J. H., *Optimum prospecting plans in mining exploration.* Geophysics, **24**, *2*, 344—358 (1959).
6. HALD A., *Statistical theory with engineering applications.* New York, 1952.
7. ХАЛФИН Л.А., *Информационная теория интерпретации геофизических исследований.* Доклады АН СССР, **122**, *6*, 1007—1010 (1958).
8. KRIGE D. G., *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand.* Journal of the Chemical Metallurgical and Mining Society of South Africa, **52**, *4*, 119—266 (1951).
9. KRIGE D. G., *A statistical analysis of some of the borehole values in the Orange Free State goldfield.* Journal of the Chemical Metallurgical and Mining Society of South Africa, **53**, *3*, 47—257 (1952).
10. LAFFITE P., *Recherches minières et méthodes statistiques.* Annales des mines, Fév., 109—112 (1957).
11. LARI I., MIHAILOVICI N., *Notes on the use of an algebraic theory for the formulation of a general method of prospecting and surveying rare deposits.* Proceedings Second United Nations International Conference Peaceful Uses Atomic Energy (Geneva), *3*, 95—104 (1958).
12. MATHERON G., *Utilité des méthodes statistiques dans la recherche minière,* în «Congrès du Centenaire de la Société de l'industrie minérale», Paris, 1955, 459—472.
13. — *Application des méthodes statistiques à l'évaluation des gisements.* Annales des mines, 50—75 (1955).
14. MOISIL GR. C., *Inele şi ideale.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1954.

15. MURARD R., *Etude par sondages d'un gisement stratiforme*. Revue de l'industrie minérale, Jan., 473—482 (1956).
16. ONICESCU O., MIHOC G., *Lecţii de statistică matematică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
17. PROBOBJEV P. A., *Metode practice pentru calculul rezervelor zăcămintelor de minereuri*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
18. SLICHTER L. B., *Optimum prospecting plans*. Economic Geology, Fiftieth Aniversary Volume, 886—915 (1955).
19. SMIRNOV V. I., *Calculul rezervelor de materie primă minerală*. Moscova, 1950.
20. UFFEN R. J., ELLIS R. M., *Determining an optimal prospecting plan*. Mining Engineering Series, Exploration Drilling.
21. WIJS DE, *Statistics of ore distribution*. Part I. Geologie in Mijnbouw, Nov., 1951.
22. — *Statistics of ore distribution*. Part II. Geologie in Mijnbouw, Jan., 1953.

# ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR BOOLEENE PRIN METODA LUI LÖWENHEIM

DE

SERGIU RUDEANU

Fie $B$ o algebră booleană oarecare, ale cărei operații de bază le notăm cu „$\cup$", cu „." sau prin juxtapunere și cu „$\bar{}$". Să considerăm o ecuație de forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

unde funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ este booleană, adică se obține prin suprapuneri ale operațiilor de bază „$\cup$", „.", „$\bar{}$" (a se vedea definiția 5 din [4]).

L. Löwenheim a arătat ([2], a se vedea de asemenea [5]), că dacă $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este o soluție particulară a ecuației (1), atunci soluția ei generală (mai precis soluția generală reproductivă, a se vedea definiția 5) este dată de formulele:

$$x_i = \xi_i f(u_1, \ldots, u_n) \cup u_i \overline{f(u_1, \ldots, u_n)}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

unde $u_1, \ldots, u_n$ sînt $n$ parametri arbitrari.

Urmează că găsirea soluției generale parametrice a ecuației (1) depinde de găsirea unei soluții particulare a ei. În § 1 al lucrării de față, construim o astfel de soluție particulară, cu ajutorul discriminanților (a se vedea definiția 3) funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ (teorema 1). Introducînd această soluție particulară în formulele (2), obținem soluția generală a ecuației (1), în funcție numai de parametrii $u_1, \ldots, u_n$ și de funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ (corolarul teoremei 1).

Forma în care se poate scrie soluția generală parametrică a ecuației (1) nu este unică. În § 2 găsim toate formele pe care le poate avea soluția generală reproductivă (definiția 5 și teorema 2) rezolvînd astfel în cazul general o problemă analogă cu aceea pusă de E. Schröder și rezolvată de el în cazul $n = 2$ ([6], § 24).

În încheiere ( § 3), arătăm pe un exemplu că teorema 2 este utilă în găsirea unei forme simple a soluției generale.

## § 1

Pentru a găsi o soluție particulară a ecuației (1) vom aplica un procedeu al lui W. E. Johnson ([1], a se vedea de asemenea [3]).

Definiția 1 [2]. Elementele $\eta_1, \ldots, \eta_m \in B$ $(m > 1)$ formează un *sistem disjunctiv*, dacă și numai dacă satisfac relațiile:

$$\bigcup_{\substack{h,k \\ h \neq k}}^{1,m} \eta_h \eta_k = 0, \tag{3}$$

$$\bigcup_{h}^{1,m} \eta_h = 1, \tag{4}$$

unde $\bigcup$ joacă același rol față de $\cup$, ca $\Sigma$ față de $+$.

Lema 1. *Dacă elementele* $\eta_{0\ldots0}, \ldots, \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_n}, \ldots, \eta_{1\ldots1} \in B$, *în care indicii* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *iau valorile* 0 *și* 1, *formează un sistem disjunctiv, atunci este satisfăcută relația* *):

$$\left(\bigcup_{\sigma_2,\ldots,\sigma_n} \eta_{\tau_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\right)\left(\bigcup_{\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_n} \eta_{\sigma_1\tau_2\sigma_3\ldots\sigma_n}\right)\ldots\left(\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}\tau_n}\right) = \eta_{\tau_1\ldots\tau_n}, \tag{5}$$

*oricare ar fi sistemul* $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *de valori* 0 *sau* 1.

Într-adevăr, dacă $\sigma_1 \neq \tau_1$ sau $\sigma_2 \neq \tau_2$, rezultă

$$\eta_{\tau_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_n}\,\eta_{\sigma_1\tau_2\sigma_3\ldots\sigma_n} = 0,$$

deci

$$\left(\bigcup_{\sigma_2,\ldots,\sigma_n} \eta_{\tau_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\right)\left(\bigcup_{\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_n} \eta_{\sigma_1\tau_2\sigma_3\ldots\sigma_n}\right) = \bigcup_{\sigma_3,\ldots,\sigma_n} \eta_{\tau_1\tau_2\sigma_3\ldots\sigma_n}.$$

Restul demonstrației se face cu ușurință prin inducție completă.

Definiția 2. Se numește *soluție disjunctivă* a unei ecuații cu $m$ necunoscute $(m > 1)$, un sistem disjunctiv $(y_1, \ldots, y_m)$, care este și soluție a acelei ecuații.

Lema 2. *Dacă* $a_1, \ldots, a_m \in B$, $m > 1$ *și*

$$a_1 \ldots a_m = 0, \tag{6}$$

*atunci formulele*

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \bar{a}_1 a_2 \ldots a_m \\ \eta_2 &= \bar{a}_2 a_3 \ldots a_m \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{m-1} &= \bar{a}_{m-1} a_m \\ \eta_m &= \bar{a}_m \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

*) De fapt este suficient să se presupună relația (3).

*definesc o soluție disjunctivă a ecuației*

$$a_1y_1 \cup \ldots \cup a_my_m = 0. \tag{8}$$

Într-adevăr, din formulele (7) rezultă imediat că pentru orice $h$, cu $1 \leqslant h \leqslant m$, avem $a_h\eta_h = 0$, deci $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ este o soluție a ecuației (8). Dacă $1 \leqslant h,k \leqslant m$, cu $h \neq k$, avem de exemplu $h < k$, deci

$$\eta_h\eta_k = \bar{a}_h a_{h+1} \ldots a_k \ldots a_m \cdot \bar{a}_k a_{k+1} \ldots a_m = 0,$$

deci relația (3) este satisfăcută.

În sfîrșit, avem

$$\eta_m \cup \eta_{m-1} = \bar{a}_m \cup \bar{a}_{m-1}a_m = \bar{a}_m \cup \bar{a}_{m-1}$$

și se poate arăta ușor, prin inducție completă, că

$$\bigcup_h^{1,m} \eta_h = \bigcup_h^{1,m} \bar{a}_h ;$$

de aici și din relația (6) se deduce imediat (4), ceea ce completează demonstrația lemei 2.

În cele ce urmează vom lucra cu ecuația (1) adusă la forma canonică disjunctivă

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} = 0, \tag{1'}$$

în care indicii $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ iau valorile 0 sau 1 în toate modurile posibile, și am folosit notația $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$.

Definiția 3 *). Coeficienții $a_{\sigma_1\ldots\sigma_n}$ ai formei canonice disjunctive a funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ se numesc *discriminanții* funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Se știe că discriminanții sînt dați de formulele

$$a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \qquad (\forall \sigma_1, \ldots, \sigma_n). \tag{9}$$

LEMA 3. *Dacă ecuația*

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} y_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = 0 \tag{10}$$

*admite o soluție disjunctivă* $(\eta_{0\ldots0}, \ldots, \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_n}, \ldots, \eta_{1\ldots1})$, *atunci formulele*

$$\xi_i = \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

*definesc o soluție a ecuației* (1').

*) Rolul acestor constante a fost pus în evidență de A. N. Whitehead în lucrarea [7], însă el numește *discriminanți*, coeficienții $\bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n}$ ([7], p. 51).

Vom arăta mai întîi că

$$\bar{\xi}_i = \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}0\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Într-adevăr, avem :

$$\left(\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\right)\left(\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}0\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\right) =$$

$$= \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n,\\ \tau_1,\ldots,\tau_{i-1},\\ \tau_{i+1},\ldots,\tau_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\eta_{\tau_1\ldots\tau_{i-1}0\tau_{i+1}\ldots\tau_n} = 0,$$

$$\left(\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}0\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\right) = \bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = 1,$$

ceea ce demonstrează relațiile (12).

Vom observa acum că putem scrie condensat relațiile (11), (12), în forma :

$$\xi_i^{\tau_i} = \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \eta_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}\tau_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}, \qquad (i = 1, \ldots, n\,;\ \forall\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

De aici și din lema 1 se deduce că avem :

$$\xi_1^{\tau_1}\ldots\xi_n^{\tau_n} = \eta_{\tau_1\ldots\tau_n}, \qquad (i = 1, \ldots, n\,;\ \forall\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

deci

$$\bigcup_{\tau_1,\ldots,\tau_n} a_{\tau_1\ldots\tau_n}\xi_1^{\tau_1}\ldots\xi_n^{\tau_n} = \bigcup_{\tau_1,\ldots,\tau_n} a_{\tau_1\ldots\tau_n}\eta_{\tau_1\ldots\tau_n} = 0,$$

ceea ce arată că $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este o soluție a ecuației (1′).

După cum se știe, mulțimea sistemelor $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de indici 0 sau 1 poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale cuprinse între 1 și $2^n$. Această corespondență induce în mod natural o relație de ordine parțială în mulțimea sistemelor $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Mai precis, avem :

Definiția 4.

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) > (\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff \sigma_1\cdot 2^{n-1} + \sigma_2\cdot 2^{n-2} + \cdots + \sigma_n > \tau_1\cdot 2^{n-1} + \tau_2\cdot 2^{n-2} + \cdots + \tau_n. \tag{13}$$

Cu aceste pregătiri, putem demonstra :

TEOREMA 1. *Dacă ecuația* (1′) *este solubilă, atunci ea admite soluția particulară*

$$\xi_i = \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n} \bigcap_{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)>\\ >(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ 1,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)}} a_{\tau_1\ldots\tau_n}, \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{14}$$

*cu convenția că atunci cînd intersecția* $\bigcap a_{\tau_1\ldots\tau_n}$ *nu are sens o luăm egală cu* 1 ($\bigcap$ *joacă același rol față de „·” ca* $\Pi$ *față de înmulțirea obișnuită*).

Pentru demonstrație, vom observa că, datorită definiției 4, ecuația (10) este de forma (8), în care $m = 2^n$. Condiția (6) devine în acest caz

$$\bigcap_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} = 0, \tag{15}$$

și este satisfăcută, deoarece coincide cu condiția necesară și suficientă de rezolvabilitate a ecuației(1′) (a se vedea de exemplu [2], sau [3], sau [7]).

Sîntem deci în condițiile de aplicare a lemei 2. Formulele (7) devin :

$$\eta_{0\ldots0} = \bar{a}_{0\ldots0} \bigcap_{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)>\\ >(0,\ldots,0)}} a_{\tau_1\ldots\tau_n},$$

. . . . . .

$$\eta_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = \bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n} \bigcap_{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)>\\ >(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}} a_{\tau_1\ldots\tau_n},$$

. . . . . .

$$\eta_{1\ldots1} = \bar{a}_{1\ldots1},$$

și ele definesc o soluție disjunctivă a ecuației (10).

Teorema 1 rezultă imediat, prin aplicarea lemei 3.

Introducînd soluția particulară (14) în formulele (2), și ținînd seamă de (9), deducem următorul

COROLAR. *Soluția generală a ecuației* (1) *se poate scrie în forma*

$$x_i = f(u_1,\ldots,u_n) \bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \overline{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},1,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)} \bigcap_{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)>\\ >(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ 1,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)}} f(\tau_1,\ldots,\tau_n) \cup$$

$$\cup u_i \overline{f(u_1,\ldots,u_n)}, \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{16}$$

*unde* $u_1,\ldots,u_n$ *sînt* $n$ *parametri arbitrari* (*am adoptat aceeași convenție ca în teorema* 1).

## § 2

Definiția 5 [2]. Sistemul de funcții

$$\varphi_i(u_1, \ldots, u_n) = \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{i, \sigma_1 \ldots \sigma_n} u_1^{\sigma_1} \ldots u_n^{\sigma_n}, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

constituie *soluția generală reproductivă* a ecuației (1), dacă și numai dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

$$\forall u_1, \ldots, u_n \in B \Rightarrow f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)) = 0, \tag{18}$$

$$f(s_1, \ldots, s_n) = 0 \Rightarrow s_i = \varphi_i(s_1, \ldots, s_n), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Condiția (18) exprimă faptul că sistemul de funcții (17) este o soluție a ecuației (1), iar condiția (19) arată că orice soluție a ecuației (1) se scrie în forma (17), cu $u_1, \ldots, u_n$ convenabil aleși, deci arată că soluția este generală.

Forma soluției generale nu este unică, în sensul că dacă ecuația (1) are soluție, există mai multe sisteme de funcții $\{\varphi_i(u_1, \ldots, u_n)\}_{i=1,\ldots,n}$, satisfăcînd proprietățile (18), (19). În cele ce urmează vom găsi condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul de funcții (17) să satisfacă proprietățile (18), (19). Aceste condiții vor da explicit coeficienții $c_{i, \sigma_1 \ldots \sigma_n}$, ceea ce ne va permite să afirmăm că am găsit *toate* soluțiile generale reproductive ale ecuației (1).

Lema 4. *Sistemul de funcții* (17) *satisface condiția* (18) *dacă și numai dacă*

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} a_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_1} \ldots c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_n} = 0, \qquad (\forall \tau_1, \ldots, \tau_n). \tag{20}$$

Într-adevăr, condiția (18) este echivalentă cu condiția ca egalitatea

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} a_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \left( \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} \right)^{\sigma_1} \ldots \left( \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} \right)^{\sigma_n} = 0 \tag{21}$$

să fie satisfăcută pentru orice $u_1, \ldots, u_n \in B$. Însă relația (21) se scrie succesiv:

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} a_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \left( \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_1} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} \right) \ldots \left( \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_n} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} \right) = 0,$$

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} a_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_1} \ldots c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_n} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} = 0,$$

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} a_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_1} \ldots c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_n} u_1^{\tau_1} \ldots u_n^{\tau_n} = 0,$$

$$\bigcup_{\tau_1,\ldots,\tau_n}\ \bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} c_{1,\tau_1\ldots\tau_n}^{\sigma_1}\ldots c_{n,\tau_1\ldots\tau_n}^{\sigma_n} u_1^{\tau_1}\ldots u_n^{\tau_n} = 0,$$

$$\bigcup_{\tau_1,\ldots,\tau_n} u_1^{\tau_1}\ldots u_n^{\tau_n} \bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} c_{1,\tau_1\ldots\tau_n}^{\sigma_1}\ldots c_{n,\tau_1\ldots\tau_n}^{\sigma_n} = 0,$$

iar această ultimă relație este identic satisfăcută, dacă și numai dacă egalitățile (20) sînt satisfăcute.

LEMA 5 [2]. *Dacă ecuația* (1′) *are soluție, condiția necesară și suficientă pentru ca relația*

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} = 0 \tag{22}$$

*să implice*

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n} s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} = 0, \tag{23}$$

(*unde* $a_{\sigma_1\ldots\sigma_n}$ *sînt discriminanții funcției* $f(x_1,\ldots,x_n)$), *este ca*

$$\bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n} = 0, \qquad (\forall\sigma_1,\ldots,\sigma_n). \tag{24}$$

Într-adevăr, din relația (24) se deduce

$$b_{\sigma_1\ldots\sigma_n} \leqslant a_{\sigma_1\ldots\sigma_n}, \qquad (\forall\sigma_1,\ldots,\sigma_n),$$

deci

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n} s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} \leqslant \bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} a_{\sigma_1\ldots\sigma_n} s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n}$$

pentru orice $s_1,\ldots,s_n \in B$, de unde rezultă că relația (22) implică (24), deci condiția (24) este suficientă.

Să demonstrăm acum necesitatea. Ecuația (1′) fiind rezolvabilă, admite o soluție particulară $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ și putem aplica teorema lui Löwenheim. Oricare ar fi $p_1,\ldots,p_n \in B$, elementele

$$s_i = \xi_i f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_i\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}, \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

satisfac relația (22), deci ele vor satisface de asemenea relația (23). Am arătat deci că

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}\left[\xi_1 f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_1\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}\right]^{\sigma_1}\ldots$$

$$\ldots\left[\xi_n f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_n\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}\right]^{\sigma_n} = 0, \qquad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B),$$

de unde rezultă succesiv :

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}[\xi_1^{\sigma_1} f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_1^{\sigma_1}\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}]\ldots$$

$$\ldots[\xi_n^{\sigma_n} f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_n^{\sigma_n}\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}] = 0, \qquad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B),$$

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}[\xi_1^{\sigma_1}\ldots\xi_n^{\sigma_n} f(p_1,\ldots,p_n) \cup p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n}\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}] = 0,$$
$$(\forall p_1\ldots p_n \in B),$$

$$f(p_1,\ldots,p_n)\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}\xi_1^{\sigma_1}\ldots\xi_n^{\sigma_n} \cup$$

$$\cup\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n} = 0, \quad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B). \qquad (25)$$

Fiind o soluție a ecuației (1′), elementele $\xi_1,\ldots,\xi_n$ satisfac relația (22) și, conform ipotezei, rezultă că ele satisfac și relația (23). Urmează că egalitatea (25) se reduce la

$$\overline{f(p_1,\ldots,p_n)}\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n} = 0, \qquad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B),$$

ceea ce se mai scrie în forma

$$\left(\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}\bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n}p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n}\right)\left(\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n}\right) = 0, \quad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B)$$

sau încă

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}\bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n}b_{\sigma_1\ldots\sigma_n}p_1^{\sigma_1}\ldots p_n^{\sigma_n} = 0, \qquad (\forall p_1,\ldots,p_n \in B),$$

de unde se deduce (24).

LEMA 6. *Să presupunem că ecuația* (1′) *are soluție. Atunci sistemul de funcții* (17) *satisface condiția* (19) *dacă și numai dacă*

$$\bar{a}_{\tau_1\ldots\tau_n}\bigcup_{i=1}^{n}\bar{c}_{i,\tau_1\ldots\tau_n}^{\tau_i} = 0, \qquad (\forall\tau_1,\ldots,\tau_n). \qquad (26)$$

Pentru demonstrație, vom transforma relația

$$s_i = \varphi_i(s_1,\ldots,s_n), \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

după cum urmează:

$$s_i\overline{\varphi_i(s_1,\ldots,s_n)} \cup \bar{s}_i\varphi_i(s_1,\ldots,s_n) = 0, \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left(s_i\bigcup \bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} \cup \bar{s}_i\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} c_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n}\right) = 0,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\Bigg(\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} \bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}1\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}s_1^{\sigma_1}\ldots s_{i-1}^{\sigma_{i-1}}s_i s_{i+1}^{\sigma_{i+1}}\ldots s_n^{\sigma_n} \cup$$

$$\cup\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}} c_{i,\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}0\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}s_1^{\sigma_1}\ldots s_{i-1}^{\sigma_{i-1}}\bar{s}_i s_{i+1}^{\sigma_{i+1}}\ldots s_n^{\sigma_n}\Bigg) = 0,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\\ \sigma_i,\sigma_{i+1},\ldots\sigma_n}}\left(\bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n}\right)^{\sigma_i}s_1^{\sigma_1}\ldots s_{i-1}^{\sigma_{i-1}}s_i^{\sigma_i}s_{i+1}^{\sigma_{i+1}}\ldots s_n^{\sigma_n} = 0,$$

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}\right)^{\sigma_i}s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} = 0,$$

$$\bigcup_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}\left[\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}\right)^{\sigma_i}\right]s_1^{\sigma_1}\ldots s_n^{\sigma_n} = 0. \qquad (27)$$

Prin urmare, condiția (19) cere ca relația (22) să implice (27). Aplicînd lema 5, deducem că această implicație are loc dacă și numai dacă este satisfăcută relația

$$\bar{a}_{\sigma_1\ldots\sigma_n}\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bar{c}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}\right)^{\sigma_i} = 0, \qquad (\forall\sigma_1,\ldots,\sigma_n),$$

care coincide cu (26) (deoarece $(\bar{a})^{\sigma} = \overline{a^{\sigma}}$, pentru orice $a \in B$ și orice $\sigma = 0$ sau 1, notația $\bar{c}^{\sigma_i}_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}$ este lipsită de echivoc).

Pentru simplicitatea scrierii, în cele ce urmează vom întrebuința notațiile

$$\left.\begin{aligned} &(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \tau,\ldots;\ (u_1,\ldots,u_n) = u,\ldots;\\ &c_{i,\tau_1\ldots\tau_n} = c_{i,\tau},\ldots;\ (v_{1,\tau},\ldots,v_{n,\tau}) = v_\tau;\\ &f(\tau_1,\ldots,\tau_n) = f(\tau),\ldots;\ f(v_{1,\tau},\ldots,v_{n,\tau}) = f(v_\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

TEOREMA 2. *Dacă ecuația* (1) *are soluție, condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul de funcții* (17) *să constituie soluția generală reproductivă a ecuației* (1) *este ca pentru orice* $i = 1, \ldots, n$ *și pentru orice sistem* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *de valori* 0 *sau* 1, *coeficienții* $c_{i,\sigma_1\ldots\sigma_n}$ *să fie de forma* :

$$c_{i,\sigma} = [\xi_i f(\sigma) \cup \sigma_i \overline{f(\sigma)}] \left[ f(v_\sigma) \cup \overline{f(\sigma)} \bigcup_{j=1}^{n} \bar{v}_{j,\sigma}^{\sigma_j} \right] \cup$$

$$\cup\, v_{i,\sigma} \overline{f(v_\sigma)} \left[ f(\sigma) \cup \bigcap_{j=1}^{n} \overline{v_{j,\sigma}^{\sigma_j}} \right], \tag{29}$$

*unde* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *este o soluție particulară a ecuației* (1), $v_{1,\sigma}, \ldots, v_{n,\sigma} \in B$ (*am folosit notația* (28)).

Într-adevăr, conform definiției 5 și lemelor 4, 6, condiția necesară și suficientă este ca $c_{i,\tau_1\ldots\tau_n}$ să satisfacă simultan relațiile (20) și (26). Dar aceste egalități se mai scriu în forma :

$$f(c_{1,\tau}, \ldots, c_{n,\tau}) = 0, \qquad (\forall \tau),$$

$$\overline{f(\tau)} \bigcup_{i=1}^{n} \bar{c}_{i,\tau}^{\tau_i} = 0, \qquad (\forall \tau),$$

deci este necesar și suficient ca $c_{i,\tau_1\ldots\tau_n}$ să satisfacă ecuația

$$f(c_{1,\tau}, \ldots c_{n,\tau}) \cup \overline{f(\tau)} \bigcup_{i=1}^{n} \bar{c}_{i,\tau}^{\tau_i} = 0, \qquad (\forall \tau). \tag{30}$$

Dacă reușim să arătăm că ecuația (30) admite soluția particulară

$$c_{1,\tau} = \xi_i f(\tau) \cup \tau_i \overline{f(\tau)} \quad , \quad (i = 1, \ldots, n), (\forall \tau), \tag{31}$$

unde $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este o soluție particulară a ecuației (1), atunci teorema 2 rezultă imediat prin aplicarea teoremei lui Löwenheim (și schimbarea notației $\tau$ în $\sigma$).

Rămîne deci să arătăm că formulele (31) definesc o soluție particulară a ecuației (30), oricare ar fi $\tau$.

Într-adevăr, din (31) se deduce succesiv :

$$\bar{c}_{i,\tau} = \bar{\xi}_i f(\tau) \cup \bar{\tau}_i \overline{f(\tau)}, \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (\forall \tau),$$

$$\bar{c}_{i,\tau}^{\tau_i} = \bar{\xi}_i^{\tau_i} f(\tau) \cup \bar{\tau}_i^{\tau_i} \overline{f(\tau)}, \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (\forall \tau),$$

$$\bar{c}_{i,\tau}^{\tau_i} = \bar{\xi}_i^{\tau_i} f(\tau) \quad , \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (\forall \tau), \tag{32}$$

căci oricare ar fi valoarea 0 sau 1 dată lui $\tau_i$, se verifică imediat că $\bar{\tau}_i^{\tau_i} = 0$.

Introducînd expresiile (31) în membrul stîng al ecuației (30) și ținînd seamă de (32), obținem:

$$f(c_{1,\tau},\dots c_{n,\tau}) \cup \overline{f(\tau)} \bigcup_{i=1}^{n} \overline{c}_{i,\tau}^{\tau_i} =$$

$$= \bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} a_{\sigma_1\dots\sigma_n} \left[\xi_1 f(\tau) \cup \tau_1 \overline{f(\tau)}\right]^{\sigma_1} \dots \left[\xi_n f(\tau) \cup \tau_n \overline{f(\tau)}\right]^{\sigma_n} \cup \overline{f(\tau)} \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i^{\tau_i} f(\tau) =$$

$$= \bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} a_{\sigma_1\dots\sigma_n} \left[\xi_1^{\sigma_1} f(\tau) \cup \tau_1^{\sigma_1} \overline{f(\tau)}\right] \dots \left[\xi_n^{\sigma_n} f(\tau) \cup \tau_n^{\sigma_n} \overline{f(\tau)}\right] =$$

$$= \bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} a_{\sigma_1\dots\sigma_n} \left[\xi_1^{\sigma_1} \dots \xi_n^{\sigma_n} f(\tau) \cup \tau_1^{\sigma_1} \dots \tau_n^{\sigma_n} \overline{f(\tau)}\right] =$$

$$= f(\tau) \bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} a_{\sigma_1\dots\sigma_n} \xi_1^{\sigma_1} \dots \xi_n^{\sigma_n} \cup \overline{f(\tau)} \bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} a_{\sigma_1\dots\sigma_n} \tau_1^{\sigma_1} \dots \tau_n^{\sigma_n} =$$

$$= f(\tau) f(\xi) \cup \overline{f(\tau)} f(\tau) = 0, \qquad (\forall \tau),$$

ceea ce completează demonstrația.

## § 3

În încheiere, vom studia mai amănunțit cazul $n = 2$, prin urmare ecuația generală

$$a_{11}xy \cup a_{10}x\bar{y} \cup a_{01}\bar{x}y \cup a_{00}\bar{x}\bar{y} = 0, \tag{33}$$

în care

$$a_{11}a_{10}a_{01}a_{00} = 0. \tag{34}$$

Teorema 1 ne dă soluția particulară:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10}a_{11} = \bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10}, \\ \xi_2 &= \bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{01} \cdot a_{10}a_{11} = \bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{01}a_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Aplicînd teorema lui Löwenheim, cu soluția particulară (35), obținem soluția generală:

$$x = (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})(a_{11}u_1u_2 \cup a_{10}u_1\bar{u}_2 \cup a_{01}\bar{u}_1u_2 \cup a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2) \cup (\bar{a}_{11}u_1u_2 \cup \bar{a}_{10}u_1\bar{u}_2) =$$

$$= (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\, u_1u_2 \cup (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\, u_1\bar{u}_2 \cup (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\, a_{01}\bar{u}_1u_2 \cup (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\, a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2 =$$

$$= (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\,(u_1 \cup a_{01}\bar{u}_1u_2 \cup a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2),$$

$$y=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})\,(a_{11}u_1u_2\cup a_{10}u_1\bar{u}_2\cup a_{01}\bar{u}_1u_2\cup a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2)\cup(\bar{a}_{11}u_1u_2\cup\bar{a}_{01}\bar{u}_1u_2)=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})u_1u_2\cup(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})a_{10}u_1\bar{u}_2\cup(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\bar{u}_1u_2\cup(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,[(\bar{a}_{11}\cup a_{10})\,u_1u_2\cup a_{10}u_1\bar{u}_2\cup\bar{u}_1u_2\cup(\bar{a}_{11}\cup a_{10})\,a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2]=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,(\bar{a}_{11}u_1u_2\cup a_{10}u_1\cup\bar{u}_1u_2\cup\bar{a}_{11}a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2\cup a_{10}a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2)=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,(\bar{a}_{11}u_2\cup a_{10}u_1\cup\bar{u}_1\bar{u}_2\cup\bar{a}_{11}a_{00}\bar{u}_1\cup a_{10}a_{00}\bar{u}_1)=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,(\bar{a}_{11}u_2\cup a_{10}u_1\cup a_{10}a_{00}\cup\bar{u}_1u_2\cup\bar{a}_{11}a_{00}\bar{u}_1),$$

deci am obținut soluția generală

$$\left.\begin{aligned}x&=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,(u_1\cup a_{01}u_2\cup a_{00}\bar{u}_2),\\ y&=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,[a_{10}a_{00}\cup a_{10}u_1\cup\bar{a}_{11}u_2\cup(\bar{a}_{11}a_{00}\cup u_2)\,\bar{u}_1].\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

Să aplicăm acum teorema 2, particularizînd valorile parametrilor $v_i$. Pentru $\sigma\neq(0,0)$, vom lua $v_{1,\sigma}=v_{2,\sigma}=1$. Ținînd seamă că $1^{\sigma_j}=\sigma_j$ și că din relațiile (35) se deduce $\xi_i\cup\bar{a}_{11}=\xi_i$, $(i=1,2)$, obținem

$$c_{i,\sigma}=[\xi_i f(\sigma)\cup\sigma_i\overline{f(\sigma)}]\cup\bar{a}_{11}\,[f(\sigma)\cup\sigma_1\sigma_2]=\xi_i f(\sigma)\cup\sigma_i\overline{f(\sigma)}\cup\bar{a}_{11}\sigma_1\sigma_2,$$

deci :

$$c_{1,11}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,a_{11}\cup\bar{a}_{11}=\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10},$$
$$c_{2,11}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})\,a_{11}\cup\bar{a}_{11}=\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10},$$
$$c_{1,10}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,a_{10}\cup\bar{a}_{10}=\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10},$$
$$c_{2,10}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})\,a_{10}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,a_{10},$$
$$c_{1,01}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,a_{01},$$
$$c_{2,01}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})\,a_{01}\cup\bar{a}_{01}=\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}.$$

Luînd $v_{1,00}=v_{2,00}=0$, deducem că $c_{i,00}=\xi_i a_{00}$, deci

$$c_{1,00}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,a_{00},$$
$$c_{2,00}=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01}a_{10})\,a_{00},$$

deci am obținut soluția generală :

$$x=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,(u\cup a_{01}\bar{u}_1u_2\cup a_{00}\bar{u}_1\bar{u}_2),$$
$$y=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,[(\bar{a}_{11}\cup a_{10})\,u_1u_2\cup a_{10}u_1\bar{u}_2\cup\bar{u}_1u_2\cup a_{00}a_{10}\bar{u}_1\bar{u}_2]=$$
$$=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,(\bar{a}_{11}u_1u_2\cup a_{10}u_1\cup\bar{u}_1u_2\cup a_{00}a_{10}\bar{u}_1),$$

sau încă :

$$\left.\begin{aligned}x&=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{10})\,(u_1\cup a_{01}u_2\cup a_{00}\bar{u}_2),\\ y&=(\bar{a}_{11}\cup\bar{a}_{01})\,[(\bar{a}_{11}u_2\cup a_{10})\,u_1\cup(u_2\cup a_{00}a_{10})\,\bar{u}_1].\end{aligned}\right\}\qquad(37)$$

Soluția generală (37) este mai simplă decît (36) și cu mult mai simplă decît soluția

$$\left.\begin{aligned} x &= (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10})\, u_1 \cup a_{01} a_{00} \bar{u}_1, \\ y &= (\bar{a}_{11} \cup \bar{a}_{10}\bar{a}_{01})\, u_1 u_2 \cup a_{10}\,(\bar{a}_{11} \cup a_{00})\, u_1 \bar{u}_2 \cup \\ &\quad \cup (\bar{a}_{01} \cup a_{00}\bar{a}_{11})\, \bar{u}_1 u_2 \cup a_{00}\,(\bar{a}_{01} \cup a_{10})\, \bar{u}_1 \bar{u}_2, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dată în [3].

Primită la redacție la 10 decembrie 1961

## О РЕШЕНИИ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛЕВЕНГЕЙМА

### РЕЗЮМЕ

Рассматривается общее булевое уравнение (1), которое пишется в канонической дизюнктивной форме (1′), где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ принимают значения 0,1; использованы обозначения (9), $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$. Общее решение уравнения (1) дается формулами (2), где $u_1, \ldots, u_n$—$n$ произвольные параметры, а $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — частное решение [2], (см. также [5]).

Отсюда следует, что нахождение общего параметрического решения уравнения (1) зависит от нахождения частного решения. В § 1 показывается (теорема 1), что *если уравнение* (1′) *разрешимо* (условие (15)), оно *имеет частное решение* (14), где смысл отношения $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) > (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ выясняется определением 4, и мы условились, что, если пересечение $\bigcap a_{\tau_1 \ldots \tau_n}$ не имеет смысла, то принимаем его равным 1. Если выражения (14) подставить в (2), получается *общее решение уравнения* (1) *в виде* (16), *зависящее только от функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и от произвольных параметров* $u_1, \ldots, u_n$.

В § 2 показывается (теорема 2), что *необходимым и достаточным условием для того, чтобы система функций* (17) *составляла общее, воспроизводящее в смысле определения 5, решение уравнения* (1), *является то, чтобы для любого* $i = 1, \ldots, n$ *и для любой системы* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *значений* 0,1 *коэффициенты* $c_{i, \sigma_1 \ldots \sigma_n}$ *имели вид* (29), *где* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — *частное решение уравнения* (1), *а* $v_{1,\sigma}, \ldots, v_{n,\sigma}$ — *произвольные* $n.2^n$ *параметры* (*с обозначением* (28)).

Эта теорема дает *все* общие воспроизводящие решения; она полезна для нахождения простого вида общего решения (см. § 3, случай $n = 2$; общее решение (37) проще (36) или (38)).

# SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BOOLÉENNES PAR LA MÉTHODE DE LÖWENHEIM


## RÉSUMÉ

L'auteur considère l'équation booléenne générale (1) qui s'écrit également sous la forme canonique disjonctive (1'), où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ prennent les valeurs 0, 1. Il a utilisé les notations (9), $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$. La solution générale de l'équation (1) est donnée par les formules (2), où $u_1, \ldots, u_n$ sont $n$ paramètres arbitraires, et $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une solution particulière ([2], v. aussi [5]).

Il s'ensuit que la découverte de la solution générale paramétrique de l'équation (1) dépend de la découverte d'une solution particulière de celle-ci. Au paragraphe 1, l'auteur montre (théorème 1) *que si l'équation* (1') *est soluble* (condition 15), *elle admet la solution particulière* (14), où le sens de la relation $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) > (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ est donné par la définition 4, après avoir adopté la convention que lorsque l'intersection $\cap a_{\tau_1 \ldots \tau_n}$ est dépourvue de sens on la prend égale à 1. En introduisant les expressions (14) dans les formules (2), on obtient *la solution générale de l'équation* (1) *sous la forme* (16), *qui ne dépend que de la fonction* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *et des paramètres arbitraires* $u_1, \ldots, u_n$.

Au paragraphe 2, on montre (théorème 2) que *la condition nécessaire et suffisante pour que le système de fonctions* (17) *constitue la solution générale reproductive, au sens de la définition* 5, *de l'équation* (1), *est que pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *et pour tout système* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *de valeurs* 0, 1, *les coefficients* $c_{i,\sigma_1 \ldots \sigma_n}$, *soient de la forme* (29), *où* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *est une solution particulière de l'équation* (1), *et* $v_{1,\sigma}, \ldots, v_{n,\sigma}$ *sont* $n.2^n$ *paramètres arbitraires* (avec la notation (28)).

Ce théorème donne *toutes* les solutions générales reproductives ; il est utile lorsqu'il s'agit de trouver une forme simple de la solution générale (v. paragr. 3, le cas de l'équation générale à deux inconnues : la solution générale (37) est plus simple que (36) ou (38)).


## BIBLIOGRAFIE


1. W. E. JOHNSON, *Sur la théorie des équations logiques.* Bibl. du Congr. Intern. de Phil., **III**, 185–199 (1901).
2. L. LÖWENHEIM, *Über die Auflösung von Gleichungen in logischen Gebietkalkül.* Math. Ann., *68*, 169–207 (1910).
3. A. DEL RE, *Lezioni di Algebra della Logica.* Napoli, 1907.
4. S. RUDEANU, *Об определении булевых алгебр при помощи бинарных операции.* Rev. math. pures appl., Acad. R.P.R., **VI**, 172–183 (1961).
5. — *Ecuațiile booleene și aplicațiile lor la studiul schemelor în punte.* II. Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, 611–618 (1961).
6. E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Bd. I. Leipzig, 1890.
7. A. N. WHITEHEAD, *A Treatise on Universal Algebra, with Applications.* Cambridge, 1898.

# ASUPRA INTERPRETĂRII GEOMETRICE A REPREZENTĂRILOR CVASICONFORME

DE

SILVIU GUIAŞU

În această lucrare, vom arăta că reprezentările cvasiconforme ale unui domeniu euclidian sînt reprezentări conforme ale unui spațiu riemannian.

În primul paragraf, folosind variabila complexă pe o suprafață, vom demonstra că o reprezentare cvasiconformă în sensul lui B. V. Șabat, este o reprezentare conformă a unei suprafețe pe altă suprafață. În al doilea paragraf, cu ajutorul unei măsuri unghiulare, vom arăta că o reprezentare cvasiconformă $n$-dimensională, cu două sisteme de caracteristici, este o reprezentare conformă a unui spațiu riemannian pe alt spațiu riemannian.

## § 1. REPREZENTĂRI CVASICONFORME ÎN SENSUL LUI B. V. ȘABAT

**1.1.** *Preliminarii.* Fiind dată o elipsă:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D, \qquad AC - B^2 > 0, \qquad A > 0,$$

se definesc caracteristicile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ale elipsei, astfel:

$$\frac{\gamma}{A} = -\frac{\beta}{B} = \frac{\alpha}{C} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}. \tag{1.1}$$

Spunem că în domeniul $D$ al planului complex $z$ este dată o distribuție continuă de caracteristici $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dacă există în $D$ funcțiile continue $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, satisfăcînd condițiile:

$$\alpha, \gamma > 0, \qquad \alpha\gamma - \beta^2 = 1.$$

Definiția 1.1. *Fiind dată în domeniul $D$ al planului complex o distribuție continuă de două sisteme de caracteristici $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ și $\alpha_1(z)$, $\beta_1(z)$, $\gamma_1(z)$, funcția $w = f(z)$ efectuează o reprezentare cvasiconformă cu două sisteme de caracteristici, a domeniului $D$, dacă ea este continuă și univalentă în $D$ și pentru orice punct $z_0 \in D$ transformă elipsa infinitezimală $E[\alpha, \beta, \gamma; z_0]$ (elipsa de caracteristici $\alpha(z_0)$, $\beta(z_0)$, $\gamma(z_0)$ și centru $z_0$) în elipsa de caracteristici $\alpha_1(z_0)$, $\beta_1(z_0)$, $\gamma_1(z_0)$ și centru $f(z_0)$, $E[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; f(z_0)]$.*

Aceste reprezentări au fost introduse în 1945 de B. V. Șabat [6].

În punctele de diferențiabilitate ale reprezentării cvasiconforme $f(z) = u + iv$, funcțiile $u$ și $v$ satisfac sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \alpha u_x + (\beta + \beta_1) u_y &= \alpha_1 v_y, \\ (\beta - \beta_1) u_x + \gamma u_y &= -\alpha_1 v_x. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Invers, dacă într-un punct de diferențiabilitate al funcției $f(z)$ avem sistemul (1.2) iar jacobianul $J\left(\frac{w}{z}\right) \neq 0$, reprezentarea este cvasiconformă.

**1.2.** Variabila complexă pe suprafață a fost introdusă pentru prima dată de către E. Beltrami [3]. Expresia ei a fost dată pe o cale simplă de către H. R. Pyle [4].

Considerăm suprafața $\Sigma = \{D, ds^2\}$ formată din domeniul $D$ cu metrica neeuclidiană

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdx\,dy + Gdy^2, \qquad EG - F^2 > 0. \tag{1.3}$$

Diferențiala variabilei complexe pe $\Sigma$ este

$$dz = \frac{1}{\sqrt{E}}(Edx + Fdy + i\,Hdy), \qquad H = \sqrt{EG - F^2}. \tag{1.4}$$

Se vede ușor că $dz \cdot d\bar{z} = |dz|^2 = ds^2$.

Unui cerc infinitezimal pe $\{D, ds^2\}$ determinat de valoarea constantă $ds$, îi corespunde în domeniul euclidian $D$ elipsa infinitezimală (1.3) de caracteristici

$$\frac{\gamma}{E} = -\frac{\beta}{F} = \frac{\alpha}{G} = \frac{1}{H}. \tag{1.5}$$

**1.3.** Fie două suprafețe:

$$\Sigma = \{D, ds^2\} : ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, H = \sqrt{EG - F^2},\ EG - F^2 > 0; \tag{1.6}$$

$$\Sigma_1 = \{D, ds_1^2\} : ds_1^2 = E_1 dx^2 + 2F_1 dxdy + G_1 dy^2, H_1 = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2},\ E_1 G_1 - F_1^2 > 0. \tag{1.7}$$

TEOREMA 1.1. *Reprezentarea cvasiconformă diferențiabilă peste tot, de jacobian diferit de zero*) a domeniului $D$, cu două sisteme de caracteristici continui $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\alpha_1(z)$, $\beta_1(z)$, $\gamma_1(z)$, este reprezentarea conformă a suprafeței $\Sigma$ pe $\Sigma_1$, de metrice $ds^2$ și respectiv $ds_1^2$ corespunzătoare caracteristicilor $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\alpha_1(z)$, $\beta_1(z)$, $\gamma_1(z)$. Este adevărată și reciproca.*

Demonstrație. Fie funcția diferențiabilă de jacobian nenul

$$f(z) = u + iv : \Sigma \to \Sigma_1 .$$

Atunci :

$$dz = \frac{1}{\sqrt{E_1}} (Edx + Fdy + i\,Hdy),$$

iar cum $df \in \Sigma_1$ urmează că

$$df = \frac{1}{\sqrt{E_1}} (E_1 du + F_1 dv + i\,H_1 dv) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} [E_1 u_x + (F_1 + i\,H_1)\, v_x]\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{E_1}} [E_1 u_y + (F_1 + iH_1)\, v_y]\, dy.$$

Funcția $f(z)$ este monogenă pe $\Sigma$ dacă $\dfrac{df}{dz}$ nu depinde de direcția $\dfrac{dy}{dx}$ adică :

$$\begin{aligned} \frac{G}{H} u_x - \left(\frac{F}{H} + \frac{F_1}{H_1}\right) u_y &= \frac{G_1}{H_1} v_y , \\ -\left(\frac{F}{H} - \frac{F_1}{H_1}\right) u_x + \frac{E}{H}\, u_y &= -\frac{G_1}{H_1} v_x , \end{aligned} \tag{1.8}$$

sistem echivalent cu :

$$\begin{aligned} \alpha u_x + (\beta + \beta_1)\, u_y &= \alpha_1 v_y , \\ (\beta - \beta_1)\, u_x + \gamma u_y &= -\alpha_1 v_x . \end{aligned}$$

Deci, diferențiabilitatea peste tot și jacobianul nenul ne asigură că $f(z)$ este o reprezentare cvasiconformă. Raționamentul este valabil și invers.

COROLARUL 1.1. În cazul în care reprezentarea cvasiconformă are un singur sistem de caracteristici $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, suprafața $\Sigma_1$ devine un plan, deoarece coeficienții metricei devin $E_1 = G_1$, $F_1 = 0$, pe baza relațiilor (1.5). Deci, *reprezentările cvasiconforme cu un singur sistem de*

*) O reprezentare cvasiconformă este diferențiabilă peste tot și are jacobianul strict pozitiv, dacă de exemplu [1] toate caracteristicile sînt mărginite și continue în $D$ și satisfac în interiorul lui $D$ condiția integrală a lui Hölder. Pentru $\alpha(z)$, de exemplu, condiția integrală a lui Hölder este :

$$I(z_0) = \iint_{D_1} \frac{|\alpha(z) - \alpha(z_0)|}{|z - z_0|^2}\, dx\, dy < K, \quad (K > 0 ;\ z_0 \in D ;\ \overline{D}_1 \subset D).$$

*caracteristici, introduse de către Lavrentiev* [8], *sînt reprezentări conforme ale unei suprafeţe pe un plan.*

COROLARUL 1.2. *Pentru reprezentările cvasiconforme cu două sisteme de caracteristici se pun în evidenţă doi laplaceieni generalizaţi, pentru partea reală şi respectiv partea imaginară a reprezentării:*

$$\begin{aligned}\Delta_1 u &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}u_x + \frac{\beta+\beta_1}{\alpha_1}u_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta-\beta_1}{\alpha_1}u_x + \frac{\gamma}{\alpha_1}u_y\right) = 0,\\ \Delta_2 v &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\gamma_1}v_x + \frac{\beta-\beta_1}{\gamma_1}v_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta+\beta_1}{\gamma_1}v_x + \frac{\gamma}{\gamma_1}v_y\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

*Pentru reprezentările conforme obişnuite:* $\alpha = \gamma = \alpha_1 = \gamma_1 = 1$, $\beta = \beta_1 = 0$ *şi deci:*

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

COROLARUL 1.3. În 1956 G. N. Polojii introduce funcţiile $(p, q)$-analitice. Acestea sînt funcţii $f(z) = u + iv$ satisfăcînd sistemul:

$$\begin{aligned} pu_x + qu_y &= v_y,\\ -qu_x + pu_y &= -v_x, \end{aligned} \tag{1.10}$$

unde $p$ şi $q$ sînt funcţii de $x$, $y$ iar $p > 0$ (a se vedea, de exemplu, [9]). Să vedem ce interpretare geometrică au funcţiile $(p, q)$-analitice diferenţiabile de jacobian nenul. Suprafeţele $\Sigma$ şi $\Sigma_1$ corespunzătoare sistemului (1.10) vor avea metricele:

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(dx^2 + dy^2),\\ ds_1^2 &= E_1 dx^2 + 2F_1 dxdy + G_1 dy^2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

deci *reprezentările $(p, q)$-analitice sînt reprezentări conforme ale unui plan pe o suprafaţă, deci inversa unei funcţii $(p, q)$-analitice ne dă o reprezentare conformă a unei suprafeţe pe un plan, adică o reprezentare cvasiconformă cu un singur sistem de caracteristici, în sensul lui Lavrentiev.*

## § 2. REPREZENTĂRI CVASICONFORME $n$-DIMENSIONALE

**2.1.** *Preliminarii.* Fiind dat un elipsoid în spaţiul cu $n$ dimensiuni:

$$a_{ij}x^i x^j = \rho^2, \tag{2.1}$$

se numesc caracteristicile elipsoidului $\alpha_{ij}$, $(i, j = 1,2,\ldots,n)$, definite astfel:

$$\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[n]{D}}, \qquad (i, j = 1,2,\ldots,n), \tag{2.2}$$

unde $D = \det |a_{ij}|$. Aceste caracteristici satisfac condițiile:

$$\det |\alpha_{ij}| = 1, \quad \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_p}}^{n} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 i_1} & \ldots & \alpha_{i_1 i_p} \\ \vdots & & \\ \alpha_{i_p i_1} & \ldots & \alpha_{i_p i_p} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{matrix} (p = 1,2, \ldots, n), \\ \alpha_{i_j i_k} = \alpha_{i_k i_j}. \end{matrix} \tag{2.3}$$

Spunem că în domeniul $D_n$ din spațiul euclidian cu $n$ dimensiuni, este dată o distribuție continuă de caracteristici $\alpha_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, dacă există în $D_n$ funcțiile continue $\alpha_{ij}(z)$, $(i, j = 1,2, \ldots, n)$, satisfăcînd condițiile (2.3), unde $z = x^i e_i$, $e_i$ fiind versorii $n$-edrului de referință ortogonal.

Definiția 2.1. *Fiind dată în domeniul $D_n$ o distribuție continuă de două sisteme de caracteristici $\alpha_{ij}(z)$, $\alpha^*_{ij}(z)$, $(i, j = 1,2, \ldots, n)$, funcția vectorială $w = f(z) = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n)\, e_i$ efectuează o reprezentare cvasiconformă cu două sisteme de caracteristici $\alpha_{ij}$, $\alpha^*_{ij}$, $(i, j = 1,2, \ldots, n)$, a domeniului euclidian $n$-dimensional $D_n$ dacă ea este continuă și univalentă în $D_n$ și pentru toate punctele $z_0 \in D_n$, transformă elipsoidul infinitezimal $(n-1)$-dimensional $E[(\alpha_{ij}); z_0]$ (elipsoidul de caracteristici $\alpha_{ij}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, și centru $z_0$) în elipsoidul infinitezimal $(n-1)$-dimensional $E[(\alpha^*_{ij}); f(z_0)]$.*

Această extensiune naturală a reprezentărilor cvasiconforme a fost făcută de P. Caraman într-un ciclu de lucrări, dintre care cea mai importantă este [7].

În punctele de diferențiabilitate, funcțiile $\bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$, $(i = 1, \ldots, n)$, verifică sistemul:

$$\frac{\alpha^*_{ij}\, \bar{x}^i_k\, \bar{x}^j_l}{\alpha_{kl}} = \sqrt[n]{J^2}, \qquad (k, l = 1,2, \ldots, n), \tag{2.4}$$

unde notăm $\bar{x}^i_k = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$. Determinantul funcțional al transformării este $J = |\bar{x}^i_k|$.

Invers, dacă într-un punct de diferențiabilitate al funcției $f(z)$, avem sistemul (2.4) și jacobianul $J \neq 0$, reprezentarea este cvasiconformă.

**2.2.** Considerăm spațiul riemannian $V_n = \{D_n, ds^2\}$, format din domeniul $D_n$ cu metrica riemanniană

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.5}$$

Metrica este presupusă pozitiv definită, cu coeficienții continui și fără puncte singulare: $D = \det |a_{ij}| \neq 0$.

Unei sfere infinitezimale $(n-1)$-dimensionale în $V_n$, determinată de valoarea constantă $ds$, îi corespunde în domeniul euclidian $D_n$ elipsa infinitezimală $(n-1)$-dimensională (2.5) de caracteristici:

$$\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[n]{D}}, \qquad (i, j = 1,2, \ldots, n), \tag{2.6}$$

de unde rezultă că metrica $ds^2$ generează o distribuție continuă de caracteristici $\alpha_{ij}$ definite de (2.6).

Definiția 2. 2. *Se înțelege prin măsura unghiulară afină a domeniului euclidian $D_n$, corespunzătoare formei metrice $ds^2$, acea măsură unghiulară în care unghiul $\theta$, dintre două elemente $dz = dx^i e_i$ și $\delta z = \delta x^i e_i$ care ies din același punct $z = x^i e_i$, se determină prin relația :*

$$\cos\theta = \frac{a_{ij} dx^i \delta x^j}{ds\, \delta s}, \qquad \delta s = |\delta z|^2 = a_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j. \tag{2.7}$$

Teorema 2.1. *Reprezentarea cvasiconformă n-dimensională, diferențiabilă și de jacobian $J \neq 0$, a domeniului $D_n$, cu două sisteme de caracteristici continui $\alpha_{ij}$, $\alpha^*_{ij}$, $(i,j = 1,2, \ldots, n)$, este reprezentarea conformă a spațiului riemannian $V_n$ pe spațiul riemannian $V^*_n$, de metrice $ds^2$ și respectiv $ds^2_*$ corespunzătoare caracteristicelor $\alpha_{ij}$, $\alpha^*_{ij}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, și reciproc.*

Demonstrație. Fie $f(z) = \overline{x}^i(x^1, \ldots, x^n)\, e_i$ reprezentarea cvasiconformă $n$-dimensională a domeniului $D_n$, cu caracteristicile $\alpha_{ij}$, $\alpha^*_{ij}$, $(i, j = 1,2, \ldots, n)$. Fiind diferențiabilă, avem sistemul :

$$\frac{\alpha^*_{ij}\, \overline{x}^i_k\, \overline{x}^j_l}{\alpha_{kl}} = \sqrt[n]{\overline{J}^2}, \qquad (k, l = 1,2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

și diferențialele :

$$d\overline{x}^i = \overline{x}^i_j\, dx^j. \tag{2.9}$$

Să considerăm spațiile riemanniene $V_n = \{D_n, ds^2\}$, $V^*_n = \{D_n, ds^2_*\}$ de metrice :

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad ds^2_* = a^*_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

unde coeficienții metricelor sînt generați de sistemele de caracteristici :

$$\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[n]{D}}, \quad \frac{\alpha^*_{ij}}{a^*_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[n]{D^*}}, \quad D = \det|a_{ij}|, \quad D^* = \det|a^*_{ij}|. \tag{2.10}$$

Fie $\theta = (\widehat{df, \delta f})$ și $\omega = (\widehat{dz, \delta z})$.

Ținînd cont de (2.8) putem scrie :

$$\cos\theta = \frac{\alpha^*_{ij}\, d\overline{x}^i\, \delta\overline{x}^j}{\sqrt{\alpha^*_{ij}\, d\overline{x}^i\, d\overline{x}^j}\,\sqrt{\alpha^*_{ij}\, \delta\overline{x}^i\, \delta\overline{x}^j}} = \frac{\alpha^*_{ij}\, \overline{x}^i_k\, \overline{x}^j_l\, dx^k\, \delta x^l}{\sqrt{\alpha^*_{ij}\, \overline{x}^i_k \overline{x}^j_l dx^k\, dx^l}\,\sqrt{\alpha^*_{ij}\, \overline{x}^i_l\, \overline{x}^j_l\, \delta x^k\, \delta x^l}} =$$

$$= \frac{\alpha_{kl}\, dx^k\, \delta x^l}{\sqrt{\alpha_{kl}\, dx^k\, dx^l}\,\sqrt{\alpha_{kl}\, \delta x^k\, \delta x^l}} = \cos\omega.$$

Deci $f(z) : V_n \to V^*_n$ invariază măsura unghiulară.

Invers, considerăm o reprezentare conformă diferențiabilă :

$f(z) : V_n = \{D_n,\ ds^2\} \to V_n^* = \{D_n\ ds_*^2\},\ ds^2 = a_{ij}\ dx^i\ dx^j,\ ds_*^2 = a_{ij}^*\ dx^i\ dx^j.$

Atunci cos $\theta$ = cos $\omega$ implică :

$$\frac{a_{ij}^*\ d\bar{x}^i\ \delta\bar{x}^j}{ds^*\ \delta s^*} = \frac{a_{kl}\ dx^k\ \delta x^l}{ds\ \delta s} \tag{2.11}$$

pentru orice $dz = dx^i\ e_i$ și $\delta z = \delta x^i\ e_i$. Metricelor $ds^2$ și $ds_*^2$ le corespund sistemele de caracteristici :

$$\frac{\alpha_{ij}}{a_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[n]{D}},\qquad \frac{\alpha_{ij}^*}{a_{ij}^*} = \frac{1}{\sqrt[n]{D^*}},\qquad (i,j = 1,2,\ \ldots,\ n),$$

iar relația (2.11) devine :

$$\frac{\alpha_{ij}^*\ d\bar{x}^i\ \delta\bar{x}^j}{\sqrt{\alpha_{ij}^*\ d\bar{x}^i\ d\bar{x}^j}\ \sqrt{\alpha_{ij}^*\ \delta\bar{x}^i\ \delta\bar{x}^j}} = \frac{\alpha_{kl}\ dx^k\ \delta x^l}{\sqrt{\alpha_{kl}\ dx^k\ dx^l}\ \sqrt{\alpha_{kl}\ \delta x^k\ \delta x^l}}$$

sau :

$$\frac{A_{kl}\ dx^k\ \delta x^l}{\sqrt{A_{kl}\ dx^k\ dx^l}\ \sqrt{A_{kl}\ \delta x^k\ \delta x^l}} = \frac{\alpha_{kl}\ dx^k\ \delta x^l}{\sqrt{\alpha_{kl}\ dx^k\ dx^l}\ \sqrt{\alpha_{kl}\ \delta x^k\ \delta x^l}}, \tag{2.12}$$

unde am notat $A_{kl} = \alpha_{ij}^*\ \bar{x}_k^i\ \bar{x}_l^j,\qquad (k,\ l = 1,2,\ldots,\ n).$

Cum relația (2.12) este adevărată pentru orice $dz$, $\delta z$, considerăm $dx^i = 0,\ (i = 1,\ \ldots,\ n;\ i \neq k),\ \delta x^j = 0,\ (j = 1,\ \ldots,\ n;\ j \neq l)$, și avem :

$$\frac{A_{kl}}{\sqrt{A_{kk}\ A_{ll}}} = \frac{\alpha_{kl}}{\sqrt{\alpha_{kk}\ \alpha_{ll}}},\qquad (k,\ l = 1,2,\ \ldots,\ n). \tag{2.13}$$

Luînd

$$dx^k = dx^l,\ dx^i = 0,\ (i = 1,2,\ \ldots,\ n;\ i \neq k,\ i \neq l),$$

$$\delta x^l = -\delta x^k,\ \delta x^i = 0,\ (i = 1,2,\ \ldots,\ n;\ i \neq k,\ i \neq l),$$

obținem :

$$\frac{A_{kk} - A_{ll}}{\sqrt{(A_{kk} + A_{ll})^2 - 4A_{kl}^2}} = \frac{\alpha_{kk} - \alpha_{ll}}{\sqrt{(\alpha_{kk} + \alpha_{ll})^2 - 4\alpha_{kl}^2}},\quad (k,l = 1,2,\ \ldots,\ n). \tag{2.14}$$

Din (2.13) și (2.14) obținem :

$$\frac{A_{11}}{\alpha_{11}} = \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} = \ldots = \frac{A_{nn}}{\alpha_{nn}}, \tag{2.15}$$

sau ținînd seamă de expresia lui $A_{kl}$ :

$$\frac{\alpha_{ij}^*\ \bar{x}_k^i\ \bar{x}_l^j}{\alpha_{kl}} = \sqrt[n]{J^2},\qquad (k,\ l = 1,2,\ \ldots,n). \tag{2.16}$$

În şirul de rapoarte egale am introdus şi pe $\sqrt[n]{J^2}$ pentru că

$$\det | \alpha^*_{ij} \bar{x}^i_k \bar{x}^j_l | = J^2, \qquad \det | \alpha_{ij} | = \det | \alpha^*_{ij} | = 1.$$

Cum reprezentarea este diferenţiabilă şi de jacobian nenul, sistemul (2.16) ne asigură că $f(z)$ este o reprezentare cvasiconformă cu două sisteme de caracteristici, a domeniului $D_n$.

COROLARUL 2.1. *În cazul în care reprezentarea cvasiconformă are un singur sistem de caracteristici,* $\alpha_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\alpha^*_{ij} = \delta_{ij}$, *atunci* $\alpha^*_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, *iar* $V^*_n \equiv D_n$ *şi avem o reprezentare conformă a unui spaţiu riemannian pe un spaţiu euclidian.*

Primită la redacţie la 12 decembrie 1961

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

### РЕЗЮМЕ

В § 1 при помощи комплексной переменной доказывается, что квазиконформное отображение в смысле Б. В. Шабата является конформным отображением поверхности на другую поверхность.

В § 2 доказывается, что $n$-мерное квазиконформное отображение в смысле П. Карамана [7] является конформным отображением риманова пространства на другое риманово пространство.

## SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES

### RÉSUMÉ

Au paragraphe 1 de ce travail, l'auteur, utilisant la notion de variable complexe sur une surface, démontre qu'une représentation quasi-conforme (selon B. V. Şabat), est une représentation conforme d'une surface sur une autre surface. Au paragr. 2, il démontre qu'une représentation quasi-conforme $n$-dimensionnelle à deux ensembles de caractéristiques (selon P. Caraman [7]), est une représentation conforme d'un espace riemannien sur un autre espace riemannien.

## BIBLIOGRAFIE


1. Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ, *Квазиконформные отображения.* Изд. Львов. Унив., 1954.
2. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle.* I. Ed. Acad. R.P.R , 1957.
3. E. BELTRAMI, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Ann. Mat. Pura ed. Appl., **I**, *2*, 329—366 (1867).
4. H. RANDOLPH PYLE, *Unique differential ratios and curvilinear coordinates.* Math. Mag., **33**, *4*, 193—198 (1960).
5. — *Conformal mapping of surfaces.* Duke Math. Journal, **2**, *2*, 369—371 (1944).
6. Б. В. ШАБАТ, *Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных.* Мат. сб., **17(59)**, *2*, 193—210 (1945).
7. P. CARAMAN, *Contribution à la théorie des représentations quasi-conformes n-dimensionnelles.* Revue de math. pures et appl., **VI**, *2*, 311—357 (1961).
8. M. A. LAVRENTIEFF, *Sur une classe de représentations continues.* Matematiceskii sbornik, **42**, 407—424 (1935).
9. Г. Н. ПОЛОЖИЙ, *К вопросу о (p, q) — аналитических функциях комплексного переменного и их применениях.* Revue de math. pures et appl., Acad. R.P.R., **II**, 331—363 (1957).
10. S. GUIAȘU, *Funcții complexe pe o suprafață oarecare.* Analele Univ. „C. I. Parhon", *25*, 83—86 (1960).

# PROBABILITĂȚI PE O CLASĂ DE SPAȚII BANACH

DE

V. ISTRĂȚESCU

1. După cum a arătat M. Fréchet [5], este necesar să se studieze variabilele aleatoare cu valori într-un spațiu abstract. Noțiunea de element aleator într-un spațiu abstract a fost introdusă de M. Fréchet și studiată mai amănunțit de E. Mourier [4] și F. Skalora [9].

Problemele Mecanicii statistice conduc la problema definirii unei probabilități $P$ pe un spațiu funcțional. În cazul anumitor spații particulare problema a fost rezolvată. În această categorie intră spațiile Banach cu bază numărabilă [2].

În prezenta lucrare, arătăm cum se poate introduce o probabilitate în cazul unei clase speciale de spații Banach, care conține clasa spațiilor Banach cu bază numărabilă.

Pentru aceasta vom reaminti cîteva noțiuni referitoare la problema polinomului de cea mai bună aproximație în spații Banach.

Fie $E$ un spațiu Banach și $\{x_i\}_{i\in N}$ cu $x_i \in E$ și independente.

Definiția 1. 1. *Vom numi polinom de ordin n orice combinație* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (*$x_i$ fiind elementele de mai sus*).

Definiția 1. 2. *Polinomul* $p_n \in G(x_1, \ldots, x_n)$ (*prin* $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *am notat spațiul vectorial generat de vectorii* $x_1, \ldots, x_n$) *este un polinom de cea mai bună aproximație dacă*

$$d(x, G(x_1, \ldots, x_n)) = \| x - p_n \|.$$

Definiția 1. 3. *Un sistem de elemente* $\{x_i\}_{i\in N}$, *cu proprietatea că pentru orice n există exact un polinom de cea mai bună aproximație, va fi numit sistem T.*

Clasa de spații cu care vom lucra va fi aceea a spațiilor pentru care există un $T$-sistem și orice element poate fi aproximat cu polinoame ale sistemului. Pentru simplificare vom nota aceste spații cu $B(T)$. Reamintim

că pentru orice $n$ există cel puțin un element de cea mai bună aproximație (B. Z. Vulih [7]).

Se poate da o caracterizare [6] a polinoamelor de cea mai bună aproximație, cu ajutorul elementelor spațiului dual $E^*$, care ne va fi utilă în cele ce urmează și anume : $q \in G(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ este un polinom de cea mai bună aproximație pentru elementul $x \in E$ dacă există o funcțională $f \in E^*$ cu proprietățile următoare :

1. $\|f\| = 1$,
2. $f(\xi) = 0, \xi \in G(x_1, \ldots, x_n)$,
3. $f(-x) = -\|x - q\|$.

Folosind acestea, putem demonstra cu ușurință :

LEMA 1. 1. *Fie $E$ un spațiu Banach oarecare și $\{l_i\}_{i \in N}$ un sistem $T$. Dacă $x \neq y$ au polinoame de ce a mai bună aproximație, elementele $p_n$ și $q_n$ din $G(x_1, \ldots, x_n)$, atunci elementul $x + y$ are ca polinom de cea mai bună aproximație elementul $p_n + q_n$.*

Demonstrație. În baza lemei de mai sus, este suficient să construim o funcțională $f \in E^*$ cu proprietățile 1,2,3.

Să notăm cu $f_x$ și $f_y$ funcționalele corespunzătoare elementelor $x$ și $y$. Putem presupune că sînt pozitive pe conul $K = \{\lambda x + \lambda' y ; \lambda, \lambda' \geqslant 0\}$, ceea ce se poate după cum rezultă din teorma lui Krein, de prelungire a funcționalelor pozitive. Fie

$$d = \frac{\|x + y - p_n - q_n\|}{f_x(x+y) + f_y(x+y)}$$

și să considerăm funcționala $f_{x+y} \in E^*$ definită prin

$$f_{x+y}(z) = -d\,[f_x(z) + f_y(z)].$$

Este evident că :

$$f_{x+y}(\xi) = 0, \quad \xi \in G(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f_{x+y}(x + y) = \|-x + y - p_n - q_n\|$$

și

$$\|f\| = 1 \text{ (pentru că } f_{x+y}(x + y) = \|x + y - p_n - q_n\|).$$

Vom da acum cîteva exemple de spații $B(T)$ :

1. spațiile Hilbert (card $H \leqslant \aleph_0$) ;
2. $L^p$, $l^q$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ ;
3. spațiile Banach cu bază [1], [2], [3].

Un spațiu Banach $E$ este cu bază numărabilă dacă există un sistem de elemente liniar independent $\{l_i\}_{i \in N}$ astfel că dacă $x \in E$, $x = \sum \lambda_i l_i$ în mod unic.

Dacă punem

$$\|x\|_1 = \left(\|x\|^p + \sum_1^\infty \frac{(\lambda_i)^p}{2^{2ip}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

atunci $E$ devine un spaţiu strict normat [8] şi deci în baza teoremei lui Ahiezer se deduce că $\{l_i\}_{i\in N}$ este un sistem $T$. Se verifică uşor că elementul de cea mai bună aproximaţie de ordin $n$ este chiar suma parţială $s_n$.

**2.** Vom nota mulţimea $(1,2,3, \ldots)$ cu $N$ şi vom considera spaţiul $R^\infty$ [2] al şirurilor de numere reale:

$$p \in R^\infty,\ p = \{r_1, r_2, \ldots\},\ r_i \in R.$$

Vom pune

$$X = \prod_{s\in N} \overset{(s)}{X}$$

cu $\overset{(s)}{X} = R^\infty$ pentru orice $s \in N$.

Să arătăm că putem pune în corespondenţă spaţiul Banach $E$ cu o parte a lui $X$ şi că această corespondenţă este liniară.

Fie pentru aceasta $x \in E$ şi pentru orice $s \in N$, $p_s'$ polinomul de cea mai bună aproximaţie relativ la sistemul $T$ considerat. Cum

$$p_s' = \sum_1^s p_i e_i,$$

să considerăm şirul

$$\bar{p}_s = (p_1, p_2, \ldots, p_s, 0,0, \ldots).$$

Dat fiind elementul $x \in E$ sînt bine determinate şirurile $\bar{p}_s$, $s \in N$. Reciproc, dacă se dau şirurile $(\bar{p}_s)_{s\in N}$ atunci $x$ este bine determinat căci

$$\| x - y \| \leqslant \| x - p_n' \| + \| y - p_n' \|$$

(în virtutea faptului că spaţiul este de tip $B(T)$). Elementului $x \in E$ îi punem în corespondenţă în spaţiul $X$ punctul $p = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots)$. Din cele de mai sus rezultă că corespondenţa dintre $E$ şi $X(E)$, partea lui $X$ care îi corespunde, este liniară şi omogenă, deci este un izomorfism.

Pe spaţiul $X(E)$ putem introduce o normă în modul următor:

$$\| p \| = \sup_n \| p_n \|,\ p = \{\bar{p}_s\}_{s\in N},\ p_s = (p_1, \ldots, p_s, 0, \ldots),$$

$$p_n = \sum_1^n p_i e_i.$$

Această corespondenţă este continuă în ambele sensuri şi deci spaţiile sînt izomorfe topologic.

**3.** Din cele stabilite mai sus rezultă că problema s-a redus la construcţia unei probabilităţi pe spaţiul Banach $X(E)$. În adevăr, punînd pentru orice mulţime

$$A \in K(X(E)),\quad P(A) = P^*(A'),$$

unde $A'$ este $f(A)$ şi $P$ este o probabilitate pe $K(X(E))$ iar $f$ este corespondenţa de la $E$ la $X(E)$. Mulţimile $A'$ formează o $\sigma$-algebră pe $E$.

Pentru construcția unei măsuri pe $X$ vom alege un șir de spații de dimensiuni 1,2, ..., subspații ale lui $X$, și pe fiecare o măsură $\nu_n$ astfel ca mulțimile măsurabile $\nu_n$ să conțină mulțimile boreliene ale lui $R^{(n)}$ din $\mathcal{B}^{(n)}$. Presupunem că măsurile $\nu_n$ satisfac condițiile de compatibilitate ale lui Kolmogorov:

$$1.\ \nu(R_n) = 1,$$

$$2.\ \nu_{n+1}(C^{n+1}(\mathcal{B}^{(n)})) = \nu_n(\mathcal{B}^{(n)}),$$

unde $C^{n+1}$ înseamnă mulțimi cilindrice din $R^{(n+1)}$.
În baza teoremei lui A. N. Kolmogorov există o măsură unică definită pe $X$ cu proprietățile:

$$1.\ \nu(X) = 1,$$

$$2.\ \nu(C^{\infty}(\mathcal{B}^{(n)})) = \nu_n(\mathcal{B}^{(n)}).$$

PROPOZIȚIA 3.1. *$X(E)$ este $\nu$-măsurabilă.*
Aceasta rezultă din faptul următor:

$$X(E) = \{p\,;\ \inf_n \sup_k \|p'_{n+k} - p'_n\| = 0\}.$$

Așa cum a arătat G. Mackey [3], în spațiile vectoriale topologice sînt importante măsurile pentru care orice mulțime deschisă este măsurabilă. După E. Mourier [4], o măsură definită pe un spațiu Banach este $L$-măsură dacă funcționalele liniare din $E^*$ sînt măsurabile. Propoziția următoare arată că măsura $\nu$ satisface condițiile de mai sus.

PROPOZIȚIA 3. 2. *$\mu$ este o $L$-măsură.*

În adevăr, pentru orice $x \in E$ există $\overline{p}_n$ astfel ca $\|\widetilde{p}_n - x\| \to 0$. Deci oricare ar fi $f \in E^*$ avem $f(\widetilde{p}_n) \to f(x)$ (convergența fiind uniformă). Dar $\widetilde{p}_n = \sum p_i(x)\, e_i$. Dacă $f_1$ este corespondența de la $E$ la $X(E)$ avem $p_i(x) = p_i(f_1^{-1}(p))$, cu $p \in X(E)$. Deci $f(\widetilde{p}_n) = \sum p_i(f_1^{-1}(p))\, f(e_i)$. Cum $p_i(f^{-1}(p))$ sînt măsurabili relativ la măsurile care definesc pe $\nu$, rezultă că $\mu$ este o $L$-măsură (am notat $\mu = P^*$).

Să considerăm spațiul cu măsură $\{E, K(E), \mu\}$. Pentru ca să avem un cîmp de probabilitate este necesar și suficient ca $\mu(E) = 1$, sau ceea ce este același lucru,

$$\nu(X(E)) = 1.$$

Se poate da o condiție necesară și suficientă ca măsura transportată prin izomorfismul de mai sus să fie o probabilitate pe spațiul $E$.

Fie pentru aceasta $\varepsilon > 0$ și să considerăm mulțimile cilindrice $C_n,\ k(\varepsilon) = \{p\,;\ p_{n+k} \in A_{n,k}(\varepsilon)\,;$ celelalte sînt presupuse în $R\}$, cu

$$A_{n,k}(\varepsilon) = \{p_{n+k}\,;\ \|p_{n+i} - p_i\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Atunci

$$X(E) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_n \bigcap_k C_{n,k}(\varepsilon),$$

şi deci

$$\nu(X(E)) = \inf_{\varepsilon} \sup_{n} \inf_{k} \nu_{n+k}(C_{n,k}(\varepsilon))$$

şi am obţinut o condiţie necesară şi suficientă ca măsura $\mu$ transportată să fie o probabilitate pe spaţiul $E$.

Se pot obţine diverse teoreme care corespund teoremelor date în [2] pentru cazul spaţiilor Banach cu bază numărabilă *).

Primită la redacţie la 10 decembrie 1961

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ В КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА


### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе указывается на возможность построения вероятностных мер в классе пространств Банаха, отделяемых, в которых любой элемент обладает единственным приближенным полиномом для каждого $n$, и множество таких полиномов является плотным.

При помощи таких полиномов строится пространство $X = \prod_{s \in I} \overset{(s)}{X}$, где $\overset{(s)}{X} = R^{\infty}$, а $R^{\infty}$ является пространством рядов действительных чисел. Показывается, что пространство с вышеуказанными свойствами может быть включено в $X$.

При помощи теоремы Колмогорова строится в $X$ мера (нормированная) и дается необходимое и достаточное условие, при котором данная мера, перенесенная в рассмотренное пространство Банаха, является нормированной.

Показывается, что построенная таким образом мера (нормированная) является $L$-мерой.


## PROBABILITÉS CONCERNANT UNE CLASSE D'ESPACES DE BANACH


### RÉSUMÉ

Ce travail se réfère à la possibilité de construire une probabilité sur une classe d'espaces de Banach séparables dont chaque élément a un polynôme d'approximation unique pour tout $n$, l'ensemble de ces polynômes étant dense.


*) Rezultatele expuse se referă într-o anumită măsură la spaţii care sînt mai generale decît cele cu bază numărabilă. Dar, după o afirmaţie a lui S. Banach că orice spaţiu Banach separabil este cu bază (problema bazei a lui Banach), ar face ca rezultatele date în [2] să fie valabile pentru această clasă de spaţii Banach. Rezultatele obţinute pînă acum nu cuprind însă toate spaţiile Banach separabile (adică afirmaţia lui Banach nu este încă verificată).

A l'aide de ces polynômes, on construit un espace $X = \prod_{s \in I} \overset{(s)}{X}$, où $\overset{(s)}{X} = R^{\infty}$, $R^{\infty}$ étant l'espace des suites de nombres réels. Il montre qu'un espace ayant les propriétés ci-dessus peut être plongé dans $X$.

Grâce au théorème de Kolmogorov, on construit sur $X$ une mesure (normée), puis on indique une condition nécessaire et suffisante pour que cette mesure, transportée sur l'espace de Banach considéré, soit une mesure normée.

On montre que cette mesure (normée) est une $L$-mesure.

## BIBLIOGRAFIE


1. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa, 1933.
2. J. KAMPE DE FÉRIET, *Mesures de probabilités sur les espaces de Banach possédant une base dénombrable*. Journ. de Math., *2*, 119–161 (1960).
3. G. MACKEY, *Borel structures in groups and their duals*. Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 83–85 (1957).
4. E. MOURIER, *Eléments aléatoires dans un espace de Banach*. Ann. Inst. H. Poincaré, **13**, 161–244 (1953).
5. M. FRÉCHET, *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancé*. Ann. Inst H. Poincaré, **10**, *4* (1950).
6. I. SINGER, Acta Sc. Math., **XVII**, *34* (1956).
7. Б. З. ВУЛИХ, *Элементы функционального анализа*. Физматгиз, Москва-Ленинград, 1958.
8. J. A. CLARKSON, *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936).
9. F. SKALORA, *Abstract martingale convergence theorems*. Pacific Journ. Math., **11**, *1* (1961).

# ÎNCOVOIEREA BARELOR PRISMATICE ORTOTROPE

DE

EMERIC DEUTSCH

## 1. INTRODUCERE

Să considerăm o bară prismatică omogenă, confecționată dintr-un material ortotrop (adică avînd în fiecare punct trei plane de simetrie elastică, ortogonale între ele) și mărginită de două plane paralele, perpendiculare pe liniile generatoare. Bara este fixată la un capăt și se găsește în echilibru cînd asupra ei acționează un sistem de forțe situat în planul celuilalt capăt. Suprafața laterală a barei este neîncărcată, iar forțele masice sînt absente.

Folosind o metodă analogă cu cea lui Milne-Thomson [1], vom arăta că tensiunile, deplasările, centrul de încovoiere, torsiunea, pot fi aflate cu ajutorul unei singure funcții — funcția de încovoiere. Merită de relevat faptul că atît originea cît și direcția axelor din planul secțiunii transversale sînt alese arbitrar.

## 2. ECUAȚII GENERALE

Ecuațiile de echilibru pentru medii elastice, în cazul absenței forțelor masice, se scriu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Relațiile dintre tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke), în cazul corpurilor ortotrope, se pot scrie [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Ae_x + He_y + Ge_z, \\ \sigma_y &= He_x + Be_y + Fe_z, \\ \sigma_z &= Ge_x + Fe_y + Ce_z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\tau_{yz} = Le_{yz}, \quad \tau_{xz} = Me_{xz}, \quad \tau_{xy} = Ne_{xy}, \tag{2.3}$$

sau, rezolvate în raport cu deformațiile specifice:

$$\begin{aligned} e_x &= A_1\sigma_x + H_1\sigma_y + G_1\sigma_z, \\ e_y &= H_1\sigma_x + B_1\sigma_y + F_1\sigma_z, \\ e_z &= G_1\sigma_x + F_1\sigma_y + C_1\sigma_z, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$e_{yz} = \frac{1}{L}\tau_{yz}, \quad e_{xz} = \frac{1}{M}\tau_{xz}, \quad e_{xy} = \frac{1}{N}\tau_{xy}. \tag{2.5}$$

Avem, evident, în notație matricială:

$$\begin{pmatrix} A_1 & H_1 & G_1 \\ H_1 & B_1 & F_1 \\ G_1 & F_1 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Constantele elastice $A_1, B_1, C_1, F_1, G_1, H_1$ sînt legate de modulii de elasticitate longitudinală $E_x, E_y, E_z$ și de coeficienții de contracție transversală $\mu_{yz}, \mu_{zy}, \mu_{zx}, \mu_{xz}, \mu_{xy}, \mu_{yx}$ [3] prin relațiile:

$$A_1 = \frac{1}{E_x}, \quad B_1 = \frac{1}{E_y}, \quad C_1 = \frac{1}{E_z},$$

$$F_1 = -\frac{\mu_{yz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zy}}{E_y}, \quad G_1 = -\frac{\mu_{zx}}{E_x} = -\frac{\mu_{xz}}{E_z}, \quad H_1 = -\frac{\mu_{xy}}{E_y} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x}.$$

Constantele elastice $L, M, N$ se numesc moduli de elasticitate transversală.

Relațiile dintre deformații specifice și deplasări sînt:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2.7}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Ecuațiile de continuitate ale lui Saint-Venant se scriu:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\,\partial z}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 e_y}{\partial x\partial z}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 e_z}{\partial x\partial y}.$$

Ecuațiile (2.10) — dacă ținem seamă de (2.1), (2.4) și (2.5) — pot fi înlocuite prin următoarele ecuații de tip Beltrami-Michell:

$$\Delta^*\tau_{yz}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left[2A_1\sigma_x+\left(2H_1+\frac{1}{N}\right)\sigma_y+\left(2G_1+\frac{1}{M}\right)\sigma_z\right]=0,$$

$$\Delta^*\tau_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left[\left(2H_1+\frac{1}{N}\right)\sigma_x+2B_1\sigma_y+\left(2F_1+\frac{1}{L}\right)\sigma_z\right]=0, \tag{2.11}$$

$$\Delta^*\tau_{xy}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\left(2G_1+\frac{1}{M}\right)\sigma_x+\left(2F_1+\frac{1}{L}\right)\sigma_y+2C_1\sigma_z\right]=0,$$

unde am notat

$$\Delta^*=\frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.12}$$

Condițiile la limită se scriu:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)+\tau_{xz}\cos(n,z)=p_{nx},\\
&\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)+\tau_{yz}\cos(n,z)=p_{ny},\\
&\tau_{xz}\cos(n,x)+\tau_{yz}\cos(n,y)+\sigma_z\cos(n,z)=p_{nz},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

unde $p_{nx}$, $p_{ny}$, $p_{nz}$ sînt componentele sarcinii exterioare ce acționează pe elementul de arie de normală $n$.

### 3. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Alegem originea $o$ arbitrar în planul secțiunii fixe iar axele sistemului tridreptunghic $oxyz$ astfel, ca axa $oz$ să fie paralelă cu generatoarele barei (fig. 1). Fie $(W_x, W_y, 0)$ componentele forței ce acționează în planul secțiunii libere $z=l$ în punctul $(x_0, y_0, l)$, $l$ fiind lungimea barei. Această forță poate fi înlocuită printr-o forță egală $(W_x, W_y, 0)$ aplicată în $o'(0, 0, l)$ și printr-un moment $\mathfrak{M}$ de-a lungul axei $oz$, dat de

$$\mathfrak{M}=x_0W_y-y_0W_x. \tag{3.1}$$

Urmînd metoda semi-inversă a lui Saint-Venant, punem

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \tag{3.2}$$

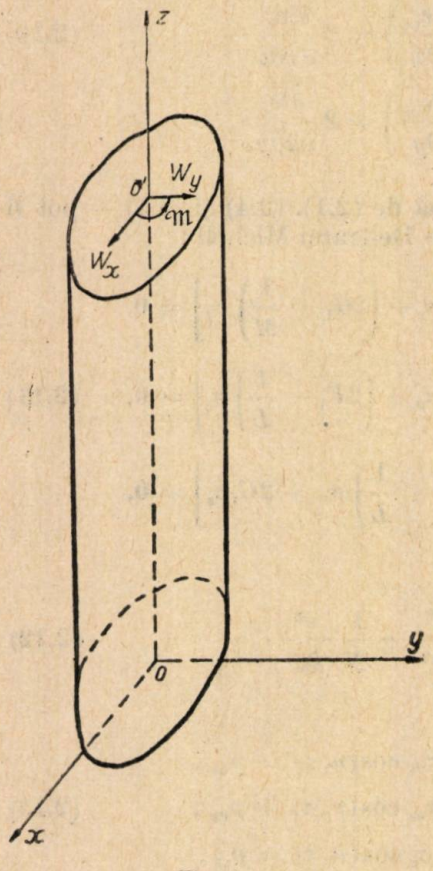



Fig. 1

Ecuațiile de echilibru (2.1) devin :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{3.4}$$

Relațiile (2.4) și (2.5) dintre tensiuni și deformații specifice devin :

$$e_x = G_1 \sigma_z, \quad e_y = F_1 \sigma_z, \quad e_z = C_1 \sigma_z, \tag{3.5}$$

$$e_{yz} = \frac{1}{L} \tau_{yz}, \quad e_{xz} = \frac{1}{M} \tau_{xz}, \tag{3.6}$$

$$e_{xy} = 0. \tag{3.7}$$

Condițiile de compatibilitate (2.9) și (2.11) devin :

$$G_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + F_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0, \tag{3.8}$$

$$F_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + C_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}, \tag{3.9}$$

$$C_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + G_1 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z}, \tag{3.10}$$

$$\left( \frac{1}{L} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xz} + \left( 2F_1 + \frac{1}{L} \right) \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0, \tag{3.11}$$

$$\left( \frac{1}{L} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{yz} + \left( 2G_1 + \frac{1}{M} \right) \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3.13}$$

Condițiile la limită (2.13) devin :

$$\tau_{xz} \cos(n, z) = p_{nx}, \qquad \tau_{yz} \cos(n, z) = p_{ny}, \tag{3.14}$$

$$\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) = p_{nz}. \tag{3.15}$$

Pe suprafața laterală avem $\cos(n, z) = 0$, $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$, astfel că aceste condiții se reduc la

$$\tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) = 0. \tag{3.16}$$

Pe suprafața bazei $z = l$, avem $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$, $\cos(n, z) = 1$, astfel că — în virtutea principiului lui Saint-Venant — condițiile (3.14) și (3.15) pot fi înlocuite prin:

$$\iint_{\sigma} \tau_{xz}\,dx\,dy = W_x, \qquad \iint_{\sigma} \tau_{yz}\,dx\,dy = W_y, \tag{3.17}$$

$$\iint_{\sigma} \sigma_z\,dx\,dy = 0, \tag{3.18}$$

$$\iint_{\sigma} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,dx\,dy = \mathfrak{M}, \tag{3.19}$$

unde cu $\sigma$ am notat secțiunea liberă $z = l$.

Exprimînd că bara întreagă se află în echilibru, obținem ecuațiile:

$$\iint_{\sigma_0} \tau_{xz}\,dx\,dy = W_x, \qquad \iint_{\sigma_0} \tau_{yz}\,dx\,dy = W_y, \tag{3.20}$$

$$\iint_{\sigma_0} \sigma_z\,dx\,dy = 0, \tag{3.21}$$

$$lW_x + \iint_{\sigma_0} x\sigma_z\,dx\,dy = 0, \qquad lW_y + \iint_{\sigma_0} y\sigma_z\,dx\,dy = 0, \tag{3.22}$$

$$\mathfrak{M} = \iint_{\sigma_0} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,dx\,dy, \tag{3.23}$$

unde cu $\sigma_0$ am notat secțiunea extemității fixe $z = 0$.

## 4. TENSIUNEA NORMALĂ

Din ecuația (3.4), ținînd seamă de (3.3), deducem cu ușurință

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \tag{4.1}$$

iar din (3.8), (3.9) și (3.10) găsim

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0. \tag{4.2}$$

Din (3.13), (4.1) și (4.2), obținem prin integrare

$$\sigma_z = (z - l)(\alpha_x x + \alpha_y y + \beta), \tag{4.3}$$

unde $\alpha_x$, $\alpha_y$, $\beta$ sînt constante deocamdată nedeterminate.

Să introducem variabilele complexe $Z, \bar{Z}$ definite de:

$$\begin{aligned} Z &= K\sqrt{L}x + iK\sqrt{M}y, \\ \bar{Z} &= K\sqrt{L}x - iK\sqrt{M}y, \end{aligned} \tag{4.4}$$

unde

$$K = \sqrt{\frac{L+M}{2LM}}. \tag{4.5}$$

Introducînd transformarea

$$\begin{aligned} X &= K\sqrt{L}x, \\ Y &= K\sqrt{M}y, \end{aligned} \tag{4.6}$$

numărul complex $Z$ poate fi evident considerat ca afixul punctului $(X, Y)$. Prin această transformare, secțiunea $\sigma$ a barei (fig. 2) se transformă într-un

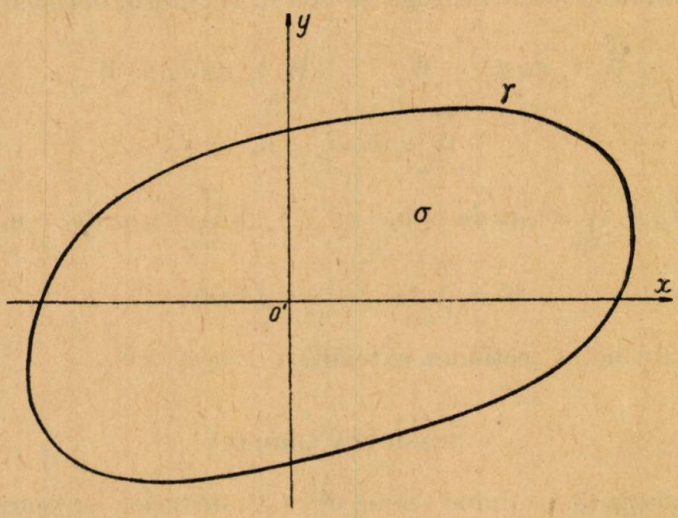



Fig. 2

domeniu $\Sigma$ din planul $Z$ (fig. 3), conturului $\gamma$ al lui $\sigma$, corespunzîndu-i conturul $\Gamma$ al lui $\Sigma$.

Să notăm

$$\alpha = \frac{\alpha_x}{K\sqrt{L}} + \frac{i\alpha_y}{K\sqrt{M}}. \tag{4.7}$$

Relația (4.3) se poate scrie:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(z - l)(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta). \tag{4.8}$$

Să trecem la determinarea constantelor $\alpha$ și $\beta$. Condițiile (3.18) și (3.21) ne conduc la aceeași relație:

$$\iint_{\sigma} (\alpha\overline{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta)\,dx\,dy = 0.$$

De aici deducem

$$\beta = -\frac{\alpha\overline{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G}{2}, \tag{4.9}$$

unde

$$Z_G = K\sqrt{L}\,x_G + iK\sqrt{M}\,y_G, \tag{4.10}$$

$(x_G, y_G)$ fiind centrul de greutate al secțiunii $\sigma$. Evident $Z_G$ este centrul de greutate al domeniului $\Sigma$.

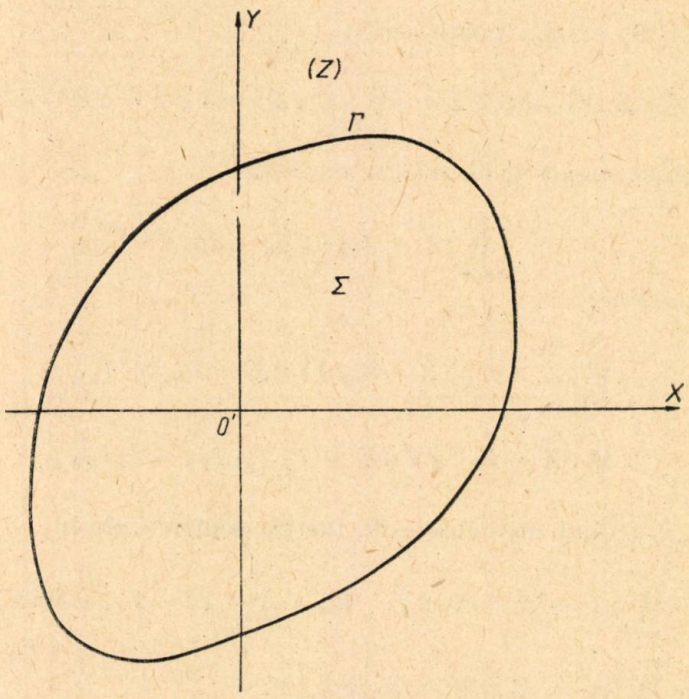



Fig. 3

Relația (4.8) devine:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(z - l)\,[\alpha(\overline{Z} - \overline{Z}_G) + \bar{\alpha}(Z - Z_G)]. \tag{4.11}$$

Constanta complexă $\alpha$ se determină cu ajutorul ecuațiilor (3.22). Notînd

$$W = K\sqrt{L}\,W_x + iK\sqrt{M}\,W_y, \tag{4.12}$$

ecuațiile (3.22) pot fi înlocuite prin

$$lW + \iint_{\sigma_0} Z\sigma_z \, dx\, dy = 0,$$

sau, ținînd seamă de (4.11) și de faptul că pe $\sigma_0$ avem $z = 0$,

$$2W - \iint_{\sigma} Z[\alpha(\overline{Z} - \overline{Z}_G) + \overline{\alpha}(Z - Z_G)]\, dx\, dy = 0. \tag{4.13}$$

Întrucît expresia de sub semnul integralei duble nu mai depinde de $z$, $\sigma_0$ poate fi înlocuit cu $\sigma$. Dar, din (4.6) avem

$$dX\, dY = K^2 \sqrt{LM}\, dx\, dy, \tag{4.14}$$

astfel că (4.13) se mai poate scrie:

$$\alpha \iint_{\Sigma} (\overline{Z} - \overline{Z}_G)(Z - Z_G)\, dX\, dY + \overline{\alpha} \iint_{\Sigma} (Z - Z_G)^2\, dX\, dY = 2K^2 \sqrt{LM}\, W, \tag{4.15}$$

unde am ținut seamă și de relația evidentă

$$\iint_{\Sigma} (Z - Z_G)\, dX\, dY = 0. \tag{4.16}$$

Avem însă:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (Z - Z_G)(\overline{Z} - \overline{Z}_G)\, dX\, dY &= I_{XX} + I_{YY}, \\ \iint_{\Sigma} (Z - Z_G)^2\, dX\, dY &= I_{XX} - I_{YY} + 2iI_{XY}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$I_{XX}$, $I_{YY}$, $I_{XY}$ fiind momentele de inerție centrale ale lui $\Sigma$:

$$\begin{aligned} I_{XX} &= \iint_{\Sigma} (X - X_G)^2\, dX\, dY, \quad I_{YY} = \iint_{\Sigma} (Y - Y_G)^2\, dX\, dY, \\ I_{XY} &= \iint_{\Sigma} (X - X_G)(Y - Y_G)\, dX\, dY. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Din (4.15) găsim:

$$\alpha = \frac{K^2 \sqrt{LM}}{2(I_{XX} I_{YY} - I_{XY}^2)} [W(I_{XX} + I_{YY}) - \overline{W}(I_{XX} - I_{YY} + 2iI_{XY})]. \tag{4.19}$$

Să observăm că avem

$$I_{XX} = K^4 L^{3/2} M^{1/2} I_{xx}, \quad I_{YY} = K^4 L^{1/2} M^{3/2} I_{yy}, \quad I_{XY} = K^4 LM I_{xy}, \tag{4.20}$$

$I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{xy}$ fiind momentele de inerție centrale ale secțiunii $\sigma$:

$$I_{xx}=\iint_{\sigma}(x-x_G)^2\,dx\,dy, \qquad I_{yy}=\iint_{\sigma}(y-y_G)^2\,dx\,dy,$$
$$I_{xy}=\iint_{\sigma}(x-x_G)(y-y_G)\,dx\,dy. \tag{4.21}$$

Relația (4.11), cu (4.19), determină complet tensiunea normală $\sigma_z$.

### 5. TENSIUNILE TANGENȚIALE $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$

Să observăm în primul rînd că din (3.3) rezultă că tensiunile tangențiale $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ sînt independente de $z$. Introducînd operatorii

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X}-i\frac{\partial}{\partial Y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{X}}+i\frac{\partial}{\partial Y}\right) \tag{5.1}$$

și ținînd seamă de (4.6), deducem:

$$\frac{\partial}{\partial x}=K\sqrt{L}\left(\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}=iK\sqrt{M}\left(\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}\right),$$
$$\frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4K^2\frac{\partial^2}{\partial Z\,\partial \bar{Z}}, \tag{5.2}$$

astfel că ecuațiile (3.11) și (3.12) se pot scrie:

$$4K^2\frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial Z\,\partial \bar{Z}}+\left(2F_1+\frac{1}{L}\right)\alpha_x=0,$$
$$4K^2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial Z\,\partial \bar{Z}}+\left(2G_1+\frac{1}{M}\right)\alpha_y=0, \tag{5.3}$$

unde am ținut seamă și de (4.3).

Să introducem notația

$$T(Z,\bar{Z})=K\sqrt{L}\,\tau_{xz}-iK\sqrt{M}\,\tau_{yz}. \tag{5.4}$$

Ecuațiile (5.3) pot fi înlocuite cu

$$4\frac{\partial^2 T}{\partial Z\,\partial \bar{Z}}+2\bar{b}+\bar{\alpha}=0, \tag{5.5}$$

unde am notat

$$b=\frac{F_1\sqrt{L}\,\alpha_x+iG_1\sqrt{M}\,\alpha_y}{K}. \tag{5.6}$$

Avem, ținînd seamă de (4.7):

$$b = \frac{F_1 L + G_1 M}{2}\,\alpha + \frac{F_1 L - G_1 M}{2}\,\bar{\alpha}. \tag{5.7}$$

Făcînd uz de (4.11), (5.2) și (5.4), ecuația de echilibru (3.4) se scrie:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial \overline{Z}} + \frac{1}{2}\left[\alpha(\overline{Z} - \overline{Z}_G) + \bar{\alpha}(Z - Z_G)\right] = 0. \tag{5.8}$$

Ecuația (5.5) se mai poate scrie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Z\,\partial \overline{Z}} + \bar{c} = 0, \tag{5.9}$$

cu

$$c = \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{4}\,\alpha. \tag{5.10}$$

Din (5.9) obținem:

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{Z}} + \bar{c}Z + \overline{T_0(Z)} = 0, \tag{5.11}$$

$T_0(Z)$ fiind o funcție numai de $Z$, deocamdată nedeterminată. Înlocuind (5.11) în (5.8), deducem:

$$\bar{c}Z + T_0(Z) - \frac{1}{2}\,\bar{\alpha}Z + \frac{1}{2}\,(\alpha\overline{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G) =$$

$$= -\,c\overline{Z} - \overline{T_0(Z)} + \frac{1}{2}\,\alpha\overline{Z} = k_1, \qquad (k_1 = \text{const.}),$$

deoarece membrul întîi nu depinde de $\overline{Z}$ iar cel de-al doilea nu depinde de $Z$. Din aceste relații găsim:

$$\begin{aligned} T_0(Z) &= k_1 - \bar{c}Z + \frac{1}{2}\,\bar{\alpha}Z - \frac{1}{2}\,(\alpha\overline{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G), \\ \overline{T_0(Z)} &= -\,k_1 - c\overline{Z} + \frac{1}{2}\,\alpha\overline{Z}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Pentru ca aceste expresii să fie de fapt complex conjugate, este necesar ca

$$k_1 = \frac{1}{4}\,(\alpha\overline{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G) - i\tau\sqrt{LM},$$

$\tau$ fiind o constantă reală, deocamdată nedeterminată.

Din (5.12) avem:

$$\overline{T_0(Z)} = -\,c\overline{Z} + \frac{1}{2}\,\alpha\overline{Z} - \frac{1}{4}\,(\alpha\overline{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G) + i\tau\sqrt{LM},$$

care înlocuit în (5.11) ne dă:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{Z}} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{2}\alpha\right)\bar{Z} - \frac{1}{2}\left(\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\right)Z + \\ + \frac{1}{4}(\alpha \bar{Z}_G + \bar{\alpha} Z_G) - i\tau\sqrt{LM}. \tag{5.13}$$

De aici obținem

$$T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - p\bar{Z} - p\bar{Z}^2 - rZ\bar{Z}], \tag{5.14}$$

unde am notat:

$$p = i\tau - \frac{1}{4\sqrt{LM}}(\alpha \bar{Z}_G + \bar{\alpha} Z_G), \tag{5.15}$$

$$q = \frac{1}{4\sqrt{LM}}\left(\frac{1}{2}\alpha - b\right), \qquad r = \frac{1}{2\sqrt{LM}}\left(\frac{1}{2}\bar{\alpha} + \bar{b}\right). \tag{5.16}$$

Funcția $\Phi(Z)$ se numește funcția încovoierii. Dacă tensiunile sînt finite și continue, funcția $\Phi(Z)$ este olomorfă în domeniul $\Sigma$. Determinarea tensiunilor tangențiale se reduce astfel la aflarea funcției $\Phi(Z)$.

Condiția la limită pe care trebuie să o satisfacă funcția $\Phi(Z)$ se obține din (3.16), relație care se mai poate scrie:

$$\tau_{xz}dy - \tau_{yz}dx = 0 \qquad \text{pe } \Gamma, \tag{5.17}$$

sau, ținînd seamă de (4.4) și (5.4):

$$T\,dZ - \bar{T}\,d\bar{Z} = 0 \qquad \text{pe } \Gamma. \tag{5.18}$$

Înlocuind aici expresia lui $T$ dată de (5.14), obținem pentru funcția $\Phi(Z)$ condiția la limită:

$$\Phi(Z)dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = (p + q\bar{Z} + rZ)\bar{Z}\,dZ - (\bar{p} + \bar{q}Z + \bar{r}\bar{Z})Z\,d\bar{Z} \quad \text{pe } \Gamma. \tag{5.19}$$

Rămîne să mai arătăm că tensiunile tangențiale $\tau_{xz}$ și $\tau_{yz}$ date de (5.14), satisfac și ecuațiile (3.17) și (3.20). Deoarece $\tau_{xz}$ și $\tau_{yz}$ nu depind de $z$, este suficient să arătăm că ecuațiile (3.17) sînt satisfăcute. Făcînd uz de notațiile (4.12) și (5.4), aceste ecuații pot fi înlocuite prin

$$\iint_\sigma T(Z, \bar{Z})\,dx\,dy = \overline{W}. \tag{5.20}$$

Pentru a demonstra această relație, înmulțim relația (5.19) cu $\bar{Z}$ și integrăm de-a lungul conturului $\Gamma$. Obținem:

$$\int_\Gamma \bar{Z}\Phi(Z)dZ = \int_\Gamma (p + q\bar{Z} + rZ)\,\bar{Z}^2 dZ - \int_\Gamma (\bar{p} + \bar{q}Z + \bar{r}\bar{Z})Z\bar{Z}\,d\bar{Z}.$$

Transformînd aceste integrale curbilinii în integrale duble, cu ajutorul formulei lui Stokes

$$\int_\Gamma f(Z,\bar{Z})\,dZ + g(Z,\bar{Z})\,d\bar{Z} = 2i\iint_\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{Z}} - \frac{\partial g}{\partial Z}\right) dX\,dY, \tag{5.21}$$

obținem :

$$\iint_\Sigma \Phi(Z)dXdY = \iint_\Sigma [(2p+\bar{p})\bar{Z} + (3q+\bar{r})\bar{Z}^2 + (2\bar{q}+2r)Z\bar{Z}]dX\,dY,$$

de unde, ținînd seamă de (5.15) și (5.16) :

$$\sqrt{LM}\iint_\Sigma [\Phi(Z) - p\bar{Z} - q\bar{Z}^2 - rZZ]\,dX\,dY =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Sigma \bar{Z}[\bar{\alpha}(Z - Z_G) + \alpha(\bar{Z} - \bar{Z}_G)]\,dX\,dY$$

care, în virtutea relațiilor (4.13), (4.14) și (5.14), se reduce la (5.20).

Astfel, relațiile (5.14) și (5.19) determină tensiunile tangențiale $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$, abstracție făcînd de valoarea constantei reale $\tau$. Cu determinarea lui $\tau$ ne ocupăm în paragraful următor și în § 10.

## 6. DETERMINAREA CONSTANTEI $\mathfrak{T}$

Determinarea constantei $\tau$ se face cu ajutorul relației (3.19) sau (3.23), ele fiind identice deoarece $\tau_{xz}$ și $\tau_{yz}$ nu depind de $z$.

Făcînd uz de (4.4), (4.14) și (5.4), ecuația (3.19) se mai poate scrie :

$$2K^4LM\mathfrak{M} = i\iint_\Sigma (ZT - \overline{ZT})\,dX\,dY, \tag{6.1}$$

sau, ținînd seamă de (5.14) :

$$K^4LM\mathfrak{M} = -\,\mathcal{I}m\iint_\Sigma Z[\Phi(Z) - p\bar{Z} - q\bar{Z}^2 - rZ\bar{Z}]\,dX\,dY. \tag{6.2}$$

Notăm :

$$I = \iint_\Sigma Z\bar{Z}\,dX\,dY = -\frac{1}{4}i\int_\Gamma Z\bar{Z}^2\,dZ, \tag{6.3}$$

$$J = 6i\iint_\Sigma Z\bar{Z}^2 dX\,dY = \int_\Gamma Z\bar{Z}^3\,dZ, \tag{6.4}$$

$$\Lambda = 2i\iint_\Sigma Z\Phi(Z)\,dX\,dY = \int_\Gamma Z\bar{Z}\Phi(Z)\,dZ, \tag{6.5}$$

unde am folosit formula (5.21). Să observăm că $I$ este momentul de inerție

polar al domeniului $\Sigma$ în raport cu originea $O'$. Cu aceste notații, relația (6.2), după unele calcule, devine:

$$K^4 \sqrt{LM}\, \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\, \Lambda + \tau I + \frac{1}{48\sqrt{LM}} \mathcal{R}e[(\alpha + 6b)J]. \tag{6.6}$$

Această relație determină valoarea lui $\tau$, întrucît momentul $\mathfrak{M}$ este cunoscut din (3.1). Această ecuație (3.1), cu notația

$$Z_0 = K\sqrt{L}\, x_0 + iK\sqrt{M}\, y_0, \tag{6.7}$$

se mai poate scrie:

$$2iK^2 \sqrt{LM}\, \mathfrak{M} = W\overline{Z}_0 - \overline{W}Z_0. \tag{6.8}$$

Din (6.8) observăm că avem

$$\overline{Z}_0 = 2iK^2 \sqrt{LM}\, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial W}. \tag{6.9}$$

## 7. CENTRUL DE ÎNCOVOIERE

Fiecare element de arie dintr-o secțiune transversală se rotește în planul său cu un unghi

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{7.1}$$

Derivata lui $\Omega$ în raport cu $z$ este:

$$\omega = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right),$$

sau, ținînd seamă de (3.6), (5.2) și (5.4), obținem succesiv:

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{M}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) = \frac{i}{2\sqrt{LM}}\left(\frac{\partial T}{\partial \overline{Z}} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial Z}\right),$$

care în virtutea lui (5.13) devine:

$$\omega = \tau + \frac{i}{2\sqrt{LM}}(b\overline{Z} - \overline{b}Z). \tag{7.2}$$

Mărimea $\omega$ se numește răsucire locală [4]. Valoarea medie a răsucirii locale pe secțiunea barei este

$$\omega_m = \tau + \frac{i}{2\sqrt{LM}}(b\overline{Z}_G - \overline{b}Z_G), \tag{7.3}$$

adică coincide cu răsucirea locală în centrul de greutate al secțiunii.

Centrul de încovoiere este poziția punctului de aplicație al forței $(W_x, W_y, 0)$ pentru care răsucirea locală medie este nulă.

Din relația (7.3) rezultă că aceasta are loc pentru

$$\tau = \tau_c = \frac{i}{2\sqrt{LM}}(\bar{b}Z_G - b\bar{Z}_G). \tag{7.4}$$

Valoarea corespunzătoare a lui $p$ se obține din (5.15). Se găsește

$$p = p_c = -2q\bar{Z}_G - rZ_G. \tag{7.5}$$

Notînd cu $(x_c, y_c, l)$ coordonatele centrului de încovoiere și punînd

$$Z_c = K\sqrt{L}\,x_c + iK\sqrt{M}\,y_c, \tag{7.6}$$

obținem din (6.9)

$$\bar{Z}_c = 2iK^2\sqrt{LM}\,\frac{\partial \mathfrak{M}_c}{\partial W}, \tag{7.7}$$

unde $\mathfrak{M}_c$ reprezintă valoarea lui $\mathfrak{M}$ corespunzătoare lui $\tau$ dat de (7.4).

## 8. DEPLASĂRILE

Ținînd seamă de (3.5), (3.6) și (3.7), relațiile (2.8) dintre deformațiile specifice și deplasări, devin:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} = G_1\sigma_z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = F_1\sigma_z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = C_1\sigma_z, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{M}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{L}\tau_{yz}.\end{gathered} \tag{8.1}$$

Făcînd uz de (4.4), (4.8), (5.2), (5.4) și notînd

$$\frac{u}{K\sqrt{L}} + i\,\frac{v}{K\sqrt{M}} = V(Z, \bar{Z}, z), \tag{8.2}$$

$$P = \frac{LF_1 + MG_1}{L + M}, \quad Q = -\frac{LF_1 - MG_1}{L + M}, \tag{8.3}$$

sistemul (8.1), după unele transformări, devine:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Z}} = P(z - l)(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta), \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial \bar{Z}} = \frac{Q}{2}(z - l)(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta), \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + 2\frac{\partial w}{\partial Z} = \frac{2}{L+M} T(Z, \bar{Z}), \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} C_1(z-l)(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta). \tag{8.7}$$

Derivînd ecuația (8.6) în raport cu $\bar{Z}$ și egalînd părțile reale, obținem :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Z}}\right) + 4\frac{\partial^2 w}{\partial Z \partial \bar{Z}} = \frac{2}{L+M}\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{Z}} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z}\right),$$

sau, ținînd seamă de (5.8) și (8.4) :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial Z \partial \bar{Z}} = -R(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta), \tag{8.8}$$

unde

$$R = \frac{LF_1 + MG_1 + 1}{4(L+M)}. \tag{8.9}$$

Din (8.7) găsim :

$$w = \frac{1}{4} C_1(z-l)^2(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta) + w_0(Z, \bar{Z}), \tag{8.10}$$

unde $w_0(Z, \bar{Z})$ este o funcție deocamdată nedeterminată. Substituirea în (8.8) ne conduce la

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial Z \partial \bar{Z}} = -R(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta). \tag{8.11}$$

Din (8.11), găsim :

$$w_0(Z, \bar{Z}) = -\frac{1}{2} RZ\bar{Z}(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 4\beta) + w_1(Z) + \overline{w_1(Z)}, \tag{8.12}$$

unde am ținut seamă că $w_0(Z, \bar{Z})$ trebuie să fie o mărime reală. Funcția $w_1(Z)$ este deocamdată nedeterminată. Relația (8.10) devine :

$$w = \frac{1}{4} C_1(z-l)^2(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 2\beta) - \frac{1}{2} RZ\bar{Z}(\alpha\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + 4\beta) + \\ + w_1(Z) + \overline{w_1(Z)}. \tag{8.13}$$

Din ecuația (8.5) găsim

$$V(Z, \bar{Z}, z) = \frac{1}{2} Q(z-l)\left(\frac{\alpha}{2}\bar{Z}^2 + \bar{\alpha}Z\bar{Z} + 2\beta\bar{Z}\right) + V_0(Z, z), \tag{8.14}$$

$V_0(Z, z)$ fiind o funcție deocamdată nedeterminată. Înlocuind (8.14) în (8.4), deducem :

$$\frac{\partial V_0}{\partial Z} + \frac{1}{2}\alpha QZ(z-l) - P(z-l)(\bar{\alpha}Z + \beta) =$$

$$= -\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{Z}} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}Q\bar{Z}(z-l) + P(z-l)(\alpha\bar{Z} + \beta) = if(z), \qquad (8.15)$$

deoarece un membru este independent de $\bar{Z}$ iar celălalt de $Z$ și cele două expresii sînt complex conjugate. Aici $f(z)$ este o funcție reală de $z$, deocamdată nedeterminată. Din (8.15) găsim

$$\frac{\partial V_0}{\partial Z} = (z-l)\left(\bar{\alpha}PZ - \frac{1}{2}\alpha QZ + \beta P\right) + if(z),$$

de unde

$$V_0(Z, z) = (z-l)\left(\frac{1}{2}\bar{\alpha}PZ^2 - \frac{1}{4}\alpha QZ^2 + \beta PZ\right) + iZf(z) + g(z), \qquad (8.16)$$

$g(z)$ fiind o funcție de $z$, deocamdată nedeterminată. Înlocuind (8.16) în (8.14), obținem :

$$V(Z, \bar{Z}, z) = (z-l)\left(\frac{1}{4}\alpha Q\bar{Z}^2 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}QZ\bar{Z} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}PZ^2 - \frac{1}{4}\alpha QZ^2 + \beta Q\bar{Z} + \beta PZ\right) +$$

$$+ iZf(z) + g(z). \qquad (8.17)$$

Înlocuind acum (5.14), (8.13) și (8.17) în ecuația (8.6), găsim :

$$\frac{1}{4}\bar{\alpha}QZ^2 + \frac{1}{2}\alpha QZ\bar{Z} + \frac{1}{2}\alpha P\bar{Z}^2 - \frac{1}{4}\bar{\alpha}Q\bar{Z}^2 + \beta QZ + \beta P\bar{Z} - iZf'(z) +$$

$$+ \bar{g}'(z) + \frac{1}{2}\bar{\alpha}C_1(z-l)^2 - R(\alpha\bar{Z}^2 + 2\bar{\alpha}Z\bar{Z} + 4\beta\bar{Z}) + 2w_1'(Z) =$$

$$= \frac{1}{K^2\sqrt{LM}}[\Phi(Z) - p\bar{Z} - q\bar{Z}^2 - rZ\bar{Z}],$$

sau, ținînd seamă de (4.9), (5.6), (5.15), (5.16), (8.3), (8.9) și efectuînd reducerile :

$$\frac{1}{4}\bar{\alpha}QZ^2 + \beta QZ - i\bar{Z}f'(z) + \bar{g}'(z) + \frac{1}{2}\bar{\alpha}C_1(z-l)^2 + 2w_1'(Z) +$$

$$+ \frac{i\tau\bar{Z}}{K^2\sqrt{LM}} = \frac{1}{K^2\sqrt{LM}}\Phi(Z),$$

de unde

$$\frac{1}{4}\bar{\alpha}QZ^2+\beta QZ+2w_1(Z)-\frac{1}{K^2\sqrt{LM}}\Phi(Z)=$$

$$=i\bar{Z}f'(z)-\bar{g}'(z)-\frac{1}{2}\bar{\alpha}C_1(z-l)^2-\frac{i\tau\bar{Z}}{K^2\sqrt{LM}}=k_2,\quad (k_2=\text{const.}),\tag{8.18}$$

deoarece membrul întîi nu depinde de $\bar{Z}$ şi $z$ iar membrul al doilea nu depinde de $Z$. Din (8.18) deducem:

$$\begin{aligned}w_1(Z)&=\frac{1}{2K^2\sqrt{LM}}\int\Phi(Z)\,dZ-\frac{1}{24}\bar{\alpha}QZ^3-\frac{1}{2}\beta QZ^2+\\&+\frac{1}{2}k_2Z+k_3,\qquad (k_3=\text{const.})\\f'(z)&=\frac{\tau}{K^2\sqrt{LM}},\\\bar{g}'(z)&=-\frac{1}{2}\bar{\alpha}C_1(z-l)^2-k_2,\end{aligned}\tag{8.19}$$

de unde

$$f(z)=\frac{\tau}{K^2\sqrt{LM}}z+k_4,\qquad (k_4=\text{const.}),\tag{8.20}$$

$$g(z)=-\frac{1}{6}\alpha C_1(z-l)^3-k_2z+k_5,\quad (k_5=\text{const.}).\tag{8.21}$$

Substituind (8.19), (8.20), (8.21) în (8.13) şi (8.17) şi neglijînd termenii care reprezintă o deplasare rigidă, obţinem:

$$V(Z,\bar{Z},z)=(z-l)\left(\frac{1}{4}\alpha Q\bar{Z}^2+\frac{1}{2}\bar{\alpha}QZ\bar{Z}+\frac{1}{2}\bar{\alpha}PZ^2-\frac{1}{4}\alpha QZ^2+\right.$$

$$\left.+\beta Q\bar{Z}+\beta PZ\right)+\frac{i\tau}{K^2\sqrt{LM}}zZ-\frac{1}{6}\alpha C_1(z-l)^3,\tag{8.22}$$

$$\begin{aligned}w(Z,\bar{Z},z)&=\frac{1}{4}C_1(z-l)^2(\alpha\bar{Z}+\bar{\alpha}Z+2\beta)-\\&-\frac{1}{2}RZ\bar{Z}(\alpha\bar{Z}+\bar{\alpha}Z+4\beta)+\frac{1}{2K^2\sqrt{LM}}[\Psi(Z)+\overline{\Psi(Z)}]-\\&-\frac{1}{24}Q(\bar{\alpha}Z^3+\alpha\bar{Z}^3)-\frac{1}{2}\beta Q(Z^2+\bar{Z}^2),\end{aligned}\tag{8.23}$$

unde $\Psi(Z)$ reprezintă integrala nedefinită a lui $\Phi(Z)$.

## 9. TORSIUNEA

Să considerăm cazul particular al torsiunii, adică cazul cînd

$$W_x = W_y = 0, \qquad \mathfrak{M} \neq 0. \tag{9.1}$$

Din (4.12) rezultă $W = 0$, iar din (4.17) şi apoi din (4.9) şi (5.6)

$$\alpha = \beta = b = 0. \tag{9.2}$$

Din (5.15), (5.16), avem

$$p = i\tau, \qquad q = r = 0. \tag{9.3}$$

Din (4.11) rezultă că tensiunea normală $\sigma_z$ este identic nulă, iar din (5.14) deducem pentru tensiunile tangenţiale

$$T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - i\tau\bar{Z}], \tag{9.4}$$

unde $\Phi(Z)$ — după cum rezultă din (5.19) — satisface condiţia la limită

$$\Phi(Z)\,dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = i\tau(\bar{Z}\,dZ + Z\,d\bar{Z}) \quad \text{pe } \Gamma. \tag{9.5}$$

Formula (7.2) care ne dă răsucirea locală devine

$$\omega = \tau,$$

adică răsucirea locală este constantă. Formula (6.6) care ne dă valoarea lui $\tau$ devine :

$$K^4 \sqrt{LM}\,\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e\,\Lambda + \tau I. \tag{9.6}$$

Formulele (8.22) şi (8.23) care dau deplasările se pot scrie :

$$V = \frac{i\tau}{K^2\sqrt{LM}}\,zZ, \tag{9.7}$$

$$w = \frac{1}{2K^2\sqrt{LM}}\,[\Psi(Z) + \overline{\Psi(Z)}], \tag{9.8}$$

unde $\Psi(Z)$ reprezintă, ca mai înainte, integrala nedefinită a lui $\Phi(Z)$. Din (9.7), ţinînd seamă de (4.4) şi (8.2), găsim

$$u = -\tau zy, \qquad v = \tau zx. \tag{9.9}$$

Să arătăm acum că în acest caz al problemei de torsiune, funcţia

$$F(Z) = \frac{1}{\tau}\,\Psi(Z) = \frac{1}{\tau}\int \Phi(Z)\,dZ, \tag{9.10}$$

reprezintă funcţia complexă a torsiunii [4], [5], corespunzătoare domeniului $\Sigma$. Punînd

$$F(Z) = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y), \tag{9.11}$$

condiția la limită (9.5) devine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} d\bar{Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y} dX = \frac{1}{2} d(Z\bar{Z}) \qquad \text{pe } \Gamma, \tag{9.12}$$

de unde rezultă afirmația făcută.

Relația (9.7) devine

$$T(Z, \bar{Z}) = \tau \sqrt{LM}\,[F'(Z) - i\bar{Z}]. \tag{9.13}$$

Notînd, ca de obicei

$$D_0 = \iint_{\Sigma} \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \varphi}{dX} \right) dX\, dY = - \mathcal{R}e \int_{\Gamma} \varphi \bar{Z}\, dZ, \tag{9.14}$$

din (6.5) deducem $\Lambda + \bar{\Lambda} = 4\tau D_0$, astfel că (9.6) devine

$$K^4 \sqrt{LM}\, \mathfrak{M} = \tau D. \tag{9.15}$$

Aici $D = I + D_0$ este rigiditatea geometrică la torsiune a domeniului $\Sigma$.

Deplasarea $w$ în direcția axei $Oz$, dată de (9.8), se mai poate scrie:

$$w = \frac{\tau}{K^2 \sqrt{LM}} \varphi(X, Y). \tag{9.16}$$

## 10. DETERMINAREA CENTRULUI DE ÎNCOVOIERE CU AJUTORUL FUNCȚIEI DE TORSIUNE $\varphi(X, Y)$

În acest paragraf, vom arăta cum se poate determina centrul de încovoiere al unei bare ortotrope fără a cunoaște funcția încovoierii $\Phi(Z)$, ci cunoscînd doar valorile pe contur ale funcției de torsiune $\varphi(X, Y)$ corespunzătoare domeniului $\Sigma$. Pentru aceasta, este suficient să găsim o formulă echivalentă cu (6.6), dar care să nu conțină funcția $\Phi(Z)$; relațiile (7.4) și (7.7) ne vor da apoi centrul de încovoiere.

În formula (6.6), funcția încovoierii $\Phi(Z)$ apare numai în termenul $\mathcal{R}e\, \Lambda$. Din (6.5) avem însă:

$$\Lambda + \bar{\Lambda} = 4\, \mathcal{R}e \left( i \iint_{\Sigma} Z \Phi(Z)\, dX\, dY \right) = - 4\, \mathcal{I}m \iint_{\Sigma} Z\, \Phi(Z)\, dX\, dY, \tag{10.1}$$

sau, notînd $\Psi_1(X, Y) = \mathcal{R}e\, \Psi(Z) = \mathcal{R}e \int \Phi(Z) dZ$ și aplicînd formula lui

Green, obținem succesiv :

$$\Lambda + \bar{\Lambda} = -4\iint_{\Sigma}\left(Y\frac{\partial\Psi_1}{\partial X} - X\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\right)dX\,dY =$$

$$= -4\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial(Y\Psi_1)}{\partial X} - \frac{\partial(X\Psi_1)}{\partial Y}\right]dX\,dY =$$

$$= -4\int_{\Gamma}\Psi_1(X\,dX + Y\,dY). \tag{10.2}$$

Ținînd seamă acum de (9.12) și aplicînd o proprietate cunoscută a unei perechi de funcții armonice, avem din (10.2)

$$\Lambda + \bar{\Lambda} = -4\int_{\Gamma}\Psi_1\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds = -4\int_{\Gamma}\varphi\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,ds. \tag{10.3}$$

Observînd că condiția la limită (5.19) se mai poate scrie

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,ds = \mathcal{I}m(p\bar{Z} + q\bar{Z}^2 + rZ\bar{Z})\,dZ \qquad \text{pe } \Gamma,$$

relația (10.3) devine :

$$\Lambda + \bar{\Lambda} = -4\int_{\Gamma}\varphi\,\mathcal{I}m(p\bar{Z} + q\bar{Z}^2 + rZ\bar{Z})\,dZ. \tag{10.4}$$

Ținînd seamă de (5.15) și apoi de (9.14), avem :

$$\int_{\Gamma}\varphi\,\mathcal{I}m\,p\bar{Z}\,dZ = \mathcal{I}m\int_{\Gamma}\varphi\,p\bar{Z}\,dZ = \tau\,\mathcal{R}e\int_{\Gamma}\varphi\,\bar{Z}\,dZ -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{LM}}(\alpha\bar{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G)\,\mathcal{I}m\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}\,dZ =$$

$$= -\tau D_0 - \frac{1}{4\sqrt{LM}}(\alpha\bar{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G)\,\mathcal{I}m\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}\,dZ,$$

astfel că (10.4) devine :

$$\Lambda + \bar{\Lambda} = 4\tau D_0 + \frac{1}{\sqrt{LM}}(\alpha\bar{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G)\,\mathcal{I}m\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}\,dZ -$$

$$-4\,\mathcal{I}m\,q\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}^2\,dZ - 4\,\mathcal{I}m\,r\int_{\Gamma}\varphi\,Z\bar{Z}\,dZ.$$

Din (6.6) găsim acum :

$$K^4\sqrt{LM}\mathfrak{M} = \tau D + \frac{1}{4\sqrt{LM}}(\alpha\bar{Z}_G + \bar{\alpha}Z_G)\mathcal{I}m\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}\,dZ -$$

$$-\mathcal{I}m\,q\int_{\Gamma}\varphi\bar{Z}^2dZ - \mathcal{I}m\,r\int_{\Gamma}\varphi\,Z\bar{Z}\,dZ + \frac{1}{48\sqrt{LM}}\mathcal{R}e\,[(\alpha+6b)\,J], \tag{10.5}$$

unde $D = I + D_0$, ca și mai înainte, este rigiditatea geometrică la torsiune a domeniului $\Sigma$. Aceasta este formula care poate înlocui formula (6.6) și, spre deosebire de aceasta din urmă, aplicarea ei nu necesită cunoașterea funcției $\Phi(Z)$.

## 11. DETERMINAREA FUNCȚIEI DE ÎNCOVOIERE CU AJUTORUL REPREZENTĂRII CONFORME PE UN CERC

Să presupunem că

$$Z = m(\zeta) \tag{11.1}$$

este funcția care realizează reprezentarea conformă a domeniului $\Sigma$ pe un cerc unitate $|\zeta| \leqslant 1$ dintr-un plan $\zeta = \xi + i\eta$. Notăm

$$\psi(\zeta) = \Phi[m(\zeta)]. \tag{11.2}$$

Fie $\lambda = e^{i\theta}$ un punct pe circumferința $|\zeta| = 1$. Pentru punctele $Z$ de pe conturul $\Gamma$ al lui $\Sigma$ avem:

$$Z = m(\lambda), \qquad \overline{Z} = \overline{m}(\overline{\lambda}) = \overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$dZ = m'(\lambda)\, d\lambda, \qquad d\overline{Z} = -\frac{1}{\lambda^2}\,\overline{m}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda,$$

astfel că condiția la limită (5.19) devine:

$$\psi(\lambda)\, m'(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2}\,\overline{\psi}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\overline{m}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) = H(\lambda) \qquad \text{pe } |\zeta| = 1, \tag{11.3}$$

unde

$$H(\lambda) = \left[p + q\overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + rm(\lambda)\right]\overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) m'(\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}\left[\overline{p} + \bar{q}m(\lambda) + \bar{r}\,\overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] m(\lambda)\,\overline{m}'\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{11.4}$$

Condiția (11.3) se mai poate scrie

$$\mathcal{R}e\,[\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta)] = \frac{1}{2}\,\lambda H(\lambda) \qquad \text{pe } |\zeta| = 1. \tag{11.5}$$

Am ajuns astfel la o problemă Dirichlet pentru cercul $|\zeta| \leqslant 1$. Soluția ei este dată de formula cunoscută a lui Schwarz. Se găsește:

$$\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta) = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} H(\lambda)\,\frac{\lambda+\zeta}{\lambda-\zeta}\,d\lambda + ib_0, \tag{11.6}$$

$b_0$ fiind o constantă reală. Punînd în (11.6) $\zeta = 0$, găsim

$$ib_0 = -\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} H(\lambda)\,d\lambda,$$

astfel că (11.6) devine:

$$\psi(\zeta)\,m'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{H(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-\zeta}. \tag{11.7}$$

*Observaţie.* Se poate arăta, că de fapt avem

$$\int_{|\zeta|=1} H(\lambda)\,d\lambda = 0. \tag{11.8}$$

Într-adevăr, notînd cu $S$ aria domeniului $\Sigma$ şi ţinînd seamă că:

$$\int_{|\zeta|=1}\overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)m'(\lambda)\,d\lambda = \int_{\Gamma}\overline{Z}\,dZ = 2iS,$$

$$\int_{|\zeta|=1}\overline{m}^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)m'(\lambda)\,d\lambda = \int_{\Gamma}\overline{Z}^2\,dZ = 4iS\overline{Z}_G,$$

$$\int_{|\zeta|=1} m(\lambda)\,\overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)m'(\lambda)\,d\lambda = \int_{\Gamma} Z\overline{Z}\,dZ = 2iSZ_G,$$

deducem din (11.4)

$$\int_{|\zeta|=1} H(\lambda)\,d\lambda = 2iS\,[p + \overline{p} + 2\,(q\overline{Z}_G + \overline{q}Z_G) + rZ_G + \overline{r}\,\overline{Z}_G].$$

Înlocuind aci expresiile lui $p$, $q$, $r$ date de (5.15) şi (5.16), ajungem cu uşurinţă la relaţia (11.8).

Relaţia (11.7) determină funcţia $\psi(\zeta)$, adică funcţia încovoierii exprimată cu ajutorul variabilei $\zeta$.

## 12. DETERMINAREA FUNCŢIEI DE ÎNCOVOIERE CU AJUTORUL REPREZENTĂRII CONFORME PE UN SEMICERC

În cazul în care cunoaştem funcţia care reprezintă conform domeniul $\Sigma$ pe un semicerc de rază egală cu unitatea, putem proceda în acelaşi fel ca la barele izotrope [6].

Fie

$$Z = m(\zeta) \tag{12.1}$$

funcţia care realizează reprezentarea conformă a domeniului $\Sigma$ pe semicercul unitate $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta \geqslant 0$ dintr-un plan $\zeta = \xi + i\eta$. Notăm

$$\psi(\zeta) = \Phi\,[m(\zeta)]. \tag{12.2}$$

Să notăm cu $\delta_1$ semicircumferința $|\zeta| = 1$, $\eta \geqslant 0$ și cu $\delta_2$ diametrul $\eta = 0$, $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\delta_1 + \delta_2$ fiind conturul semicercului parcurs în sens direct. Pentru punctele $\lambda = e^{i\theta}$ de pe $\delta_1$ avem:

$$Z = m(\lambda), \qquad \overline{Z} = \overline{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$dZ = m'(\lambda)\, d\lambda, \qquad d\overline{Z} = -\frac{1}{\lambda^2}\overline{m}'\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda,$$

iar pentru punctele $\xi$ de pe $\delta_2$ avem:

$$Z = m(\xi), \qquad \overline{Z} = \overline{m}(\xi),$$

$$dZ = m'(\xi)\, d\xi, \qquad d\overline{Z} = \overline{m}'(\xi)\, d\xi,$$

astfel că condiția la limită (5.19) devine:

$$\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta) + \overline{\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta)} = U_1(\lambda) \text{ pe } \delta_1, \tag{12.3}$$

$$\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta) - \overline{\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta)} = U_2(\xi) \text{ pe } \delta_2, \tag{12.4}$$

unde:

$$U_1(\zeta) = \zeta\overline{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right) m'(\zeta)\left[p + q\overline{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + rm(\zeta)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\zeta} m(\zeta)\, \overline{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\bar{p} + \bar{q}m(\zeta) + \bar{r}\,\overline{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right], \tag{12.5}$$

$$U_2(\zeta) = \zeta\overline{m}(\zeta)\, m'(\zeta)\,[p + q\overline{m}(\zeta) + rm(\zeta)] -$$

$$- \zeta m(\zeta)\, \overline{m}'(\zeta)\,[\bar{p} + \bar{q}m(\zeta) + \bar{r}\,\overline{m}(\zeta)]. \tag{12.6}$$

Evident, avem

$$\overline{m}(\zeta) = \overline{m(\overline{\zeta})}.$$

Deci, trebuie să determinăm o funcție $\zeta\psi(\zeta)\, m'(\zeta)$, olomorfă în semicercul $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta \geqslant 0$, a cărei parte reală ia pe semicircumferința $\delta_1$ valorile $\frac{1}{2} U_1(\lambda)$ și a cărei parte imaginară ia pe diametrul $\delta_2$ valorile $\frac{1}{2i} U_2(\xi)$. Aceasta este o problemă Volterra, având soluția [7]:

$$\zeta\psi(\zeta) m'(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} U_1(\lambda)\, \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta\cos\theta + \zeta^2}\, d\theta -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} U_2(\xi)\left(\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{\zeta}{1 - \xi\zeta}\right) d\xi$$

sau, ținînd seamă că

$$d\lambda = i\lambda d\theta, \qquad \cos\theta = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda},$$

$$\zeta\psi(\zeta)\,m'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} U_1(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{1}{\lambda-\frac{1}{\zeta}}\right)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} U_2(\xi)\left(\frac{1}{\xi-\zeta} - \frac{1}{\xi-\frac{1}{\zeta}}\right)d\xi. \qquad (12.7)$$

Această relație determină funcția $\psi(\zeta)$.

În cazul în care funcția $m(\zeta)$ poate fi prelungită analitic în semicercul inferior $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta < 0$, formula (12.7) poate fi pusă sub o altă formă. Într-adevăr, în acest caz, din (12.6) rezultă că funcția $U_2(\zeta)$ este olomorfă în semicercul $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta \geqslant 0$. Făcînd uz de formula și teorema lui Cauchy, deducem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} U_2(\xi)\left(\frac{1}{\xi-\zeta} - \frac{1}{\xi-\frac{1}{\zeta}}\right)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} U_2(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{1}{\lambda-\frac{1}{\zeta}}\right)d\lambda = U_2(\zeta),$$

astfel că formula (12.7) devine:

$$\zeta\psi(\zeta)\,m'(\zeta) = U_2(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1}[U_1(\lambda) - U_2(\lambda)]\left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{1}{\lambda-\frac{1}{\zeta}}\right)d\lambda. \qquad (12.8)$$

Primită la redacție la 1 decembrie 1961

## ИЗГИБ ОРТОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

### РЕЗЮМЕ

Метод Милно-Томпсона [1] решения задачи об изгибе прямых изотропных стержней распространяется на случай ортотропных тел. Стержень зафиксирован на одном конце и находится в равновесии, когда на него действует система сил, расположенных в плоскости

другого конца. Боковая поверхность стержня не нагружена, а массовые силы отсутствуют. Как начало, так и направление осей в плоскости поперечного сечения выбраны произвольно. Система сил в плоскости свободного сечения, вызывающая изгиб и кручение стержня, эквивалентна системе, составленной из силы $(W_x, W_y, 0)$, приложенной в точке $o'(0, 0, l)$ и из момента $\mathfrak{M}$, расположенного вдоль оси стержня $(oz)$; буквой $l$ обозначена длина стержня.

Исходя из общих уравнений теории упругости (уравнения равновесия (2.1), закон Гука (2.4) и (2.5), уравнения непрерывности (2.9) и (2.11) и граничные условия (2.13)), применяется полуобратный метод Сэн-Венана при $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Уравнения равновесия сводятся к (3.3) и (3.4); закон Гука сводится к (3.5) — (3.7); условия совместимости сводятся к (3.8) — (3.13). Что касается граничных условий, на контуре $\gamma$ поперечного сечения $\sigma$ должно быть выполнено условие (3.16), а на основании $z = l$ — в силу принципа Сэн-Венана — должны быть выполнены соотношения (3.17) — (3.19). Если выразить, что стержень находится в равновесии, получаются уравнения (3.20) — (3.23), где $\sigma_0$ сечение зафиксированного конца $z = 0$.

Из уравнений (3.3), (3.4), (3.8) — (3.10) выводятся уравнения (4.1) и (4.2), из которых, учитывая также (3.13), получается нормальное напряжение

$$\sigma_z = (z - l)(\alpha_x x + \alpha_y y + \beta),$$

где $\alpha_x$, $\alpha_y$, $\beta$ — постоянные, определяемые из уравнений (3.18) (или (3.21)) и (3.22).

Вводится преобразование

$$X = K\sqrt{L}\,x,\ Y = K\sqrt{M}\,y,\ (K = \sqrt{(L+M)/2\,LM}),$$

которое преобразует сечение $\sigma$ стержня (рис. 2) в область $\sum$ (рис. 3); контуру $\gamma$ сечения $\sigma$ соответствует контур $\Gamma$ области $\sum$.

Вводится комплексная переменная $Z = K\sqrt{L}\,x + iK\sqrt{M}\,y$. Очевидно, $Z$ является афиксом точки $(X, Y)$ из плоскости области $\sum$. Вместо касательных напряжений $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ вводится комплексная величина $T(Z, \bar{Z}) = K\sqrt{L}\,\tau_{xz} - iK\sqrt{M}\,\tau_{yz}$. В этих обозначениях вместо уравнений (3.4), (3.11) и (3.12) получаются уравнения (5.8) и (5.9), из которых вытекает

$$T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - p\bar{Z} - q\bar{Z}^2 - rZ\bar{Z}].$$

Функция $\Phi(Z)$ — называемая функцией изгиба — голоморфна в области $\sum$ и может быть определена при помощи граничного условия

$$\Phi(Z)\,dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = (p + q\bar{Z} + rZ)\,\bar{Z}\,dZ - (\bar{p} + \bar{q}Z + r\bar{Z})\,Z d\bar{Z}$$

на $\Gamma$; это условие получено из (3.16). Показывается далее, что уравнения (3.17) и (3.20) удовлетворяются. Постоянная $\tau$ из выражения (5.14) для $T(Z, \bar{Z})$ определяется при помощи уравнения (3.19) или (3.23). Получается уравнение (6.6).

Локальное кручение $\omega$ дается формулой (7.2), а среднее значение локального кручения—формулой (7.3). Центр изгиба $(x_c, y_c, l)$ получается из (7.7), где $Z_c = K\sqrt{L}x_c + iK\sqrt{M}y_c$, а $\mathfrak{M}_c$ — значение $\mathfrak{M}$ из (6.6), соответствующее значению $\tau$ из (7.4).

Для перемещений $u$, $v$, $w$ из (2.7) и (2.8) получаем уравнения (8.1), которые с обозначением $V = u/K\sqrt{L} + iv/K\sqrt{M}$ могут быть написаны в виде (8.4) — (8.7). Интегрированием этой системы получаются соотношения (8.22) и (8.23), где $\Psi(Z)$ — неопределенный интеграл функции $\Phi(Z)$.

Случай кручения получается как частный случай, при $W_x = W_y = 0, \mathfrak{M} \neq 0$. Находится $\sigma_z = 0$ и $T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - i\tau\bar{Z}]$, где $\Phi(Z)$ удовлетворяет граничному условию

$$\Phi(Z)\,dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = i\tau(\bar{Z}\,dZ + Z\,d\bar{Z}) \quad \text{на } \Gamma.$$

Значение $\tau$ дается формулой (9.6), а перемещения даются формулами (9.8) и (9.9). Показывается, что в этом случае задачи кручения функция $F(Z) = \frac{1}{\tau}\Psi(Z) = \frac{1}{\tau}\int \Phi(Z)\,dZ$ представляет собой комплексную функцию кручения, соответствующего области $\Sigma$.

В § 10 показывается, что центр изгиба можно определить без знания функции изгиба $\Phi(Z)$, если известны только значения на контуре $\Gamma$ функции кручения $\varphi(X, Y)$ соответствующей области $\Sigma$. Именно показывается, что формулу (6.6) можно заменить соотношением (10.5) не содержащим функцию изгиба $\Phi(Z)$.

В § 11 показывается, каким образом можно получить функцию изгиба в случае, когда известна функция $Z = m(\zeta)$, реализирующая конформное отображение области $\Sigma$ на единичную окружность $|\zeta| \leqslant 1$ плоскости $\zeta$. Несколько иным путем, по сравнению с [1], получается формула (11.7).

В § 12 показывается, каким образом можно получить функцию изгиба, если известна функция $Z = m(\zeta)$, реализующая конформное отображение области $\Sigma$ на полуокружность $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta \geqslant 0$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Путем, полностью аналогичным пути из [6], получается смешанная задача типа Волбтерра, решение которого дается в [7]. Для функции изгиба получается выражение (12.7).

## FLEXURE OF ORTHOTROPIC PRISMATIC BEAMS

### ABSTRACT

Milne-Thomson's method [1] for solving the flexure problem of an isotropic prismatic beam is extended to the case of an orthotropic material. The beam is fixed at one end and is in equilibrium when a system of forces acts upon it in the plane of the other end. The lateral surface of the

beam is unloaded, and body forces are assumed to be absent. The origin as well as the direction of the axes in the plane of the cross-section are taken arbitrarily. The system of forces which acts in the plane of the free end is statically equivalent to the system composed of the force ($W_x$, $W_y$, 0) acting at the point $o'$ (0, 0, $l$) and of the moment $\mathfrak{M}$ directed along the axis $oz$ of the beam. The length of the beam is denoted by $l$.

Starting from the general equations of the theory of elasticity (equilibrium equations (2.1); Hooke's law (2.4) and (2.5); continuity equations (2.9) and (2.11); boundary conditions (2.13)), Saint-Venant's semi-inverse method is applied, setting $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Thus, equilibrium equations reduce to (3.3) and (3.4), Hooke's law reduces to (3.5)—(3.7), continuity equations reduce to (3.8)—(3.13). As far as the boundary conditions are concerned, equation (3.16) must be satisfied on the boundary $\gamma$ of the free end $\sigma$ while equations (3.17)—(3.19) must be satisfied on $\sigma$. Considering the equilibrium of the whole beam, equations (3.20)—(3.23) are obtained, $\sigma_0$ being the section of the fixed end $z = 0$.

From (3.3), (3.4), (3.8)—(3.10), the equations (4.1) and (4.2) are obtained, whence, by taking also (3.13) into account, we obtain the normal stress

$$\sigma_z = (z - l)(\alpha_x x + \alpha_y y + \beta),$$

$\alpha_x$, $\alpha_y$, $\beta$ being constants which are determined by the aid of (3.18) (or (3.21)) and (3.22).

The transformation

$$X = K\sqrt{L}\,x, \quad Y = K\sqrt{M}\,y, \quad (K = \sqrt{(L + M)/2\,LM})$$

is introduced, by which the cross-section $\sigma$ of the beam (Fig. 2) is transformed into a domain $\sum$ (Fig. 3), the boundary $\Gamma$ of $\sum$ corresponding to the boundary $\gamma$ of $\sigma$.

The complex variable $Z = K\sqrt{L}\,x + iK\sqrt{M}\,y$ is introduced. Obviously $Z$ is the affix of the point $(X, Y)$ in the plane of the domain $\sum$. Denoting $T(Z, \bar{Z}) = K\sqrt{L}\,\tau_{xz} - iK\sqrt{M}\,\tau_{yz}$, equations (3.4), (3.11) and (3.12) are replaced by (5.8) and (5.9) which yield

$$T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - p\bar{Z} - q\bar{Z}^2 - rZ\bar{Z}].$$

The function $\Phi(Z)$ — called the flexure function — is holomorphic over the domain $\sum$ and can be determined by means of the boundary condition

$$\Phi(Z)\,dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = (p + q\bar{Z} + rZ)\,\bar{Z}\,dZ - (\bar{p} + \bar{q}Z + r\bar{Z})\,Z d\bar{Z} \text{ on } \Gamma.$$

It is shown that equations (3.17) and (3.20) are satisfied. The constant $\tau$ which appears in (5.14) is determined by means of (3.19) or (3.23). Thus, equation (6.6) is obtained.

The local twist $\omega$ is given by (7.2) while the mean value of the local twist is given by (7.3). The centre of flexure $(x_c, y_c, l)$ is given by (7.7) where $Z_c = K\sqrt{L}\,x_c + iK\sqrt{M}\,y_c$, and $\mathfrak{M}_c$ is the value of $\mathfrak{M}$ (see (6.6)) corresponding to $\tau$ given by (7.4).

For the displacements $u$, $v$, $w$, from (2.7) and (2.8) one obtains the equations (8.1). Denoting $V = u/K\sqrt{L} + iv/K\sqrt{M}$, equations (8.1) can be replaced by (8.4)—(8.7) whence — by integration — (8.22) and (8.23) are obtained. Here $\Psi(Z)$ denotes the indefinite integral of $\Phi(Z)$.

The torsion problem is obtained as a particular case, by setting $W_x = W_y = 0$, $\mathfrak{M} \neq 0$. One finds $\sigma_z = 0$ and $T(Z, \bar{Z}) = \sqrt{LM}\,[\Phi(Z) - i\tau\bar{Z}]$, where $\Phi(Z)$ satisfies the boundary condition

$$\Phi(Z)\,dZ - \overline{\Phi(Z)}\,d\bar{Z} = i\tau\,(\bar{Z}\,dZ + Z d\bar{Z}) \text{ on } \Gamma.$$

The value of $\tau$ is yielded by (9.6). The displacements are given by (9.8) and (9.9). It is shown that in this case of the torsion problem, the function $F(Z) = \frac{1}{\tau}\Psi(Z) = \frac{1}{\tau}\int \Phi(Z)\,dZ$ is the complex torsion function corresponding to the domain $\Sigma$.

In § 10 it is shown that the centre of flexure can be determined without necessarily knowing the flexure function $\Phi(Z)$ but only the boundary-values of the torsion function $\varphi(X, Y)$ corresponding to the domain $\Sigma$. Namely, it is shown that formula (6.6) can be replaced by equation (10.5) which does not contain the flexure fonction $\Phi(Z)$. Then, the centre of flexure results readily from (7.7).

In the case when $Z = m(\zeta)$ is the function which maps conformally the domain $\Sigma$ on the unit circle $|\zeta| \leqslant 1$ of a $\zeta$-plane, the flexure function $\psi(\zeta) = \Phi[m(\zeta)]$ is given by (11.7). Formula (11.7) was obtained in a way slightly different from that in [1].

In the case when $Z = m(\zeta)$ is the function which maps conformally the domain $\Sigma$ on the semicircle $|\zeta| \leqslant 1$, $\eta \geqslant 0$ of a plane $\zeta = \xi + i\eta$, the flexure function $\psi(\zeta) = \Phi[m(\zeta)]$ is given by (12.7). Formula (12.7) was obtained in a wholly similar way as in [6].

BIBLIOGRAFIE

1. L. M. MILNE-THOMSON, *Flexure*. Trans. Amer. Math. Soc., **90**, *1*, 143—160 (1959).
2. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, *Вариационные методы решения задач теории упругости. Собрание трудов*. I. Изд. АН СССР, Москва, 1954.
3. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticităţii*. I. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.
4. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London, 1956.
5. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. АН СССР, Москва, 1954.
6. E. DEUTSCH, *On the flexure of some prismatic beams*. Quart. J. of Mech. and Applied Math., **XIV**, *4*, 471—479 (1961).
7. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest-Paris, 1959.

# O PROBLEMĂ DE TIP CAUCHY PENTRU O ECUAȚIE CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL PATRU

DE

G. TEODORESCU

## INTRODUCERE

Calculul operațional construit de Jan Mikusinski poate fi aplicat cu succes oricărei ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți, în două variabile independente. O astfel de ecuație poate fi redusă la o ecuație operatorială, ale cărei soluții, dacă se reduc la funcții parametrice, vor fi și soluții ale ecuației cu derivate parțiale considerate [1].

Prin funcție operațională se înțelege orice funcție $f(x)$ care pentru orice valoare a lui $x$, face să corespundă un operator. Prin funcție operatorie parametrică se înțelege orice funcție operațională ale cărei valori se reduc la operatori care sînt funcții de $t$ $(t \geqslant 0)$ pentru orice valoare a parametrului $x$. Aceste funcții sînt notate $\{f(x, t)\} = f(x)$. Valorile acestor funcții parametrice pentru un $x$ dat, vor fi funcții de $t$ ce aparțin clasei $K$, adică clasei funcțiilor $f(t)$ ce au un număr finit de discontinuități în orice interval finit și cu $\int_0^t |f(\tau)|\, d\tau$ mărginită pentru orice $t > 0$.

Să considerăm ecuația cu derivate parțiale:

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu,\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial t^{\mu}\, \partial x^{\nu}} = \varphi(t, x), \tag{1}$$

$\alpha_{\mu,\nu}$ constante în banda $0 < t < \infty$; $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Acestei ecuații îi va corespunde ecuația operatorie:

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_0 u = f(x), \tag{2}$$

unde $a_n$, $a_{n-1}, \ldots$, $a_0$ sînt operatori cu $\nu = 0, 1, \ldots, m$ și $s$ operatorul diferențial.

Avem

$$f(x) = \{\varphi(t, x)\} + \sum_{p=0}^{m-1} s^{m-p-1} \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{m-p+\mu,\nu}\, h_\mu^{(\nu)}(x),$$

cu $h_p(x) = \left(\frac{\partial^p u(t, x)}{\partial t^p}\right)_{t=0}$.

Pentru a obține ecuația operatorială (2) vor trebui determinate funcțiile $h_p(x)$, $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Jan Mikusinski clasifică ecuațiile cu derivate parțiale în trei categorii, după natura rădăcinilor ecuației caracteristice corespunzătoare ecuației (2).

Dacă aceste rădăcini sînt toate logaritmice, înțelegînd prin operator logaritmic acel operator $\omega$ pentru care funcția operațională $e^{\omega x}$ există, atunci ecuația va fi numită *logaritmică*.

Dacă nici una din rădăcinile ecuației caracteristice nu este logaritmică, ecuația va fi numită *pură*, iar dacă unele rădăcini sînt logaritmice și altele nu, ecuația va fi o *ecuație mixtă*.

Această clasificare este relativă la parametrul $x$, variabilele $t$ și $x$ nejucînd același rol.

Există operatori $\omega$ pentru care funcția operatorie $e^{\omega x}$ nu are sens, de exemplu $e^{isx}$, $e^{s^2x}$ etc. [2].

Funcția exponențială $u(x) = e^{\omega x}$ este definită pentru valorile reale ale lui $x$, ca unica soluție a ecuației diferențiale $u'(x) = \omega u(x)$ și cu condiția inițială $u(0) = 1$. Or, pentru unii operatori $\omega$, o funcție identic nulă este singura soluție a ecuației $u'(x) = \omega u(x)$, deci condiția $u(0) = 1$ nu poate fi satisfăcută.

Acest lucru se întîmplă pentru $\omega = is$, $s^2$ etc.

Inexistența funcției $e^{isx}$, pentru $x$ real, este echivalentă cu teorema de unicitate pentru ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, în condițiile $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, unica soluție fiind $u(x, t) = 0$.

Inexistența funcției $e^{s^2x}$, pentru $x$ real, este echivalentă cu teorema de unicitate pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0, \text{ în condițiile } \left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right)_{t=0} = 0,\ p = 0, 1, 2, 3,$$

a cărei soluție este identic nulă pentru $(0 \leqslant x \leqslant 1, t > 0)$ domeniu în care funcția $u(x, t)$ verifică ecuația dată.

În general, funcția exponențială $\exp(-s^a x)$ nu există pentru $a > 1$. Pentru $a = 1$, această funcție se reduce la operatorul de translație, dacă $x$ este real.

Pentru $x$ real și pozitiv, funcția $\exp(-s^a x)$ cu $0 < a < 1$ se reduce la o funcție parametrică reală $\{f(x, t)\}$, nulă pentru $t = 0$, cu derivate

parțiale $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$, de orice ordin, care se anulează pentru $t = 0$. În acest caz, se poate scrie forma explicită a funcției $f(x, t)$.

Jan Mikusinski demonstrează următoarea teoremă [3]:

*Valoarea funcției operatorie* $e^{-s^a x}$, *cu* $0 < a < 1$, *este*:

1°. *o funcție indefinit derivabilă în unghiul*

$$|\arg x| < \frac{\pi(1-a)}{2};$$

2°. *o distribuție care nu este o funcție pe semidreptele*

$$|\arg x| = \frac{\pi(1-a)}{2};$$

3°. *un operator care nu este o distribuție în domeniul*

$$\frac{\pi(1-a)}{2} < |\arg x| \leqslant \pi.$$

*Valorile funcției operatorie* $e^{s^a x}$ *pentru orice valoare a lui* $x$ *reală și pozitivă, sînt operatori care nu sînt distribuții.*

În ecuația operațională (2) intervine funcția $f(x)$ în membrul al doilea. Pentru a-i putea scrie expresia, vor trebui cunoscute funcțiile

$$g_p(x) = \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{m-p+\mu,\nu} h_\mu^{(\nu)}(x), \tag{3}$$

care determină comportarea soluției $u(x, t)$ pe axa $Ox$. În unele cazuri, condițiile (3) sînt echivalente cu condițiile lui Cauchy:

$$\frac{\partial^p u(x, 0)}{\partial t^p} = h_p(x), \quad p = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Jan Mikusinski numește ecuațiile cu derivate parțiale pentru care condițiile (3) și (4) nu sînt echivalente, ecuații restrictive, dînd și condiția necesară și suficientă ca o ecuație cu derivate parțiale să nu fie restrictivă:

O ecuație de forma (1) nu va fi restrictivă, dacă și numai dacă

$$\alpha_{m,0} \neq 0 \text{ și } \alpha_{m,1} = \alpha_{m,2} = \ldots = \alpha_{m,x} = 0,$$

adică derivata în care ordinul de derivare parțială în raport cu $t$ este maxim, nu este o derivată mixtă. De aici se deduce că ecuația considerată va fi restrictivă numai în cazul cînd axa $Ox$ va fi o caracteristică a acestei ecuații. Urmează că o ecuație pură nu este niciodată restrictivă.

## I

În cele ce urmează vom aplica metoda calculului operațional în rezolvarea unor probleme de tip Cauchy, pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul patru, de tipul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ constante}, \tag{5}$$

și apoi vom considera unele cazuri speciale ale acestei ecuații.

Ecuația (5) nefiind restrictivă, condițiile Cauchy sînt valabile. Vom căuta funcția $u(x, t)$, continuă, cu derivate parțiale în raport cu $x$ pînă la ordinul patru inclusiv și în raport cu $t$ pînă la ordinul doi inclusiv, continue, și care funcție să verifice ecuația (5) în domeniul $x \geqslant 0$, $t > 0$ și următoarele condiții :

$$u(x, 0) = 0,\ u'_t(x, 0) = 0,\ u(0, t) = f_1(t),\ u'_x(0, t) = f_2(t), \tag{6}$$

cu $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(t)$ și $f_2(t)$ funcții continue și derivabile.

Ecuația operațională corespunzătoare ecuației (5) va fi :

$$u^{IV} - (\alpha_1 + \alpha_2)\, su'' + \alpha_1\alpha_2 s^2 u = 0. \tag{7}$$

Ecuația caracteristică, corespunzătoare acestei ecuații diferențiale, va avea rădăcinile $\pm\sqrt{\alpha_1 s}$, $\pm\sqrt{\alpha_2 s}$, care sînt logaritmice, deoarece funcția operatorie $\exp(s^a x)$ există pentru $0 < a < 1$, pentru orice $x$ real, și în cazul nostru avem $a = \frac{1}{2}$.

Numai pentru $x$ real și pozitiv, funcția exponențială $\exp(-s^a x)$ cu $0 < a < 1$, se reduce la o funcție parametrică reală $\{f(x, t)\}$, nulă pentru $t = 0$, cu derivate parțiale $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$, de orice ordin, continue și nule pentru $t = 0$.

Expresia lui $u(x)$ va fi :

$$u(x) = C_1 e^{-\sqrt{\alpha_1 s}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha_2 s}\, x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha_1 s}\, x} + C_4 e^{\sqrt{\alpha_2 s}\, x}.$$

Dacă $u(x)$ este o funcție parametrică, valoarea ei într-un punct arbitrar $x$, va trebui să fie o funcție de $t$ aparținînd clasei $K$ [1]. Urmează că $C_1 e^{-\sqrt{\alpha_1 s}\, x}$, $C_2 e^{-\sqrt{\alpha_2 s}\, x}$, $C_3 e^{\sqrt{\alpha_1 s}\, x}$, $C_4 e^{\sqrt{\alpha_2 s}\, x}$ trebuie să fie și ele funcții aparținînd clasei $K$. Pentru aceasta va trebui ca $C_3 = C_4 = 0$, căci altfel pentru valori mari ale lui $x$, componentele $C_3 e^{\sqrt{\alpha_1 s}\, x}$ și $C_4 e^{\sqrt{\alpha_2 s}\, x}$ vor înceta de a mai fi funcții din clasa $K$ și $u(x)$ nu va mai fi o funcție parametrică.

Vom avea deci

$$u(x) = C_1 e^{-\sqrt{\alpha_1 s}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha_2 s}\, x}. \tag{7'}$$

Constantele $C_1$ și $C_2$ vor fi determinate în mod unic prin condițiile

$$u(0) = f_1,\ u'_x(0) = f_2.$$

Vom avea :

$$C_1 + C_2 = f_1,$$

$$-\sqrt{\alpha_1 s}\, C_1 - \sqrt{\alpha_2 s}\, C_2 = f_2,$$

adică

$$C_1 = \frac{f_1\sqrt{\alpha_2 s} + f_2}{\sqrt{s}\,(\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1})},\quad C_2 = -\frac{f_1\sqrt{\alpha_1 s} + f_2}{\sqrt{s}\,(\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1})}.$$

Va urma pentru funcția parametrică $u(x)$ următoarea expresie:

$$u(x) = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}} f_1 \exp(-\sqrt{\alpha_1 s}\, x) - \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}} f_1 \exp(-\sqrt{\alpha_2 s}\, x) +$$

$$+ \frac{f_2}{\sqrt{s}\,(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})} [\exp(-\sqrt{\alpha_1 s}\, x) - \exp(-\sqrt{\alpha_2 s}\, x)].$$

Urmează că funcția parametrică $u(x) = \{u(x,t)\}$ se poate scrie sub următoarea formă explicită:

$$\{u(x,t)\} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\left\{\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\left[\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right) - \exp\left(\frac{-\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\right] dz\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\left\{\int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\right] d\tau\right\}. \quad (8)$$

Integralele care intervin în această expresie au sens cînd $\tau \to 0$, prin valori pozitive. Funcția $u(x,t)$, dată de această formulă, se anulează pentru $t = 0$, împreună cu toate derivatele sale în raport cu $t$, ținînd seamă de ipoteza făcută cu $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Rămîne să vedem dacă funcția $u(x,t)$, dată de expresia (8), verifică în adevăr ecuația cu derivate parțiale (6) și condițiile (7).

Vom arăta întîi că această funcție verifică ecuația (6). Avem:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15\alpha_1^2 x}{4\tau^{\frac{7}{2}}} - \frac{5\alpha_1^3 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}} + \frac{\alpha_1^4 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right] d\tau -$$

$$- \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15\alpha_2^2 x}{4\tau^{\frac{7}{2}}} - \frac{5\alpha_2^3 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}} + \frac{\alpha_2^4 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_1^2}{4\tau^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\alpha_1^3 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}} + \frac{\alpha_1^4 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right] d\tau -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_2^2}{4\tau^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\alpha_2^3 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}} + \frac{\alpha_2^4 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right] d\tau,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15\alpha_1 x}{4\tau^{\frac{7}{2}}} - \frac{5\alpha_1^2 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}} + \frac{\alpha_1^3 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right] d\tau -$$

$$- \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15\alpha_2 x}{4\tau^{\frac{7}{2}}} - \frac{5\alpha_2^2 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}} + \frac{\alpha_2^3 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right] d\tau +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_1}{4\tau^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\alpha_1^2 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}}+\frac{\alpha_1^3 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right]d\tau -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_2}{4\tau^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\alpha_2^2 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}}+\frac{\alpha_2^3 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15x}{4\tau^{\frac{7}{2}}}-\frac{5\alpha_1 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}}+\frac{\alpha_1^2 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right]d\tau -$$

$$-\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_1(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{15x}{4\tau^{\frac{7}{2}}}-\frac{5\alpha_2 x^3}{4\tau^{\frac{9}{2}}}+\frac{\alpha_2^2 x^5}{16\tau^{\frac{11}{2}}}\right]d\tau +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_1}{4\tau^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\alpha_1^2 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}}+\frac{\alpha_1^3 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right]d\tau -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\int_0^t f_2(t-\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\left[\frac{3\alpha_2}{4\tau^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\alpha_2^2 x^2}{4\tau^{\frac{7}{2}}}+\frac{\alpha_2^3 x^4}{16\tau^{\frac{9}{2}}}\right]d\tau.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (6), coeficienții tuturor integralelor care apar în membrul întîi al ecuației, sînt identic nuli. De exemplu, coeficientul integralei $\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{7}{2}}}\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)d\tau$

va fi :

$$\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\left[\frac{15\alpha_1^2 x}{4}-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{15\alpha_1 x}{4}+\alpha_1\alpha_2\frac{15x}{4}\right]=0.$$

Deci, funcția $u(x, t)$ dată de expresia (8) verifică ecuația dată.

Rămîne să vedem dacă ultimele două condiții (6) sînt satisfăcute, adică să vedem dacă $\lim_{x\to 0} u(x,t)=f_1(t)$ și $\lim_{x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x}=f_2(t)$.

În expresia funcției $u(x, t)$ intervin integralele următoare :

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)d\tau,$$

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)d\tau,$$

$$J=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right)\right]d\tau.$$

Pentru primele două integrale, făcînd schimbarea $z = \frac{\sqrt{\tau}}{x}$ obținem :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{x}} f_1(t - x^2z^2) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_1}{4z^2}\right)}{z^2} dz,$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{x}} f_1(t - x^2z^2) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_2}{4z^2}\right)}{z^2} dz.$$

Făcînd pe $x$ să tindă la zero prin valori $> 0$, obținem :

$$I_1(0, t) = \frac{f_1(t)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_1}{4z^2}\right)}{z^2} dz = \frac{f_1(t)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_1}} = \frac{f_1(t)}{\sqrt{\alpha_1}},$$

$$I_2(0, t) = \frac{f_1(t)}{\sqrt{\alpha_2}},$$

$$J = 0.$$

Urmează că $\lim_{x \to 0} u(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1}} \left[ \frac{f_1(t)}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{f_1(t)}{\sqrt{\alpha_2}} \right] = f_1(t).$

Să calculăm $\frac{\partial u}{\partial x}$ cînd $x$ tinde către zero prin valori pozitive. Vom avea :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1})} \left\{ \int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} \left[ \exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right) \right] dz + \right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)x^2}{2} \int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}} \left[ \exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right) \right] d\tau \right\} -$$

$$- \frac{x}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1})} \int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} \left[ \exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right) \right] d\tau.$$

Făcînd schimbarea $z = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$, prima integrală devine :

$$2 \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\infty} f_1\left(t - \frac{1}{z^2}\right) \left[ \exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2 z^2}{4}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2 z^2}{4}\right) \right] dz$$

care tinde la zero o dată cu $x$.

A doua integrală devine, cu aceeași schimbare :

$$\frac{(\alpha_2-\alpha_1)x^2}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\infty} f_1\left(t-\frac{1}{z^2}\right)\left[\exp\left(-\frac{\alpha_1 x^2 z^2}{4}\right)-\exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2 z^2}{4}\right)\right]dz$$

și această integrală tinde către zero, cînd $x \to 0$.
Rămîn integralele care conțin funcția $f_2$.

Aceste integrale sînt de aceeași natură cu $I_1$ și $I_2$ de mai sus. Cînd $x$ tinde către zero prin valori pozitive, vom obține :

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}\,[2\sqrt{\alpha_1\pi}-2\sqrt{\alpha_2\pi}]\,f_2(t)=f_2(t).$$

Urmează că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_2(t)$.

Deci funcția $u(x,t)$ dată de formula (8) verifică ecuația dată și condițiile impuse în tot domeniul $x \geqslant 0$ și $t > 0$. Metoda utilizată ne asigură unicitatea acestei soluții.

## II

Vom considera acum cîteva cazuri speciale întîlnite mai des în problemele de fizică.

*În primul caz*, vom considera $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Ecuația devine :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{9}$$

Pentru această ecuație, neomogenă, acad. M. Nicolescu a rezolvat o problemă bilocală, utilizînd transformata Fourier [4].

Utilizînd metoda calculului operațional, vom rezolva următoarele probleme pentru ecuația (9). Să se determine o funcție $u(x,t)$ în domeniul $x > 0$, $t > 0$, care să verifice ecuația (9) și condițiile următoare :

a). $u(x,0)=0$, $u_t'(x,0)=0$, $u(0,t)=f_1(t)$ cu $f_1(0)=0$ ;

b). $u(x,0)=0$, $u_t'(x,0)=0$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=f_2(t)$ cu $f_2(0)=0$.

Ecuația operațională corespunzătoare ecuației (9) va fi :

$$u^{IV}-s^2u=0. \tag{9'}$$

Ecuația caracteristică va avea rădăcinile $\pm\sqrt{s}$ și $\pm i\sqrt{s}$, deci funcția operatorie soluție a ecuației (9') va fi $u(x)=C_1e^{-\sqrt{s}x}+C_2e^{\sqrt{s}x}+C_3e^{-i\sqrt{s}x}+C_4e^{i\sqrt{s}x}$.

Pentru ca $u(x)$ să fie o funcție parametrică va trebui ca $C_2=C_3=C_4=0$, căci funcțiile operatorii $C_3e^{-i\sqrt{s}x}$, $C_4e^{i\sqrt{s}x}$ sînt operatori care

nu se reduc la funcții, nici la distribuții și $C_2 e^{\sqrt{s}x}$ nu se reduce la o funcție parametrică, pentru valorile lui $x$ destul de mari, după cum s-a mai spus [1].

Rămîne deci $u(x) = C_1 e^{-\sqrt{s}x}$. Prin urmare, vom avea nevoie numai de una din condițiile pe axa $Ox$, adică ori a). $u(0, t) = f_1(t)$, ori b). $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = f_2(t)$.

În cazul a) vom avea $C_1 = f_1(t)$, în cazul b) vom avea $C_1 = -\frac{f_2(t)}{\sqrt{s}}$.

În primul caz, vom obține pentru $u(x, t)$ expresia următoare:

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau. \tag{10}$$

În al doilea caz, vom avea:

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau. \tag{10'}$$

Se vede imediat că aceste funcții sînt nule pentru $t = 0$ ca și $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$. Urmînd același calcul ca și în cazul $\alpha_1$, $\alpha_2$ oarecare, mult simplificat, se dovedește că funcțiile date de expresiile (10) și (10') verifică ecuația (9).

Cînd $x$ tinde la zero, funcția $u(x, t)$ dată de (10) tinde către $f_1(t)$, iar derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$, a funcției date de expresia (10'), va tinde către $f_2(t)$. Verificarea este imediată.

Cazul acesta $\alpha_1 = 1$ și $\alpha_2 = -1$, nu poate fi dedus direct din soluția dată de expresia (8) prin particularizarea constantelor $\alpha_1$ și $\alpha_2$, deoarece în expresia (8) interveneau integralele următoare:

$$\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right) d\tau \quad \text{și} \quad \int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\alpha_2 x^2}{4\tau}\right) d\tau,$$

care pentru $\alpha_2 = -1$, sînt divergente pentru $t > 0$. Plecînd de la ecuația operațională corespunzătoare (9'), am observat că pentru ca funcția $u(x)$ soluția acestei ecuații, să se reducă la o funcție parametrică, a fost necesar ca unele constante care interveneau în expresia lui $u(x)$ să fie identic nule, ceea ce a făcut ca una din condițiile (7) să nu mai fie necesară.

*Cazul al doilea.* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ și ecuația (6) se reduce la ecuația bicalorică:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} u(x, t) = 0, \tag{11}$$

studiată de acad. M. Nicolescu [6].

Pentru această ecuație vom rezolva următoarea problemă: Să se determine funcția $u(x, t)$ care verifică ecuația (11) în domeniul $t > 0$, $x > 0$ și cu condițiile:

$$u(x, 0) = 0,\ u_t'(x, 0) = 0,\ u(0, t) = f_1(t),\ u_x'(0, t) = f_2(t_1) \tag{12}$$

cu $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Avem aceeași problemă ca și în cazul $\alpha_1$, $\alpha_2$ oarecare. Funcția $u(x, t)$, care rezolvă problema, va putea fi dedusă din expresia (8), trecînd la limită pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Vom pune $\alpha_2 = \alpha_1 z$, vom trece la limită pentru $z = 1$ și apoi vom face $\alpha_1 = 1$. Vom obține din (8) următoarea expresie pentru $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{x^3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau + \\ + \frac{x^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau. \tag{13}$$

Printr-un calcul ușor, se poate vedea că funcția dată de această expresie verifică în adevăr ecuația bicalorică (11). Primele două condiții (12), adică $u(x, 0) = 0$ și $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$, sînt verificate, deoarece am presupus $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Rămîne să vedem ce se întîmplă cînd $x$ tinde către zero, în expresia lui $u(x, t)$ și a lui $\frac{\partial u}{\partial x}$. Să considerăm prima integrală din expresia (13):

$$I_1 = \frac{x^3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau.$$

Vom face schimbarea de variabile $z = \frac{\sqrt{\tau}}{x}$.

Integrala devine:

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{x}} f_1(t - x^2 z^2) \exp\left(-\frac{1}{4z^2}\right) \frac{dz}{z^4}.$$

Această integrală, cînd $x$ tinde către zero prin valori $> 0$, deoarece $f_1$ este o funcție continuă, va deveni:

$$\lim_{x \to 0} I_1 = \frac{f_1(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4z^2}\right) \frac{dz}{z^4}.$$

Integrala care intervine este convergentă și printr-o schimbare de variabilă devine:

$$\int_0^\infty u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du = \frac{1}{2}\, 2\sqrt{4\pi} = 2\sqrt{\pi}$$

căci

$$\int_0^\infty z^{2n} e^{-pz^2} dz = \frac{(2n-1)!!}{2\cdot(2p)^n}\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad p > 0.$$

A doua integrală

$$I_2 = \frac{x^2}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)dz = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{xf_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau.$$

Am văzut mai sus că $\int_0^t \frac{xf_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau$ tinde la $2\sqrt{\pi}f_2(t)$ cînd $x$ tinde către zero. Deci, produsul dintre $x$ și această integrală va tinde către zero. Urmează că $u(0, t) = f_1(t)$. Să calculăm pe $\frac{\partial u}{\partial x}$ și să facem $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau - \frac{x^4}{8\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{7}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau +$$

$$+ \frac{x}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau - \frac{x^3}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_2(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau.$$

Să considerăm a doua integrală și să o integrăm prin părți. Vom avea:

$$-\frac{x^4}{8\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{7}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau = -\frac{x^2}{2\sqrt{\pi}}\frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)\Bigg|_0^t -$$

$$-\frac{x^2}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1'(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau - \frac{3x^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau.$$

Termenul integrat este identic nul. Al doilea termen este de forma $\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t xf_1'(t-\tau)\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)d\tau$ și tinde către zero o dată cu $x$. Al treilea termen se reduce cu prima integrală. Din expresia lui $\frac{\partial u}{\partial x}$ rămîn ultimele două integrale *).

Prima dintre ele a fost deja calculată pentru $x = 0$, și dă $2f_2(t)$. A doua a fost și ea calculată (a intervenit în expresia lui $u(x, t)$ dată de

*) Integralele de forma $I_{a,b} = \frac{(x-\xi)^a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(\tau)}{(t-\tau)^b}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau$ au fost calculate de E. E. Levi [7], care a arătat că în cazul $a + 3 - 2b > 0$, pentru $x$ tinzînd către $\xi$, aceste integrale tind către $f(t)$. Este ușor de văzut că în cazul $a + 3 - 2b = 0$, aceste integrale tind la zero ($t > 0$).

(13)) și pentru $x = 0$ este egală cu $f(t)$. Diferența lor este $f_2(t)$. Urmează că $\lim_{x \to 0} \frac{\partial u}{\partial x} = f_2(t)$.

Deci condițiile (12) sînt verificate.

Funcția exprimată prin formula (13) verifică ecuația bicalorică pentru $t > 0$ și $x > 0$ și condițiile impuse (12). Această problemă a fost rezolvată plecînd de la expresia generală dată de relația (8).

Aceasta a fost posibil deoarece funcția exponențială dată de (7′) se reduce la o funcție parametrică și pentru cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Primită la redacție la 3 ianuarie 1962

## ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

Рассматривается уравнение в частных производных четвертого порядка вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

в области $t > 0$, $x > 0$, где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — постоянные, и при помощи операционного исчисления решается задача типа Коши для этого уравнения. Решение дается формулой (8) и оно удовлетворяет уравнению и условиям (7).

Рассматриваются далее случаи $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Решения первого случая нельзя получить из (8), так как в этом случае соответствующая операционная функция не сводится к параметрической функции.

Во втором случае решение может быть получено из общего решения (8) как предельный случай при $\alpha_1 \to \alpha_2$, так как соответствующая операционная функция является параметрической функцией.

## PROBLÈME DU TYPE CAUCHY CONCERNANT UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE

RÉSUMÉ

On considère l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, ayant la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

dans le domaine $t > 0$, $x > 0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ étant constantes. A l'aide du calcul opérationnel, on résout un problème du type Cauchy concernant cette équation. La solution du problème, fournie par la formule (8), vérifie l'équation et les conditions imposées (7).

On examine, par la suite, les cas $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, et $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

La solution du premier cas ne peut pas être déduite de (8), car, dans ce cas, la fonction opérationnelle correspondante ne se réduit pas à une fonction paramétrique.

La solution du deuxième cas peut être déduite de la solution générale (8), comme un cas limite pour $\alpha_1 \to \alpha_2$, la fonction opérationnelle correspondante étant une fonction paramétrique.

## BIBLIOGRAFÎE

1. J. MIKUSINSKI, *Operational Calculus*. Pergamon Press, London, 1959, 211, 299—306.
2. — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*. Stud. Math., **12**, 208—224 (1951).
3. — *Sur les notions de distribution et d'opérateur*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci. Math., **VI**, 737—741 (1958).
4. MIRON NICOLESCU, *Sur un type de problème bilocal pour les équations aux dérivées partielles*. Ann. mat. pura ed appl., **XLIX**, 129—138 (1960).
5. J. MIKUSINSKI, *Sur les équations différentielles du calcul opératoire*. Stud. Math., **12**, 228—270 (1951).
6. MIRON NICOLESCU, *Ecuația iterată a căldurii*. Studii și cercetări matematice, **V**, *3—4* (1954).
7. E. E. LEVI, *Sull' equazione del calore*. Rend. Circ., Palermo, 1907.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ORSZÁGOS 1983

E. H. LOCKOOD, *A Book of Curves* (O carte despre curbe). University Press, Cambridge, 1961, 195 pag.

Această carte, ce pe lîngă cele aproape 200 de pagini conține și 127 de figuri, urmărește să ilustreze proprietățile unor curbe plane speciale. Cartea cuprinde două părți. Prima parte este intitulată *Curbe speciale* și sînt aici considerate parabola, elipsa, hiperbola, cardioida, melcul, astroida etc.

A doua parte este intitulată *Căi de a găsi noi curbe* și se ocupă de conchoide, cisoide, strofoide, rulete, spirale etc.

Autorul nu urmărește a face în această carte un studiu sistematic al curbelor plane, ci este vorba de a considera prin căi elementare unele proprietăți ale acestor curbe.

Iată de exemplu primul capitol, ce se ocupă de parabolă, pleacă de la proprietatea că fiind dată o dreaptă $Oy$ și un punct $S$ în afara acestei drepte, de exemplu pe perpendiculara la $Oy$ trecînd prin $O$, ducînd prin $S$ drepte care întîlnesc $Oy$ în $Q$ și prin $Q$ drepte perpendiculare la $SQ$, aceste drepte sînt tangentele parabolei, care are focarul în $S$, vîrful în $O$ și ca tangentă în vîrf dreapta $Oy$.

Se arată apoi cum elipsa, hiperbola și parabola pot fi considerate ca secțiuni ale unui con circular drept, proprietate mult studiată de matematica greacă de acum mai bine de două milenii. Autorul spune că primul matematician grec care a studiat secțiunile conice a fost Menaechemus, un elev al lui Platon, și Eudoxus cu patru sute de ani înaintea erei noastre, dar în special Apollonius este acela care a studiat aceste curbe.

Atît pentru studiul secțiunilor conice (elipsa, hiperbola și parabola) cît și pentru celelalte, curbe, autorul utilizează atît ecuațiile curbelor în coordonate carteziene cît și ecuațiile acestor curbe în coordonate polare, precum și alte ecuații. Astfel, pentru cardioidă se utilizează ecuația $\rho = 2\,a(1 - \cos\,\theta)$ în coordonate polare, ecuația intrinsecă $s = 8a\left(1 - \cos\frac{\psi}{3}\right)$, unde $s$ este arcul curbei, precum și alte ecuații.

De asemenea, se dau multe indicații istorice. Astfel se spune că numele de cardioidă a fost utilizat prima oară de Castillon în „The Philosophical Transactions" în 1741, dar curba a fost cunoscută mai înainte (arcul curbei a fost găsit de la Hire în 1708).

În partea a doua, se arată cum se pot construi alte curbe utilizînd diferite metode geometrice, sau curbe deja cunoscute, cum este concoida lui Nicomede, sau concoida dreptei, sau cisoida lui Diocles, sau alte cisoide, sau strofoidele etc.

Cartea prezintă interes atît pentru studenții în matematică cît și pentru studenții din alte specialități, care doresc să-și completeze într-un mod oarecum intuitiv cunoștințele în domeniul curbelor plane. De asemenea, cartea poate să prezinte interes pentru ingineri sau

oameni de artă, căci așa cum spune autorul în prefață, proprietățile unor curbe plane au fost mult utilizate în executarea unor opere de interes artistic sau arhitectonic.

Menționăm de altfel că modul cum cartea a fost tipărită în condiții tipografice perfecte, face să creadă pe cititor că consultă un album artistic și nu o carte de matematică, ceea ce desigur mărește numărul acelora ce pot găsi interes în a consulta cartea.

*Acad. G. Vrănceanu*

V. V. SOLODOWNIKOW, *Grundlagen der selbsttätigen Regelung*, Teile I, II (Bazele reglării automate, part. I, II). VEB Verlag Technik, Berlin; R. Oldenbourg Verlag, München, 1959, 1180 pag.

Sînt binecunoscute rezultatele bogate obținute în U.R.S.S. în teoria sistemelor de reglarei automată, atît liniare, cît mai ales neliniare. De multă vreme se făcea simțită necesitatea unei lucrări care să conțină într-o expunere sistematică întregul aparat matematic al teoriei. O asemenea lucrare este îndreptarul intitulat *Bazele reglării automate* a cărei primă parte *Teoria* a apărut în U.R.S.S. în anul 1954. Colectivul de autori cuprinde pentru fiecare capitol pe unii dintre cei mai de seamă specialiști sovietici. Citățm dintre aceștia pe cîțiva din cei care sînt mai cunoscuți în domeniul matematicilor: M. D. Aizerman, P. V. Bromberg, A. M. Letov, B. N. Petrov, V. V. Kazakevici, Ia. Z. Țîpkin și V. V. Solodovnikov, căruia îi aparține redacția generală.

Prima parte a lucrării este dedicată studiului sistemelor liniare și conține următoarele secțiuni: ecuațiile diferențiale și funcțiile de transfer ale sistemelor de reglare automată, analiza stabilității sistemelor, analiza calității și sinteza dispozitivelor corectoare, elemente din teoria sistemelor cu impulsuri, probleme de analiză și sinteză ale sistemelor cu perturbații aleatoare.

Partea a doua este dedicată teoriei sistemelor neliniare și conține următoarele secțiuni: spațiul fazelor și aplicarea lui în studiul sistemelor de reglare automată, în care un capitol special este consacrat metodei transformărilor punctuale, iar un altul studierii unor sisteme în care se ține seamă de frecarea uscată și de lufturi, folosindu-se spațiile de fază cu mai multe foi; metode aproximative de studiere a regimurilor periodice, în care un capitol este consacrat aplicării metodei parametrului mic; metode de analiză a sistemelor de reglare automată care conțin relee; ultima secțiune conține unele metode grafico-analitice de construire a proceselor tranzitorii. Fiecare secțiune este precedată de o scurtă introducere, care permite orientarea în materialul cuprins în capitolele respective. De asemenea, fiecare capitol are o scurtă introducere generală.

Așa cum se cuvine într-un îndreptar, accentul cade pe scoaterea în evidență a ideilor și a faptelor fundamentale, fără a se da demonstrații. La sfîrșitul fiecărui capitol este indicată bibliografia corespunzătoare. Această bibliografie este din nou centralizată la sfîrșitul lucrării și conține 316 titluri de autori sovietici și 142 titluri ale altor autori.

Ediția germană este realizată fără modificări dar cu adăugarea a încă 67 titluri la bibliografie. Îndreptarul este însoțit de un indice de obiecte (traducerea germană are și un indice de nume). În anexă este prezentată o tabelă de valori ale funcției $h$.

Îndreptarul este indiscutabil util celor care lucrează practic în teoria reglării automate, reprezentînd în același timp un izvor de idei pentru matematicienii care se ocupă de elaborarea problemelor teoretice. Cu toate progresele realizate în acest domeniu în anii care au trecut de la redactarea acestei lucrări (la baza ei a stat culegerea litografiată a unor cursuri ținute în anul 1951), îndreptarul își păstrează în cea mai mare măsură actualitatea.

*A. Halanay*

MAX HERZBERGER, *Modern geometrical optics* (Optica geometrică modernă). Interscience publishers Inc., New York, 1958, X + 504 pag.

Cartea este împărțită în zece părți. În prima parte, autorul începe cu procedee practice de calculul elementelor unei raze de lumină care străbate un sistem optic.

Sînt date scheme de calcul utilizabile cu mașini manuale și electronice, cu formule de control, independente, pentru verificarea calculelor.

Partea a doua privește anteproiectele sistemelor optice. Un capitol este consacrat calculelor preliminarii pentru diferite sisteme optice uzuale (dioptru, lentilă, dublet, triplet, sisteme care cuprind și oglinzi etc.). Un alt capitol în această parte este consacrat modificării datelor constructive într-un sistem optic, ceea ce este de mare importanță în industrie (avînd un sistem optic, să construim unul echivalent în care, de exemplu, sticlele să fie înlocuite cu altele apropiate).

De asemenea, sînt tratate probleme practice de delimitarea fluxului luminos, în sistemele optice, de către monturi și diafragme.

Un întreg capitol este dedicat proprietăților optice ale sticlei optice, ca pregătire pentru studiul și eliminarea cromatismului sistemelor optice.

Legile generale ale opticii geometrice sînt tratate în partea a III-a (găsim aici ecuațiile lui Hamilton, principiul lui Fermat, teorema lui Malus-Dupin, funcția iconală a lui Burns-Hamilton).

În partea a IV-a sînt tratate în mod complet sistemele formate din dioptri concentrici.

În partea a V-a, autorul se ocupă de sistemele optice cu axă de rotație (în domeniul poraxial).

Partea a VI-a cuprinde : studiul congruențelor de normale care se întîlnesc în optică ; studiul unei astfel de congruențe în vecinătatea unei raze principale ; suprafețe caustice și suprafețe de undă ; distribuția energiei luminoase în diferite plane perpendiculare pe raza principală sau pe axa unui sistem optic.

Partea a VII-a cuprinde teoria aproximației de ordinul 3 și 5 în vecinătatea axei optice (formulele lui Seidel și Gullstrand).

Aplicații se găsesc acolo în legătură cu efectul schimbării poziției obiectului și a diafragmei asupra mărimii aberațiilor imaginii.

Calculul coeficienților lui Seidel este făcut complet mai întîi pentru un singur dioptru, iar în capitolul următor sînt date formule de compunere a două sisteme optice (în legătură cu suprapunerea aberațiilor lor).

Partea a VIII-a cuprinde studiul imaginii, pe care o dă un sistem optic, folosind un număr suficient (de mare, dar finit) de raze luminoase care străbat sistemul și formule de interpolare.

Partea a IX-a cuprinde optica geometrică a mediilor neomogene. Într-un apendice (partea a X-a) este dat aparatul matematic necesar citirii cărții.

Foarte interesante comentarii istorice și o bibliografie bogată încheie cartea.

Trebuie să observăm înfățișarea simplă, originală, în multe părți, și ireproșabilă din punct de vedere matematic, pe care o are această carte.

*G. Galbură*

LOTHAR COLLATZ, *Differentialgleichungen für Ingenieure. Eine Einführung.* Bd. I (Introducere în ecuațiile diferențiale, pentru ingineri. I.), B. G. Teubner, Stuttgart, 1960, 197 pag.

Cartea, scrisă pentru ingineri, se ocupă de ecuațiile diferențiale ordinare și cuprinde numai noțiuni sumare despre ecuațiile cu derivate parțiale.

Cele mai importante capitole sînt : ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi ; teoreme de existență ; puncte singulare ; ecuații diferențiale ordinare de ordin superior ; ecuații diferen-

ţiale liniare ; probleme la frontieră şi probleme de valori proprii ; ecuaţii diferenţiale speciale (funcţiile lui Bessel şi funcţii sferice) şi un ultim capitol despre metodele numerice pentru studiul aproximativ al ecuaţiilor diferenţiale.

Sînt expuse unele chestiuni care depăşesc nivelul matematicii elementare. Menţionăm din acestea un studiu al matricelor pătratice şi folosirea funcţiei lui Green pentru soluţia problemelor liniare date la frontieră.

Cartea recenzată cuprinde mai mult material decît poate fi predat în timp de un semestru şi pare mai mult menită să fie o carte de referinţe pentru ingineri. În legătură cu această probabilă întrebuinţare a cărţii, referentul face singura sa critică : greutăţile pe care le întîmpină azi inginerii sînt mai ales în legătură cu rachetele, sateliţii artificiali şi vehiculele spaţiale.

De aceea, ar fi de aşteptat să găsim un capitol referitor la dependenţa soluţiilor de condiţiile iniţiale şi de parametri şi, de asemenea, unul despre teoria stabilităţii a lui Liapunov. Evident, ţinînd seamă de scopul cărţii şi de numărul paginilor ei, nu ar putea fi date demonstraţii complete şi riguroase, dar ar trebui să fie enunţate rezultatele principale şi să fie date exemple de felul cum pot fi aplicate aceste rezultate, aşa cum se face, de exemplu, în cartea lui L. E. Elsgolç.

Critica aceasta nu micşorează meritele cărţii : expunerea este clară şi graficele menite să înlesnească înţelegerea sînt numeroase şi bine alese.

*Vasile Gorciu*

MŰSZAKI KÖNYVTÁR-ORSZÁGOS 1963

## LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori, vol. I,** „Monografii asupra teoriei algebrice a mecanismelor automate", 142 p., 8,25 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee,** 205 p., 9,65 lei.

GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale,** „Monografii asupra teoriei algebrice a mecanismelor automate", 279 p., 12 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei),** 619 p., 25,50 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape periodice,** 191 p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii,** 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare,** 223 p., 8,85 lei.

O. ONICESCU, **Strategia jocurilor cu aplicaţii la programarea liniară,** 228 p., 8,45 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică,** 76 p., 3,15 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice,** 180 p., 7,85 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie – Iaşi, 2—5 iunie 1958,** 264 p., 9,75 lei

Din

**STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE**

au apărut:

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, nr. 1 (10 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare la

LIBRĂRIA ACADEMIEI R.P.R.

Bucureşti, Calea Victoriei nr. 27,

sau la orice librărie ştiinţifică din ţară.

Se pot comanda şi prin poştă la secţia „Cartea prin poştă"
de pe lîngă Librăria Academiei R.P.R., sau la librăria

CARTEA PRIN POŞTĂ

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin Întreprinderea de stat pentu comerţ exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. 2. c. 788

**Lei 7.—**

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XIII, nr. 3 1962

## SUMAR

Pag.

D. BARBILIAN şi N. RADU, Rezolvarea abstractă prin radicali . . . . 377

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. IV Probleme la limită pentru o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior . . . . . 419

E. SCHINDOWSKI, Controlul statistic al calităţii în Republica Democrată Germană . . . . . 439

EUGEN MIHĂILESCU, Sistemul de echivalenţă, conjuncţie şi reciprocitate . 445

ION I. CRISTEA, Două extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue. II 459

V. G. GORCIU, Asupra spaţiilor cu conexiune constantă de gen doi . . . . 479

PAUL CONSTANTINESCU şi VLADIMIR CLEJA, Circuite cu transistori cu două nivele comandaţi pe colector . . . . . 485

N. N. TEODORESCU, Asupra unor spaţii Finsler . . . . . 499

E. BALAŞ, Relaţii de dominaţie în probleme de programare liniară . . . . . 511

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XIII, n° 3 1962

## SOMMAIRE

Page

D. BARBILIAN et N. RADU, Résolution abstractée par des radicaux . . 377

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contributions à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique. IV. Problèmes aux limites pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur . . . . . 419

E. SCHINDOWSKI, Die statistische Qualitätskontrolle in der Deutschen Demokratischen Republik . . . . . 439

EUGEN MIHĂILESCU, Système d'équivalence, conjonction et réciprocité . 445

ION I. CRISTEA, Deux extensions des intégrales de Riemann et de Lebesgue. II 459

V. G. GORCIU, Sur les espaces à connexion constante du genre deux . . . 479

PAUL CONSTANTINESCU et VLADIMIR CLEJA, Circuits à transistors à deux niveaux, commandés sur le collecteur . . . . . 485

N. N. TEODORESCU, À propos d'espaces de Finsler . . . . . 499

E. BALAŞ, Domination relations in problems of linear programming . . . . 511

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XIII, № 3 1962

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Д. БАРБИЛИАН и Н. РАДУ, Абстрактное решение уравнений в радикалах . . . . . 377

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, К изучению уравнений в частных производных параболического типа. IV. Граничные задачи для одного класса уравнений в частных производных высшего порядка . . 419

Е. ШИНДОВСКИ, Статистический контроль качеств производства в ГДР . . . . . 439

ЕУДЖЕН МИХЭИЛЕСКУ, Система эквивалентности, конъюнкции и взаимности . . . . . 445

ИОН И. КРИСТЯ, Два обобщения интегралов Римана и Лебега. II . . . 459

В. Г. ГОРЧИУ, О пространствах с постоянной связностью рода 2 . . . . 479

ПАУЛ КОНСТАНТИНЕСКУ и ВЛАДИМИР КЛЕЖА, Цепи с двумя уровнями с транзисторами, управляемыми через коллектор . . . . 485

Н. Н. ТЕОДОРЕСКУ, О некоторых пространствах Финслера . . . . . 499

Е. БАЛАШ, Отношения доминирования в задачах линейного программирования . . . . . 511

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# REZOLVAREA ABSTRACTĂ PRIN RADICALI

DE

D. BARBILIAN și N. RADU

În notele [1], [2], [3] s-a prezentat o generalizare a noțiunii de radical din teoria ecuațiilor și s-a demonstrat o teoremă asupra rezolvării prin radicalii introduși. În acest articol se dă o prezentare mai detaliată a acestei noțiuni, a noțiunii de derivată grupală folosită în definiția radicalilor, precum și unele exemple și propoziții noi în această direcție.

Pentru dezvoltarea rezultatelor privind teoria radicalilor sînt necesare noțiuni și propoziții asupra extinderilor inductive, dedekindiene și krulliene care sînt prezentate în primul capitol al articolului.

O derivată grupală $\Delta$ se introduce în capitolul II, § 1, ca o *funcție* definită pe o clasă de grupuri cu valori în aceeași clasă, satisfăcînd anumite proprietăți. Se demonstrează propoziții asupra grupurilor $\Delta$-metabeliene (un grup $G$ din clasa considerată se zice $\Delta$-metabelian dacă există un număr natural $k$ astfel ca $\Delta^k G = E$, unde $E$ este grupul unitate) analoge grupurilor rezolubile care apar ca grupuri $\Delta$-metabeliene în cazul în care $\Delta$ este derivata grupală obișnuită. În § 2 al capitolului II se dau cîteva exemple de derivate grupale.

Noțiunea de radical se introduce în capitolul III, într-o clasă de corpuri cu anumite proprietăți, ca o funcție al cărui domeniu de definiție este constituit dintr-un singur element care este o submulțime a unui corp din clasa dată cu valoarea respectivă într-o extindere a corpului care se află în clasa considerată. Aceste funcții trebuie să satisfacă anumite cerințe. Această noțiune de radical conține noțiunea clasică de radical și probabil ea poate fi utilizată nu numai în studiul extinderilor algebrice ci și în cele transcendente sau chiar necomutative. În ultima parte a articolului se dau exemple de radicali în extinderile algebrice și se demonstrează teoreme asupra reprezentării prin radicali analoge teoremei lui Galois din teoria ecuațiilor.

# I

## EXTINDERI DEDEKINDIENE ŞI KRULLIENE

### § 1. CONEXIUNILE KRULL ŞI DEDEKIND ÎN EXTINDERI ARBITRARE

Fie $L$ un supracorp al unui corp $K$, sau, cum vom spune, o extindere a lui $K$, pe care o vom nota cu $L \supset K$, $\frac{L}{K}$ sau $L/K$. Totalitatea automorfismelor lui $L$ care lasă invariant pe $K$ element cu element, formează un grup pe care îl numim grupul lui Galois al extinderii $L/K$ şi-l vom nota prin $\left|\frac{L}{K}\right|$ sau $|L/K|$. Notăm cu $(H)$ structura tuturor corpurilor intermediare ale extinderii $L \supset K$ ($L \supset H \supset K$, $H \in (H)$) şi cu $(G)$ structura tuturor subgrupurilor grupului lui Galois $|L/K|$.

În fond, aşa cum Krull a pus în evidenţă, teoria lui Galois constă într-o legătură care există între aceste două structuri. Şi anume, dacă $H \in (H)$ notăm prin $\mathcal{G}H$ mulţimea acelor automorfisme ale extinderii $L/K$ care lasă pe $H$ invariant element cu element. Se constată uşor că această submulţime a lui $|L/K|$ nu este vidă şi formează un subgrup al lui $|L/K|$, adică $\mathcal{G}H \in (G)$. Dacă $G \in (G)$, notăm cu $\mathcal{H}G$ mulţimea acelor elemente din $L$ care rămîn invariante prin toate automorfismele din $G$. Se verifică uşor că $\mathcal{H}G$ este un subcorp intermediar al extinderii $L/K$, adică $\mathcal{H}G \in (H)$. Funcţiile $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{G}$ definite mai sus le numim respectiv conexiunea lui Dedekind şi conexiunea lui Krull.

Conexiunile $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{G}$ au următoarele proprietăţi:

1) dacă $G_1 \supset G_2$, $G_i \in G$, $i = 1, 2$, atunci $\mathcal{H}G_1 \subset \mathcal{H}G_2$;
dacă $H_1 \supset H_2$, $H_i \in (H)$, $i = 1, 2$, atunci $\mathcal{G}H_1 \subset \mathcal{G}H_2$;

2) dacă $G \in (G)$, $H \in (H)$, atunci $\mathcal{G}\mathcal{H}G \supset G$, $\mathcal{H}\mathcal{G}H \supset H$;

3) $\mathcal{H}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{H}G_1 \cap \mathcal{H}G_2$, $\mathcal{G}(H_1 \cup H_2) = \mathcal{G}H_1 \cap \mathcal{G}H_2$,

pentru $G_i \in (G)$, $H_i \in (H)$ $(i = 1, 2)$ unde $\cup$ şi $\cap$ sînt semnele de reuniune şi intersecţie în structurile respective.

Prin urmare $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{G}$ sînt conexiuni galoisiene în sensul lui Ore [5] între structura corpurilor intermediare $(H)$ şi structura $(G)$ a subgrupurilor grupului lui Galois $|L/K|$ al extinderii $L/K$.

Să considerăm acum funcţiile $\mathcal{H}\mathcal{G}$ şi $\mathcal{G}\mathcal{H}$ care aplică structura $(H)$, respectiv structura $(G)$, în ele însele şi care au următoarele proprietăţi, deductibile imediat din 1), 2), 3).

1. $\mathcal{H}\mathcal{G}H_1 \supset \mathcal{H}\mathcal{G}H_2$, $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 \supset \mathcal{G}\mathcal{H}G_2$ pentru $H_1 \supset H_2$, $G_1 \supset G_2$;

2. $\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{G}H = \mathcal{H}\mathcal{G}H$, $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}G = \mathcal{G}\mathcal{H}G$ pentru $H \in (H)$, $G \in (G)$.

Funcţiile $\mathcal{H}\mathcal{G}$ şi $\mathcal{G}\mathcal{H}$ le numim respectiv operatorii de închidere Dedekind şi Krull ai extinderii, iar un grup $H \in (H)$ se zice închis Dedekind dacă

$$\mathcal{H}\mathcal{G}H = H, \tag{1}$$

și respectiv un grup $G \in (G)$ se zice închis Krull dacă

$$\mathcal{G}\mathcal{H}G = G. \tag{2}$$

O extindere $L/K$ se numește dedekindiană dacă relația (1) este adevărată pentru orice $H$ din $(H)$, iar dacă relația (2) este verificată pentru orice $G \in (G)$ numim extinderea $L/K$ krulliană. O extindere în același timp dedekindiană și kulliană o numim perfectă. Se constată ușor că în extinderile perfecte conexiunile $\mathcal{H}$ și $\mathcal{G}$ se confundă cu un izomorfism dual și inversul său între cele două studii $(G)$ și $(H)$.

Fie $H \in (H)$ un corp intermediar al extinderii $L/K$, atunci $\mathcal{G}H = |L/H|$. Într-adevăr din faptul că $\mathcal{G}H$ este constituit din automorfismele lui $L/K$ care invariază pe $H$ rezultă că $\mathcal{G}H \subset |L/H|$. Pe de altă parte, evident orice automorfism al lui $|L/H|$ invariază pe $K$ element cu element și este deci un automorfism al lui $L/K$, adică $|L/H| \subset \mathcal{G}H$.

Să notăm cu $\mathcal{G}^*H$ totalitatea automorfismelor din $|L/K|$ care lasă invariant global pe $H$. Este clar că $\mathcal{G}^*H \in (G)$ și $\mathcal{G}^*H \supset \mathcal{G}H$.

TEOREMA 1. *Grupul $\mathcal{G}H$ este divizor normal în $\mathcal{G}^*H$ și*

$$\frac{\mathcal{G}^*H}{\mathcal{G}H} \rightleftarrows \left\| \frac{H}{K} \right\|,$$

*unde prin $\left\| \frac{H}{K} \right\|$ s-a notat grupul de automorfisme indus de $\mathcal{G}^*H$ în extinderea $H/K$.*

Demonstrație. Corespondența de la un automorfism din $\mathcal{G}^*H$ la urma sa din $\left\| \frac{H}{K} \right\|$ este un epimorfism al cărui nucleu este tocmai $\mathcal{G}H$.

Din această teoremă, rezultă, în particular, că în cazul în care $H$ este un corp din $(H)$ invariant, adică invariant de grupul lui Galois $|L/K|$, atunci avem izomorfismul

$$\frac{|L/K|}{\mathcal{G}H} \rightleftarrows \left\| \frac{H}{K} \right\|.$$

În același mod se demonstrează și

TEOREMA 2. *Fie $G_1 \supset G_2$ un interval normal al structurii $(G)$. În acest caz $G_1$ este înfășurat de invariantul lui $\mathcal{H}G_2$ și induce un grup*

$$\left\| \frac{\mathcal{H}G_2}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{G_1}{\mathcal{G}\mathcal{H}G_2}.$$

În particular dacă $G$ este divizor normal în $|L/K|$, atunci este invariant și dacă în plus extinderea este krulliană avem izomorfismul

$$\left\| \frac{\mathcal{H}G}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{|L/K|}{G}.$$

## § 2. GRUPUL INDUS

Fie $L/K$ o extindere arbitrară de corpuri şi $H \in (H)$. În paragraful precedent s-a arătat că

$$\frac{\mathcal{G}^* H}{\mathcal{G} H} \rightleftarrows \left\| \frac{H}{K} \right\|,$$

unde $\| H/K \|$ este grupul format de restricţia automorfismelor din $\mathcal{G}^* H$ la $H$ (grupul lui Galois indus în subextinderea inferioară $H/K$ de grupul $\mathcal{G}^* H$). Evident grupul indus $\| H/K \|$ este subgrup al grupului lui Galois $| H/K |$ al extinderii $H/K$.

În acest paragraf dăm, pentru cazul extinderilor comutative, condiţii suficiente ca grupul lui Galois indus să coincidă cu grupul lui Galois al extinderii respective.

TEOREMA 1. *Dacă în $L \supset H \supset K$ subextinderea superioară $L/H$ este transcendentă pură, grupul lui Galois $| H/K |$ al extinderii inferioare $H/K$ este indus de $\mathcal{G}^* H$.*

Demonstraţie. Fie $L = H \langle X \rangle$, unde $X$ este o mulţime oarecare de elemente transcendente (fiecare element fiind transcendent peste corpul generat de $H$ şi de mulţimea celorlalte).

Inelul $H[X]$ este izomorf cu inelul polinoamelor de nedeterminate $X$ cu coeficienţi în $H$. Un element din $H[X]$ se scrie în mod unic ca un polinom cu coeficienţi din $H$, de un număr finit de elemente din $X$. Fie $\alpha$ un automorfism al lui $H$. Definim un automorfism al lui $H[X]$ în modul următor: dacă $\alpha = P(X) \in H[X]$

$$P(X) \to P^{\alpha}(X)$$

adică transformatul lui $P(X)$ este acel polinom din $H[X]$ care are drept coeficienţi transformaţii coeficienţilor lui $P[X)$ prin $\alpha$. Se vede uşor că această transformare este un automorfism al inelului $H[X]$. Acest automorfism se prelungeşte în mod univoc la corpul cîturilor $H[X]$, adică avem

$$H \langle X \rangle \rightleftarrows H^{\alpha} \langle X \rangle. \tag{1}$$

Deci (1) este un automorfism al lui $L$, care evident invariază global pe $H$ şi dacă $\alpha$ invariază element cu element pe $K$, adică aparţine lui $| H/K |$, atunci automorfismul construit al lui $L$ va aparţine lui $\mathcal{G} H$, iar $\alpha$ este tocmai restricţia automorfismului (1) la $H$. Aşadar $| H/K | \subset \| H/K \|$ şi cum incluziunea inversă este totdeauna adevărată rezultă egalitatea $| H/K | = \| H/K \|$.

Fie acum $L/K$ o extindere comutativă arbitrară. Vrem să arătăm că $L = K \langle X \rangle \langle A \rangle$, unde $K \langle X \rangle / K$ este o extindere transcendentă pură, iar $K \langle X \rangle \langle A \rangle / K \langle X \rangle$ este o extindere algebrică. Pentru a arăta acest lucru mai întîi să demonstrăm:

LEMA 1. *Dacă $L/K$ este o extindere comutativă iar $K \langle X \rangle$ o extindere transcendentă a lui $K$ situată în $L$ şi dacă pentru $x \in L$ extinderea*

*$K\langle X\rangle\langle x\rangle/K\langle X\rangle$ este extindere transcendentă, atunci $K\langle X\rangle\langle x\rangle/K$ este extindere transcendentă pură.*

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că dacă $P(y_1, \ldots, y_n)$ este un polinom cu coeficienți în $K$ de un număr finit $n$ de nedeterminate și există $x_i \in [X, x]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ astfel încît $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, obținem și $P(y_1, \ldots, y_n) = 0$. În adevăr, dacă toți $x_i$ aparțin lui $X$, atunci din faptul că extinderea $K\langle X\rangle/K$ este transcendentă pură rezultă $P(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Dacă unul dintre $x_i$, să spunem $x_1$, coincide cu $x$, atunci ordonînd polinomul după $y_1$ obținem:

$$P(y_1, \ldots, y_n) = A_0(y_2, \ldots y_n)\, y_1^{n_1} + \ldots + A_{n_1}(y_2, \ldots, y_n), \qquad (2)$$

unde $A_i(y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n_1$, sînt polinoame de $n-1$ nedeterminate. Să înlocuim în (2) pe $y_i$ cu $x_i$, $i = 2, \ldots, n$; obținem polinomul

$$\overline{P}(y_1) = P(y_1, x_2, \ldots, x_n) = A_0(x_2, \ldots, x_n)\, y_1^{n_1} + \ldots + A_n(x_2, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

cu coeficienți în $K\langle X\rangle$. Dacă $\overline{P}(x_1) = 0$ și $x_1 = x$ este transcendent peste $K\langle X\rangle$, rezultă că în (3) $A_i(x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, și cum $x_i \in X$ pentru $i = 2, \ldots, n$, de aci deducem că $A_i(y_2, \ldots, y_n) = 0$ și deci cu (2) rezultă că $P(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Cu aceasta lema este demonstrată.

Această lemă are o reciprocă care se demonstrează la fel de simplu, de care însă nu avem nevoie aici.

Să notăm acum cu $\widetilde{X}$ mulțimea submulțimilor $X \subset L$, cu proprietatea că $K\langle X\rangle/K$ este o extindere transcendentă pură.

Mulțimea $\widetilde{X}$ este inductivă, căci dacă

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

este o mulțime total ordonată crescătoare ea are în $\widetilde{X}$ o margine superioară, căci $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \in \widetilde{X}$. Într-adevăr, dacă

$$P(y_1, \ldots, y_n)$$

este un polinom nenul din inelul de polinoame $K[y_1, \ldots, y_n]$, astfel încît

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (4)$$

pentru $x_i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci există un număr natural $k$ astfel încît $x_i \in X_k$, $i = 1, \ldots, n$ și din relația (4) ar rezulta că $K\langle X_k\rangle/K$ nu ar fi extindere transcendentă pură, deci putem aplica lema lui Zorn mulțimii $\widetilde{X}$ și, prin urmare, deducem existența unui element maximal $X$ în această mulțime. Să considerăm acum extinderea $K\langle X\rangle/K$ care prin construcție este transcendentă pură. Constatăm că extinderea $L/K\langle X\rangle$ este algebrică, căci în cazul contrar ar exista un element $x \in L$ $x \notin K\langle X\rangle$ astfel încît în extinderea $K\langle X\rangle\langle x\rangle/K$ să fie transcendentă pură și atunci conform lemei, și extinderea $K\langle X\rangle\langle x\rangle/K$ ar fi tot o extindere transcendentă pură, adică $\{X, x\} \in \widetilde{X}$ împotriva maximalității lui $X$.

Așadar s-a demonstrat :

TEOREMA 2. *Orice extindere comutativă poate fi obținută printr-o extindere transcendentă pură urmată de o extindere algebrică* (descompunerea lui Steintz a acestei extinderi).

Definiție. *O extindere comutativă $L/K$ o numim relativ normală, dacă poate fi scrisă sub forma $L = K\langle X\rangle\langle A\rangle$, unde $K\langle X\rangle/K$ este extinderea transcendentă pură iar $L/K\langle X\rangle$ este extindere algebrică normală.*

Sîntem în măsură acum să demonstrăm următorul rezultat asupra grupului indus.

TEOREMA 3. *Orice subextindere algebrică inferioară $H/K$ a unei extinderi relativ normale $L/K$ are grup al lui Galois indus.*

Demonstrație. Fie $L = K\langle X\rangle\langle A\rangle$ o descompunere a extinderii $L/K$ dată prin teorema 2 și astfel încît $L/K\langle X\rangle$ să fie normală. Din

$$L \supset H\langle X\rangle\langle A\rangle \supset K\langle X\rangle\langle A\rangle = L$$

rezultă $L = H\langle X\rangle\langle A\rangle$, unde $H\langle X\rangle$ este extindere transcendentă pură, căci dacă n-ar fi astfel ar exista un polinom $F(y_1, \ldots, y_n)$ cu coeficienți în $H$ și nenul astfel încît $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pentru anumiți $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, din $X$. Dar acest fapt arată că $x_1$ este algebric peste $H\langle x_2, \ldots, x_n\rangle$, iar aceasta este o extindere algebrică a corpului $K\langle x_2, \ldots, x_n\rangle$ și deci $x_1$, conform tranzitivității algebrismului, ar rezulta algebric peste $K\langle x_2, \ldots, x_n\rangle$ ceea ce nu este cazul.

Notăm $H_1 = H\langle X\rangle$, $K_1 = K\langle X\rangle$. Dacă $A$ este un automorfism al extinderii $H/K$, atunci acesta poate fi prelungit conform teoremei 1, la un automorfism $\alpha$ al lui $H_1/K$ (căci $H_1/H$ este, după cum am văzut, o extindere transcendentă pură) care invariază pe $X$ și ca atare $\alpha$ poate fi interpretat și cu un automorfism al extinderii $H_1/K_1$.

Prin ipoteză $L/K_1$ este o extindere algebrică normală și deci teorema s-a redus la cazul extinderilor algebrice normale $L/K$, în care dat fiind corpul intermediar $H$ ($L \supset H \supset K$) și un automorfism $\alpha$ al extinderii $H/K$, se cere să se arate că el se poate prelungi pînă la un automorfism al extinderii $L/K$. Să demonstrăm pentru aceste extinderi următoarea afirmație mai generală :

*Fiind date două corpuri $H_1, H_2 \in (H)$ ale unei extinderi algebrice normale $L/K$, orice izomorfism al lor relativ la $K$* [1]) *poate fi extins pînă la un automorfism din $|L/K|$.* Fie $\alpha_1 \in L$, $\alpha_1 \notin H_1$ ; atunci există $\alpha_2 \in L$, $\alpha_2 \notin H_2$ astfel încît

$$H_1\langle\alpha_1\rangle \rightleftarrows H_2\langle\alpha_2\rangle \tag{5}$$

și acest izomorfism este o prelungire a izomorfismului inițial dintre $H_1$ și $H_2$. În adevăr, fie $f_1(x) = 0$ o ecuație ireductibilă peste $H_1$ verificată de $\alpha_1$ și $f_2(x) = 0$ ecuația obținută din $f_1(x) = 0$ înlocuind coeficienții cu elementele corespunzătoare din $H_2$, iar $\alpha_2$ o rădăcină a ecuației $f_2(x) = 0$ într-o extindere care conține pe $L$. Conform lemei prelungirii izomorfe avem

[1]) Aceasta înseamnă că în acest izomorfism elementele din $K$ rămîn invariante.

izomorfismul (5). Rămîne să arătăm că $\alpha_2 \in L$ (evident $\alpha_2 \notin H_2$; căci $f_1(x) = 0$ și $f_2(x) = 0$ sînt ecuații ireductibile de același grad). Fie $f(x) = 0$ o ecuație ireductibilă peste $K$ verificată de $\alpha_1$; atunci în $H_1$ avem descompunerea

$$f(x) = f_1(x)\, M_1(x),$$

de unde prin izomorfismul relativ la $K$ dintre $H_1$ și $H_2$ obținem în $H_2$ descompunerea

$$f(x) = f_2(x)\, M_2(x).$$

Deoarece $f(x) = 0$ are în $L$ rădăcina $\alpha_1$, iar $L/K$ este extindere normală, rezultă că toate rădăcinile lui $f(x) = 0$ sînt în $L$ și deci și rădăcinile lui $f_2(x) = 0$ se află în $L$; în particular obținem că $\alpha_2 \in L$.

Notăm acum cu $A$ mulțimea perechilor $(H, f)$, unde $H$ este un subcorp al lui $L$ cu $H \supset H_1$, iar $f$ este un izomorfism al lui $H$ în $L$ astfel încît $f(H) \supset H_2$, iar pe $H_1$ $f$ coincide cu izomorfismul dat între $H_1$ și $H_2$. Ordonînd mulțimea $A$ prin $(H, f) \supset (H', f')$ dacă $H \supset H'$ iar $f$ este o prelungire a lui $f'$, se constată ușor că această ordonare satisface ipoteza lemei lui Zorn și ca atare există în $A$ un element maximal care, conform celor arătate mai sus, nu poate fi altul decît $(L, \mathcal{A})$, unde $\mathcal{A}$ este un automorfism al lui $L$.

În particular, de aici rezultă că orice automorfism relativ la $K$, al unui corp intermediar $H$ al extinderii algebrice normale $L/K$, poate fi extins la un automorfism al lui $L$ relativ la $K$ și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Din această teoremă rezultă că pentru o extindere algebrică normală $L/K$, grupul lui Galois indus de $\mathcal{G}^*H$ al unei subextinderi inferioare $H/K$, $L \supset H \supset K$, coincide cu grupul lui Galois al ei.

Dacă $H$ este un corp intermediar al extinderii comutative notăm cu $\sum_H$ corpul format de totalitatea elementelor din $L$ algebrice peste $H$ și o numim înfășurarea algebrică a lui $H$.

Definiție. *O extindere comutativă $L/K$ o numim local normală dacă pentru orice $H \in (H)$ extinderea $\sum_H/H$ este normală.*

Cu ajutorul acestei noțiuni putem enunța:

TEOREMA 4. *Dacă $L/K$ este o extindere local normală, grupul lui Galois $|H/K|$ al unei subextinderi inferioare $H/K$ este indus de $\mathcal{G}^*H$.*

Demonstrație. Deoarece $\sum_H/H$ este o extindere normală, conform teoremei 3 orice automorfism al lui $H/K$ este indus de un automorfism, al extinderii $\sum_H/K$. Fie

$$L = \sum_H \langle X \rangle \langle A \rangle$$

descompunerea lui $L$ într-o extindere transcendentă pură a lui $\sum_H$, urmată de o extindere algebrică. Conform teoremei 1 un automorfism al lui $\sum_H/K$ poate fi extins la un automorfism al lui $\sum_H \langle X \rangle/K$, care la rîndul său, conform teoremei 3, poate fi extins la un automorfism al extinderii $L/K$ căci extinderea $L/\sum_H \langle X \rangle$ este normală.

Definiţie. *O extindere $L/K$ o numim inductivă dacă pentru orice $H \in (H)$, invariant de $|L/K|$, grupul $|H/K|$ este indus de $|L/K|$.*

Din teorema 4 rezultă următoarea

CONSECINŢĂ. *Extinderile local normale sînt inductive.*

## § 3. DETERMINAREA TUTUROR EXTINDERILOR DEDEKINDIENE

În § 1 am numit o extindere $L/K$ dedekindiană dacă pentru orice corp intermediar $L \supset H \supset K$ avem

$$\mathcal{H}\mathcal{G}H = H.$$

R. Baer [6] a determinat extinderile dedekindiene în cadrul extinderilor algebrice, arătînd că acestea se acoperă cu extinderile normale separabile. În acest paragraf determinăm extinderile dedekindiene din cadrul tuturor extinderilor comutative, aşa cum acest lucru se face pentru prima dată în [7].

Pentru a da o mai mare generalitate rezultatelor este nevoie să introducem noţiunea de bază algebrică. O submulţime $(H^*)$ a lui $(H)$ se numeşte bază algebrică a lui $L/K$ dacă următoarea cerere este satisfăcută. Pentru fiecare $H \in (H)$ există $H^* \in (H^*)$, $H^* \subset H$, astfel încît $H/H^*$ este o extindere algebrică. Corpul $H^*$ îl numim un nucleu algebric al lui $H$.

Fie $\Sigma_H$ înfăşurarea algebrică a lui $H$ în $L$. Să arătăm că $\Sigma_H$ este un subcorp invariat de $|L/H| = \mathcal{G}H$. Într-adevăr, dacă $\theta \in \Sigma_H$ şi $\varphi(x)$ este un polinom ireductibil peste $H$ anulat de $\theta$, iar $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}H$, atunci din

$$\varphi(\theta) = 0$$

rezultă

$$\varphi^{\mathfrak{a}}(\theta) = \varphi(\theta^{\mathfrak{a}}) = 0,$$

deci $\theta^{\mathfrak{a}} \in \Sigma_H$, adică $\Sigma_H^{\mathfrak{a}} \subset \Sigma_H$ pentru orice $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}H$, deci avem şi $\Sigma_H^{\mathfrak{a}^{-1}} \subset \Sigma_H$, prin urmare $\Sigma_H^{\mathfrak{a}} = \Sigma_H$ pentru orice $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}H$.

LEMA 1. *Dacă $H^*$ este un nucleu algebric al lui $H$, atunci avem $\Sigma_{H^*} = \Sigma_H$, iar dacă $\Sigma_{H^*}/H^*$ este o extindere normală separabilă, atunci şi $\Sigma_H/H$ este o extindere normală separabilă.*

Demonstraţie. În adevăr, din $H \supset H^*$ rezultă $\Sigma_H \supset \Sigma_{H^*}$ şi cum $\Sigma_H$ este algebrică peste $H$, iar $H$ la rîndul său este o extindere algebrică a lui $H^*$, rezultă că $\Sigma_H$ este extindere algebrică peste $H^*$, adică $\Sigma_{H^*} \supset \Sigma_H$, de unde se deduce egalitatea cerută.

Celelalte două afirmaţii ale lemei se deduc imediat, ţinînd seama de faptul că dacă $A/D$ este o extindere algebrică normală, subextinderea superioară $A/B$ este şi ea normală $(A \supset B \supset D)$, iar dacă $A/D$ este o extindere algebrică separabilă şi $A \supset B \supset C \supset D$, atunci extinderea $B/C$ este de asemenea separabilă.

TEOREMA 1. *Fie $L/K$ o extindere comutativă şi $(H^*)$ o bază algebrică a sa. Dacă $\mathcal{H}\mathcal{G}H^* = H^*$ pentru orice $H^* \in (H^*)$, atunci extinderile $\Sigma_{H^*}/H^*$*

*sînt normale separabile. În particular dacă extinderea $L/K$ este dedekindiană, atunci extinderile $\Sigma_{H^*}/H^*$, și deci și extinderile $\Sigma_H/H$, sînt normale separabile.*

Demonstrație. Fie $f(x)$ un polinom ireductibil peste $H$ care are o rădăcină $\theta_1$ în $\Sigma_{H^*}$.

Fie

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ (i \geqslant 1) \tag{1}$$

toate rădăcinile distincte ale polinomului $f(x)$ situate în $L$, deci în $\Sigma_{H^*}$, și

$$g(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \ldots (x - \theta_i). \tag{2}$$

Dacă $\theta_h$ este un element arbitrar din (1) și $\alpha \in \mathcal{G}H^*$ atunci evident $\theta_h^\alpha \in \Sigma_{H^*}$ și din faptul că $f(\theta_h^\alpha) = \{f(\theta_h)\}^\alpha = 0$ rezultă că $\theta_h^\alpha$ aparține mulțimii (1), adică grupul $\mathcal{G}H^*$ invariază global mulțimea (1) și deci și coeficienții polinomului (2), care sînt funcții simetrice de elementele mulțimii (1). Prin urmare, acești coeficienți aparțin lui $\mathcal{H}\mathcal{G}H^* = H^*$.

Din felul în care a fost ales $g(x)$ rezultă că într-un corp de reducțiune a lui $f(x)$, care conține pe $L$, avem descompunerea

$$f(x) = g(x)\,\bar{g}(x), \tag{3}$$

și cum $f(x)$ și $g(x)$ au coeficienții în $H^*$, conform algoritmului lui Euclid și $\bar{g}(x)$ are coeficienții în $H^*$. Polinomul $f(x)$ este prin ipoteză ireductibil peste $H^*$, prin urmare, din (3) rezultă

$$f(x) = cg(x)$$

unde $c$ este un element din $H^*$. Așadar $\Sigma_{H^*}$ conține o dată cu o rădăcină $\theta_1$ toate rădăcinile polinomului $f(x)$, adică extinderea $\Sigma_{H^*}/H^*$ este normală. Dar din modul în care a fost construit $g(x)$ rezultă că este un polinom separabil ca atare și $f(x)$ este un polinom separabil și deci extinderea $\Sigma_{H^*}/H^*$ este separabilă.

Să demonstrăm acum reciproca acestei teoreme.

Teorema 2. *Fie $L/K$ o extindere comutativă și $(H^*)$ o bază algebrică a sa. Dacă extinderile $\Sigma_{H^*}/H^*$, $H^* \in (H^*)$, sînt normale separabile, atunci extinderea $L/K$ este dedekindiană, adică $\mathcal{H}\mathcal{G}H = H$ pentru orice $H \in (H)$.*

Demonstrație. Să demonstrăm în primul rînd că extinderile $\mathcal{H}\mathcal{G}H = H$ sînt algebrice pentru orice $H \in (H)$. Pentru aceasta să presupunem contrariul, adică că ar exista un $H \in (H)$ astfel încît extinderea $\mathcal{H}\mathcal{G}H/H$ să fie transcendentă.

Considerăm atunci în inelul $H[x]$ două polinoame $p(x)$ și $q(x)$ relativ prime (prime între ele) și astfel încît cel mai mare dintre gradele acestor polinoame să fie mai mare decît 1[1]).

Prin ipoteza raționamentului prin absurd există $\theta \in \mathcal{H}\mathcal{G}H$ transcendent peste $H$. Să punem $\tau = \dfrac{p(\theta)}{q(\theta)}$. Este clar că $\tau \in \mathcal{H}\mathcal{G}H$ și că $\theta$

[1]) Astfel de polinoame există pentru orice corp $H$: dacă $H$ conține trei elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ atunci putem lua $p(x) = x - \alpha_1$, $q(x) = (x - \alpha_2)(x - \alpha_1)$; în cazul contrar considerăm polinoamele $p(x) = x$, $q(x) = x^2 - x + 1$.

este algebric peste $H\langle\tau\rangle$, de unde rezultă că și $\tau$ este transcendent peste $H$, căci altfel din tranzitivitatea algebrismului ar rezulta că și $\theta$ este algebric peste $H$. De aici rezultă că $H[\tau]$ este un inel izomorf cu un inel de polinoame de o nedeterminată peste corpul $H$ și deci este un inel cu ideal principal. Să arătăm că polinomul

$$\tau q(x) - p(x) \tag{4}$$

este ireductibil în $H\langle\tau\rangle$. În adevăr, o descompunere a lui în $H\langle\tau\rangle$

$$\tau\, q(x) - p(x) = r(x)\, s(x), \tag{5}$$

conform lemei lui Gauss este o descompunere în $H[\tau]$ (deoarece coeficienții polinomului (4) sînt în $H[\tau]$). Din faptul că (4) este liniar în $\tau$ rezultă că unul dintre polinoamele $r(x)$, $s(x)$ nu depinde de $\tau$, să zicem $r(x)$, iar celălalt este liniar în $\tau$

$$s(x) = \tau\, \overline{q}(x) - \overline{p}(x).$$

Înlocuind această expresie a lui $S(x)$ în (5) obținem:

$$p(x) = r(x)\, \overline{p}(x),\ q(x) = r(x)\, \overline{q}(x)$$

și deci că $r(x)$ este o constantă, căci $p(x)$ și $q(x)$ sînt relativ prime.

Din ipoteza teoremei, ținînd seama de lema 1, se deduce că extinderea $\sum_{H\langle\tau\rangle}/H\langle\tau\rangle$ este normală separabilă și deci din faptul că polinomul (4) are o rădăcină $\theta$ situată în $\sum_{H\langle\tau\rangle}$ rezultă că totalitatea $\overline{\theta}$ a rădăcinilor polinomului (4) se află în $\sum_{H\langle\tau\rangle}$ și totodată polinomul (4) este separabil.

Prin urmare, extinderea

$$\frac{H\langle\tau\rangle\langle\theta\rangle}{H\langle\tau\rangle} \tag{6}$$

este o extindere normală separabilă finită de grup al lui Galois

$$\left|\frac{H\langle\tau\rangle\langle\theta\rangle}{H\langle\tau\rangle}\right|. \tag{7}$$

Fie $L = H\langle\tau\rangle\langle X\rangle\langle A\rangle$ descompunerea lui Steinitz a extinderii $L/H\langle\tau\rangle$. Din ipoteză rezultă că extinderea $L/H\langle\tau\rangle\langle X\rangle$ este normală așa încît putem aplica pentru extinderea $L/H\langle\tau\rangle$ teorema grupului indus subextinderii algebrice inferioare (6) și deducem că grupul (7) este indus de grupul

$$|L/H\langle\tau\rangle|. \tag{8}$$

Dar grupul (7) fiind grupul unei ecuații ireductibile este tranzitiv pe mulțimea rădăcinilor ecuației, care sînt, datorită felului în care au fost alese polinoamele $p(x)$ și $q(x)$, în număr $\geqslant 2$. Prin urmare, grupul (7), și cu atît mai mult grupul (8), schimbă pe $\theta$, adică $\theta \in \mathcal{K}\mathcal{G}H\langle\tau\rangle$ și cum $\mathcal{K}\mathcal{G}H\langle\tau\rangle \supset \mathcal{K}\mathcal{G}H$ rezultă $\theta \in \mathcal{K}\mathcal{G}H$, împotriva modului în care a fost ales. Deci am demonstrat pînă în prezent că extinderea $\mathcal{K}\mathcal{G}H$ este algebrică; să arătăm acum că gradul acestei extinderi este 1.

Pentru aceasta vom demonstra că fiecare element $\theta \in \mathcal{H}\mathcal{G}H$ are față de $H$ gradul 1. Fie $\varphi(x)$ un polinom ireductibil peste $H$ anulat de $\theta$. Extinderea $\Sigma_H/H$ fiind normală separabilă rezultă că $\varphi(x)$ este un polinom separabil și că mulțimea tuturor rădăcinilor $\overline{\theta}$ ale lui $\varphi(x)$ sînt conținute în $\Sigma_H/H$. Fie $L = H\langle X\rangle\langle A\rangle$ ca și mai sus, descompunerea lui Steinitz a extinderii $L/H$. Deoarece $L/H\langle X\rangle$ este o extindere normală rezultă că grupul lui Galois al extinderii $H\langle\overline{\theta}\rangle/H$ este indus de grupul $|L/H|$ și cum primul este tranzitiv pe mulțimea rădăcinilor lui $\varphi(x)$ ($\varphi(x)$ este polinom ireductibil) cu atît mai mult $|L/H| = \mathcal{G}H$ este tranzitiv pe aceeași mulțime. Însă $\theta \in \mathcal{H}\mathcal{G}H$, prin urmare este invariant de $\mathcal{G}H = |L/H|$; aceasta înseamnă că polinomul $\varphi(x)$ are o singură rădăcină și deci gradul său este 1, adică

$$\mathcal{H}\mathcal{G}H = H.$$

Din teoremele 1 și 2 de mai sus deducem următoarele consecințe.

CONSECINȚA 1. *O condiție necesară și suficientă ca o extindere comutativă $L/K$ să fie dedekindiană este ca înfășurările algebrice $\Sigma_{H^\star}/H^\star$, ale nucleelor uneia din bazele ei algebrice $(H^\star)$, să fie normale separabile.*

CONSECINȚA 2. *Extinderile $L/K$ algebrice dedekindiene se acoperă cu extinderile algebrice de corp de începere dedekindiană închis, adică $\mathcal{H}\mathcal{G}K = K$.*

Într-adevăr, dacă $L/K$ este dedekindiană este clar că condiția este îndeplinită. Reciproc dacă condiția este îndeplinită se observă că deoarece $K$ formează în acest caz o bază algebrică a extinderii $L/K$, conform teoremei 1 deducem că extinderea este dedekindiană.

CONSECINȚA 3. *Extinderile algebrice dedekindiene se acoperă cu extinderile normale separabile.*

Fie $L/K$ o extindere algebrică normală separabilă, cum $K$ constituie o bază algebrică a acestei extinderi și $\Sigma_K/K = L/K$ este separabilă, ținînd seama de teorema 2 deducem că extinderea este dedekindiană. Reciproc dacă extinderea algebrică $L/K$ este dedekindiană atunci conform teoremei 1 $\Sigma_K/K = L/K$ este extinderea separabilă.

Dacă vom numi local separabile, prin analogie cu extinderile local normale, extinderile $L/K$ care au proprietatea ca pentru orice corp intermediar $H$ $(L \supset H \supset K)$ extinderea $\Sigma_H/H$ este separabilă, atunci putem enunța propoziția:

*În cadrul extinderilor comutative, extinderile local normale și separabile și numai ele sînt dedekindiene.*

Extinderile local normale, care după cum am văzut joacă un rol important în caracterizarea extinderilor dedekindiene, au fost introduse în [7] și ulterior ele au fost studiate de W. Krull [8], care a emis și o serie de ipoteze asupra construirii teoriei lui Galois acestora.

Folosind rezultatele de mai sus să arătăm că extinderile dedekindiene pentru corpurile de caracteristică $p > 1$ sînt algebrice.

TEOREMA 3. *O extindere $L/K$, unde $K$ este de caracteristică $p > 1$, care posedă o bază algebrică $(H^\star)$ cu înfășurări $\Sigma_{H^\star}/H^\star$, $H^\star \in (H^\star)$, separabile este algebrică.*

Demonstrație. Să presupunem că $L/K$ ar fi o extindere transcendentă, adică $L > \Sigma_K$. Ar exista atunci un element $\theta \in L$, $\theta \notin \Sigma_K$. Fie $g(x^{p^r})$ cu $r > 0$ un polinom de formă inseparabilă peste $\Sigma_K$. Elementul

$$\tau = g(\theta^{p^r}) \in L$$

este transcendent peste $\Sigma_K$, căci altfel din tranzitivitatea algebrismului ar rezulta $\theta$ algebric peste $K$. De aici rezultă că $\Sigma_K[\tau]$ este un inel cu ideal principal. Se arătăm acum că polinomul

$$\tau - g(x^{p^r}) \tag{9}$$

cu coeficienți în $\Sigma_K[\tau]$ este ireductibil peste $\Sigma_K\langle\tau\rangle$.

În adevăr, dacă ar fi reductibil, atunci, conform lemei lui Gauss, această descompunere are loc în $\Sigma_K[\tau]$, deci

$$\tau - g(x^{p^r}) = t(x)\, s(x),$$

în care unul dintre polinoamele $t(x)$, $s(x)$ peste $\Sigma_K[\tau]$ nu depind de $\tau$, să zicem $s(x)$ (deoarece polinomul dat este liniar în $\tau$). Dacă $u$ este o rădăcină a polinomului $s(x)$ într-un corp de reducțiune al acestuia, care conține pe $\Sigma_K\langle\tau\rangle$, atunci am obține egalitatea

$$\tau - g(u^{p^r}) = 0.$$

Cum $u$ este algebric peste $\Sigma_K$ această egalitate ne-ar spune că $\tau$ ar fi algebric peste $\Sigma_K$ ceea ce nu este posibil. Rămîne deci dovedit că polinomul (9) este ireductibil peste $\Sigma_K\langle\tau\rangle$ și cum el are formă inseparabilă rezultă că este inseparabil peste $\Sigma_K\langle\tau\rangle$. Se vede însă că $\theta$ anulează acest polinom, deci este element inseparabil al extinderii $\Sigma_{\Sigma_K\langle\tau\rangle}/\Sigma_K\langle\tau\rangle$ care știm că este prin ipoteză separabilă, ceea ce evident nu este posibil. Rămîne deci dovedit că $L = \Sigma_K$ și cu aceasta teorema 3 este demonstrată.

Din această teoremă, avînd în vedere faptul că în extinderile dedekindiene înfășurările algebrice $\Sigma_H \cdot /H^*$, $H^* \in (H^*)$, trebuie să fie separabile, rezultă că extinderile dedekindiene $L/K$, unde $K$ are caracteristica $p > 1$, sînt algebrice.

## § 4. DETERMINAREA EXTINDERILOR ALGEBRICE KRULLIENE

În acest paragraf vom determina, în cadrul extinderilor comutative algebrice, pe cele krulliene. Se obține astfel, cu o altă metodă, rezultatul lui Baer [6] și anume că în acest cadru singurele extinderi krulliene sînt cele cu grup finit. Dar metoda de aici folosește numai aspectele generale ale noțiunii de extindere algebrică, astfel încît ea poate fi aplicată și unor extinderi necomutative, care în [7] sînt numite aproape algebrice. Introducem mai întîi noțiunea de *scară de salturi* a unei extinderi.

Fie $L = K\langle \ldots (\theta_\lambda)\rangle$ o extindere arbitrară a cărei mulțime adjunctă o considerăm ca fiind constituită din clase de conjugare $(\theta_\lambda)$ față de grupul

$|L/K|$. Să bineordonăm cu ajutorul axiomei lui Zermelo mulțimea indicilor $\lambda$.

Fie $G = |L/K|$ grupul lui Galois al extinderii $L/K$. Dacă $G > E$, atunci mulțimea acelor elemente adjuncte $\theta_\lambda$ care sînt mișcate de $G$, nu este vidă. Să notăm cu $\theta_{\lambda_1}$ prima clasă de elemente conjugate mișcate de $G$ și să punem

$$\Sigma_{\lambda_1} = K\langle \ldots (\theta_{\lambda_1})\rangle,$$

unde elementele adjuncte sînt formate din $(\theta_{\lambda_1})$ și din toate clasele de conjugare cu indice care precede pe $\lambda_1$. Să considerăm apoi grupul $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_1}$ și dacă $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_1} > E$, atunci mulțimea claselor de conjugare ale căror elemente sînt mișcate de $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_1}$ nu este vidă și deci fie, analog ca mai sus, $(\theta_{\lambda_2})$ prima clasă din mulțimea claselor de conjugare mișcate de $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_1}$. Notăm:

$$\Sigma_{\lambda_2} = K\langle \ldots (\theta_{\lambda_2})\rangle,$$

unde elementele adjuncte sînt formate din $(\theta_{\lambda_2})$ și toate clasele de conjugare cu indice care precede pe $\lambda_2$. Astfel se construiește un șir de clase adjuncte de conjugare

$$(\theta_{\lambda_1}),\ (\theta_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (\theta_{\lambda_i}),\ \ldots,$$

în care $\lambda_i$ precede pe $\lambda_{i+1}$, numite scară de salturi a mulțimii adjuncte $(\ldots, (\theta_\lambda), \ldots)$.

TEOREMA 1. *Grupul lui Galois al unei extinderi cu scară infinită de salturi este nenumerabil.*

Demonstrație. Fie $\Sigma_{\lambda_i}$ un corp intermediar construit ca mai sus; avem atunci izomorfismul

$$\left\| \frac{\Sigma_{\lambda_i}}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{\mathcal{G}^*\Sigma_{\lambda_i}}{\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_i}}.$$

Dar $\mathcal{G}^*\Sigma_{\lambda_i} = \mathcal{G}K = G$, căci $\Sigma_{\lambda_i}$ conține o dată cu un element adjunct pe toți conjugații lui față de $G = |L/K|$. Deoarece $\Sigma_{\lambda_{i+1}} \supset \Sigma_{\lambda_i}$ și aceste corpuri sînt global invariate față de $G$, rezultă omomorfismul

$$\left\| \frac{\Sigma_{\lambda_{i+1}}}{K} \right\| \to \left\| \frac{\Sigma_{\lambda_i}}{K} \right\|.$$

Nucleul acestui omomorfism este constituit din restricția la $\Sigma_{\lambda_{i+1}}$ a acelor automorfisme din $G$ care lasă invariant element cu element pe $\Sigma_{\lambda_i}$; să notăm acest subgrup al lui $\|\Sigma_{\lambda_{i+1}}/K\|$ cu $\|\Sigma_{\lambda_{i+1}}/\Sigma_{\lambda_i}\|$. Avem atunci izomorfismul

$$\left\| \frac{\Sigma_{\lambda_{i+1}}}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{\|\Sigma_{\lambda_{i+1}}/K\|}{\|\Sigma_{\lambda_{i+1}}/\Sigma_{\lambda_i}\|}. \tag{1}$$

Să notăm cu $[\Sigma_{\lambda_i} : K]$ ordinul grupului $\|\Sigma_{\lambda_i}/K\|$. Din faptul că automorfismele lui $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_i}$ mișcă, prin construcție, elementele din clasa de conjugare

$(\theta_{\lambda_{i+1}})$, rezultă că grupul $\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/\Sigma_{\lambda_i} \|$ nu este grupul unitate, deci este de ordin $\geqslant 2$. Atunci din (1) rezultă

$$[\Sigma_{\lambda_{i+1}} : K] \geqslant 2\,[\Sigma_{\lambda_i} : K],$$

adică

$$[\Sigma_{\lambda_i} : K] \geqslant 2^i.$$

Deoarece scara de salturi $(\theta_{\lambda_i})$ este infinită, putem extrage din ea o subscară infinit numerabilă

$$(\theta_{\lambda_1}), (\theta_{\lambda_2}), \ldots, (\theta_{\lambda_n}), \ldots$$

Acestei subscări îi corespunde şirul de subcorpuri

$$\Sigma_{\lambda_1} \subset \Sigma_{\lambda_2} \subset \cdots$$

Fie $\Sigma_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_{\lambda_i}$; atunci din cele de mai sus rezultă

$$[\Sigma_\infty : K] \geqslant 2^{\overline{N}},$$

unde prin $[\Sigma_\infty : K]$ am notat ordinul grupului lui Galois indus, $\| \Sigma_\infty/K \|$, iar prin $\overline{N}$ puterea mulţimii numerabile, relaţie care demonstrează teorema.

TEOREMA 2. *O extindere $L/K$ de grup al lui Galois infinit, în care orice subgrup închis $\mathcal{G}H$ este nenumerabil, este o extindere nekrulliană.*

Demonstraţie. Fie $| L/K |$ grupul lui Galois al extinderii. Acest grup are un subgrup, să-l notăm cu $G_1$, care este numerabil. Deoarece $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1$ este un subgrup închis al lui $| L/K |$ rezultă nenumerabil şi atunci avem sigur $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 > G_1$.

Din aceste două teoreme rezultă următoarele consecinţe.

CONSECINŢA 1. *Dacă extinderea $L/K$ are grup infinit şi toate subextinderile superioare $L/H$ de grup $| L/H |$ infinit au scări de salturi infinite, extinderea este nekrulliană.*

Demonstraţie. Grupul $| L/K |$ are un subgrup numerabil $G_1$ şi avem $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 \supset G_1$; înseamnă că $L/\mathcal{H}G_1$ are grup al lui Galois infinit şi deci acest grup este nenumerabil. Prin urmare, $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 > G_1$.

CONSECINŢA 2. *O extindere krulliană de grup al lui Galois infinit are cel puţin un subgrup închis infinit numerabil.*

CONSECINŢA 3. *O extindere krulliană de grup infinit admite cel puţin o subextindere superioară de grup infinit şi de scară de salturi finită.*

În sfîrşit, pentru extinderile comutative algebrice demonstrăm:

TEOREMA 3. *Extinderile algebrice de grup infinit sînt nekrulliene.*

Demonstraţie. Fie $L = K\langle \ldots, (\theta_\lambda), \ldots \rangle$ o extindere algebrică a cărei mulţime adjunctă a fost completată pînă la o mulţime de clase de conjugare faţă de grupul $| L/K |$. Este clar că extinderea fiind algebrică clasele de conjugare $(\theta_\lambda)$ sînt mulţimi finite şi anume sînt formate din rădăcini ale unui polinom ireductibil peste $K$.

Să construim o scară de salturi a mulțimii adjuncte

$$(\theta_{\lambda_1}),\ (\theta_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (\theta_{\lambda_i}),\ \ldots \tag{2}$$

și corpurile corespunzătoare

$$\Sigma_{\lambda_1} \subset \Sigma_{\lambda_2} \subset \ldots \subset \Sigma_{\lambda_i} \subset \ldots$$

Avem izomorfismul

$$\left\| \frac{\Sigma_{\lambda_i}}{K} \right\| = \frac{\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/K \|}{\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/\Sigma_{\lambda_i} \|}.$$

Dar grupul $\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/\Sigma_{\lambda_i} \|$ este constituit din restricția la $\Sigma_{\lambda_{i+1}}$ a acelor automorfisme ale lui $| L/K |$ care lasă invariant element cu element pe $\Sigma_{\lambda_i}$, deci aceste automorfisme ale lui $\Sigma_{\lambda_{i+1}}$ mișcă mulțimea $(\theta_{\lambda_{i+1}})$ în ea însăși și sînt perfect determinate prin acțiunea lor asupra acestor elemente. Deci acest grup este finit, ordinul său fiind cel mult egal cu ordinul mulțimii $(\theta_{\lambda_{i+1}})$.

Prin urmare, dacă grupul $\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/K \|$ este finit rezultă că și $\| \Sigma_{\lambda_{i+1}}/K \|$ este finit și cum $\| \Sigma_{\lambda_1}/K \|$ este finit deducem că toate grupurile induse $\| \Sigma_{\lambda_i}/K \|$ sînt finite.

Să arătăm acum că scara de salturi (2) este infinită. Într-adevăr, în cazul contrar ar exista un indice finit $n$ astfel încît $\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_n} = E$. Aceasta înseamă

$$\left\| \frac{\Sigma_{\lambda_n}}{K} \right\| = \frac{\mathcal{G}K}{\mathcal{G}\Sigma_{\lambda_n}} = \left| \frac{L}{K} \right|,$$

egalitate care, în virtutea ipotezei, nu poate exista, deoarece $| L/K |$ este infinit în timp ce $\| \Sigma_{\lambda_n}/K \|$ este finit. Rămîne deci stabilit faptul că scara de salturi (2) este infinită și prin urmare, grupul lui Galois $| L/K |$ este nenumerabil. Dacă $\mathcal{G}H$ este un subgrup infinit închis al lui $| L/K |$, atunci el este grupul lui Galois al extinderii algebrice $L/H$ și conform celor demonstrate este nenumerabil. Aplicînd teorema 2 de mai sus, conchidem că extinderea $L/K$ nu este krulliană.

Să arătăm acum că toate extinderile algebrice de grup al lui Galois finit sînt krulliene. Vom demonstra chiar mai mult că orice extindere comutativă cu grup al lui Galois finit este krulliană.

LEMĂ. *Dacă $L = K\langle\theta\rangle$ este o extindere algebrică simplă, iar $\theta_0 = \theta, \theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ sînt rădăcinile distincte, conținute în $L$, ale polinomului $f(x)$ ireductibil peste $K$ anulat de $\theta$, atunci ordinul grupului lui Galois al lui $L/K$ este egal cu $k$, iar automorfismele lui, $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, sînt unic determinate prin acțiunea lor asupra elementelor $\theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Demonstrație. Dacă $\alpha \in | L/K |$, atunci avem $f(\theta^\alpha) = [f(\theta)]^\alpha$ și deci $\theta^\alpha = \theta_i$ iar în plus este clar că automorfismul $\alpha$ este perfect determinat prin acțiunea sa asupra lui $\theta$.

Reciproc, din lema prelungirii izomorfe obținem

$$K\langle\theta\rangle \rightleftarrows K\langle\theta_i\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3}$$

Dar extinderile $K\langle\theta_i\rangle/K$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ au același grad, egal cu gradul polinomului $f(x)$ și cum există incluziunile $K\langle\theta\rangle \supset K\langle\theta_i\rangle \supset K$ rezultă $K\langle\theta\rangle = K\langle\theta_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ deci izomorfismele (3) sînt automorfisme ale lui $K\langle\theta\rangle$.

TEOREMA 4. *Extinderile algebrice cu element primitiv sînt krulliene.*

Demonstrație. Fie $G_1$ un subgrup al lui $|L/K|$. Cu notațiile din lema precedentă rezultă că toate automorfismele $\mathfrak{a}_i$, $i = 0, 1, \ldots, h-1$, din $G_1$ sînt determinate prin proprietățile $\theta^{\mathfrak{a}_i} = \theta_i$, $i = 0, 1, \ldots, h-1$, unde $h$ este un divizor al lui $k$ (eventual renumerotînd rădăcinile $\theta_i$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$) și evident ord $G_1 = h$. Polinomul

$$g(x) = (x - \theta_0)(x - \theta_1) \ldots (x - \theta_{h-1})$$

are coeficienții în $\mathcal{H}G_1$. Fie atunci $g_1(x)$ polinomul ireductibil peste $\mathcal{H}G_1$ anulat de $\theta$, avem grad $g_1(x) \leqslant$ grad $g(x)$. Din egalitatea $L = \mathcal{H}G_1\langle\theta\rangle$, conform lemei precedente rezultă ord $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 =$ grad $g_1(x) \leqslant$ grad $g(x)$. Dar din $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 \supset G_1$ rezultă că ord $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 \geqslant$ ord $G_1$ și de aici $\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 = G_1$.

TEOREMA 5. *O extindere algebrică de grup al lui Galois finit este krulliană.*

Demonstrație. Fie $L/K$ o extindere algebrică de grup $|L/K|$ și $\Sigma$ corpul format din mulțimea tuturor elementelor din $L$ separabile peste $K$. Este clar că $\mathcal{G}K = |L/K|$ invariază global pe $\Sigma$, căci dacă $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{a} \in |L/K|$, atunci $\sigma^{\mathfrak{a}}$ va anula polinomul separabil anulat de $\sigma$, deci $\sigma^{\mathfrak{a}} \in \Sigma$. Așadar este clar că avem pentru $\Sigma$ următoarea reprezentare:

$$\Sigma = K\langle \ldots, (\theta_\lambda), \ldots\rangle, \tag{4}$$

unde prin $(\theta_\lambda)$ s-a notat o clasă completă de conjugați relativ la $|L/K|$. Bineordonăm cu ajutorul axiomei alegerii mulțimea indicilor $\lambda$. Să notăm cu $|(\theta_\lambda)|$ puterea mulțimii $(\theta_\lambda)$. Presupunem că mulțimea acelor indici $\lambda$ pentru care $|(\theta_\lambda)| > 1$ nu este vidă, căci altfel $|L/K|$ și este în mod banal krulliană. Fie $(\theta_{\lambda_1})$ prima clasă în sensul ordonării cu proprietatea că $|(\theta_{\lambda_1})| > 1$ și să transcriem pe (4) sub forma

$$\Sigma = \langle(\theta_{\lambda_1}), (\theta_1), \ldots, (\theta_\lambda), \ldots\rangle \tag{4'}$$

și

$$\Sigma_1 = K\langle(\theta_{\lambda_1})\rangle.$$

Considerăm acum grupul $\mathcal{G}\Sigma_1$ și să considerăm prima clasă din mulțimea $(\theta_1), (\theta_2), \ldots, (\theta_\lambda), \ldots$, din care am scos pe $(\theta_{\lambda_1})$, care este mișcată de $\mathcal{G}\Sigma_1$ (dacă o astfel de clasă există, în cazul contrar $\mathcal{G}\Sigma_1 = E$ și procesul se termină). Fie această primă clasă $(\theta_{\lambda_2})$. Aducem clasa $(\theta_{\lambda_2})$ pe al doilea loc, iar în rest păstrăm vechea ordonare

$$\Sigma = \langle(\theta_{\lambda_1}), (\theta_{\lambda_2}), (\theta_1), (\theta_2), \ldots\rangle$$

și continuăm acest proces. Vrem să arătăm că acest proces se rupe în finit. Să presupunem că ar continua indefinit și fie clasele adjuncte obținute

$$(\theta_{\lambda_1}),\ (\theta_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (\theta_{\lambda_i}),\ \ldots \tag{5}$$

Este clar că șirul (5) poate fi extins pînă la o scară de salturi a extinderii $L/K$ și atunci avem izomorfismul

$$\left\| \frac{\Sigma_i}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{\| \Sigma_{i+1}/K \|}{\| \Sigma_{i+1}/\Sigma_i \|}, \tag{6}$$

unde $\| \Sigma_{i+1}/\Sigma_i \| > 1$. Grupul $\mathcal{G}K$ este prin ipoteză finit și deci cu atît mai mult vor fi finite grupurile din (6). Dar dacă șirul (5) este infinit rezultă că $| L/K |$ este infinit.

Conchidem deci la existența unui număr natural $h$ astfel încît $\mathcal{G}\Sigma_h = E$ și atunci avem

$$\left\| \frac{\Sigma_h}{K} \right\| \rightleftarrows \frac{\mathcal{G}K}{\mathcal{G}\Sigma_h} = \mathcal{G}K.$$

Extinderea $\Sigma_h = K\langle(\theta_{\lambda_1}),\ (\theta_{\lambda_2}),\ \ldots,\ (\theta_{\lambda_h})\rangle$ este o extindere separabilă finită și prin urmare are element primitiv. Deci, conform teoremei 3, este krulliană.

Fie $G_1$ un subgrup al lui $\| \Sigma_h/K \|$; el poate fi considerat și ca subgrup al grupului $| \Sigma_h/K |$ și cum extinderea $\Sigma_h/K$ este krulliană, notînd cu $\widetilde{\mathcal{G}}$ și $\widetilde{\mathcal{H}}$ conexiunile galoisiene relativ la această extindere, avem

$$\widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{H}}G_1 = G_1.$$

Această relație ne spune că automorfismele din $| \Sigma_h/K |$ care lasă invariant element cu element pe $\widetilde{\mathcal{H}}G_1$ sînt în $\| \Sigma_h/K \|$ care la rîndul său este izomorf cu $\mathcal{G}K$, adică avem

$$\widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{H}}G_1 = \mathcal{G}\widetilde{\mathcal{H}}G_1.$$

Acestei relații să-i aplicăm pe $\mathcal{G}\mathcal{H}$ și obținem:

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{H}}G_1 = \mathcal{G}\widetilde{\mathcal{H}}G_1 = \widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{H}}G_1,$$

adică

$$\mathcal{G}\mathcal{H}G_1 = G_1$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 6. *Extinderile comutative cu grup finit sînt krulliene.*

Demonstrație. Fie $L/K$ o extindere comutativă de grup finit $\mathcal{G}K = | L/K |$. Să arătăm că extinderea $L/\mathcal{H}\mathcal{G}K$ este algebrică. În adevăr, dacă $\theta \in L$, numărul conjugaților săi față de $\mathcal{G}K$ este finit $\theta = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{h-1}$, atunci este clar că $\theta$ anulează polinomul

$$g(x) = (x - \theta_0)(x - \theta_1) \ldots (x - \theta_{h-1})$$

care are coeficienţii în $\mathcal{H}\mathcal{Q}K$. Deci extinderea $L/\mathcal{H}\mathcal{Q}K$ este algebrică şi avem

$$\left|\frac{L}{\mathcal{H}\mathcal{Q}K}\right| = \mathcal{Q}\mathcal{H}\mathcal{Q}K = \mathcal{Q}K = |L/K|. \tag{7}$$

Deoarece $|L/K|$ este finit rezultă că $L/\mathcal{H}\mathcal{Q}K$ este krulliană.

Din egalităţile (7) rezultă că un subgrup al lui $|L/K|$ poate fi gîndit ca un subgrup al lui $|L/\mathcal{H}\mathcal{Q}K|$. Cum $L/\mathcal{H}\mathcal{Q}K$ este o extindere krulliană ale cărei conexiuni sînt urme ale conexiunilor extinderii $L/K$ în care ea intră cu subextindere superioară, conchidem că $L/K$ este krulliană.

## II

### GENERALIZAREA NOŢIUNII DE GRUP REZOLUBIL

### § 1. DERIVATĂ GRUPALĂ. GRUPURI METABELIENE

Să considerăm o clasă de grupuri $(G)$ care are proprietatea că o dată cu un grup $G$ conţine toate subgrupurile lui şi toate imaginile omomorfe ale acestora. Fie $\Delta$ o funcţie definită pe $(G)$ cu valori în aceeaşi clasă. Considerăm funcţii care satisfac următoarele axiome:

1. Axioma permiterii $\Delta G \subset G$ pentru orice $G \in (G)$.

2. Axioma subpermutabilităţii: $\Omega\Delta G \subset \Delta\Omega G$ pentru orice $G \in (G)$ şi orice omomorfism $\Omega$ al lui $G$.

3. Axioma monotoniei normale: dacă $G' \supset G''$, $G', G'' \in (G)$, este un interval normal, atunci $\Delta G' \supset \Delta G''$.

3′. Axioma monotoniei ordinare: dacă $G' \supset G''$, $G', G'' \in (G)$, atunci $\Delta G' \supset \Delta G''$.

Dacă funcţia $\Delta$ satisface axiomele 1 şi 2 o numim derivată slabă, dacă satisface axiomele 1, 2 şi 3 o numim derivată normală şi, în sfîrşit, dacă satisface axiomele 1, 2 şi 3′ o numim derivată ordinară. O derivată $\Delta$ care satisface forma întărită a axiomei 2, prin înlocuirea incluziunii cu egalitate, se numeşte în plus permutabilă.

Definiţie. *Un grup $G \in (G)$ se numeşte $\Delta$-metabelian de treaptă $m$ dacă $\Delta^m G = E$ şi $m$ este cel mai mic număr natural cu această proprietate. Un grup $G$ se zice $\Delta$-abelian dacă este $\Delta$-metabelian de treaptă 1.*

LEMA 1. *Dacă $\Delta$ este o derivată slabă definită pe o clasă de grupuri $(G)$ şi dacă $G \in (G)$, atunci $\Delta G$ este un subgrup caracteristic al lui $G$.*

Demonstraţie. Fie $\Omega$ un automorfism arbitrar al lui $G$. Din axioma 2 obţinem:

$$\Omega\Delta G \subset \Delta\Omega G = \Delta G, \tag{1}$$

iar pentru $\Omega^{-1}$ găsim analog

$$\Omega^{-1}\Delta G \subset \Delta G,$$

de unde rezultă

$$\Delta G \subset \Omega \Delta G$$

care cu (1) ne conduce la egalitatea $\Omega \Delta G = \Delta G$.

Pentru orice număr natural $i$ vom înțelege prin $\Delta^i G$ aplicarea succesivă a lui $\Delta$ de $i$ ori, iar prin $\Delta^\circ$ vom înțelege funcția identică pe $(G)$.

CONSECINȚĂ. *Din lema 1 rezultă că dacă $\Delta$ este o derivată slabă, atunci $\Delta^i G$ este caracteristic în $G$ pentru orice număr natural $i$.*

Acest fapt rezultă imediat ținînd seama că proprietatea unui subgrup de a fi caracteristic este tranzitivă, adică dacă $A$ este un subgrup caracteristic al lui $B$, iar $B$ este un subgrup caracteristic al lui $C$, atunci $A$ este subgrup caracteristic al lui $C$.

LEMA 2. *Dacă $G' \supset G''$ este un interval normal ($G', G'' \in (G)$), atunci pentru o derivată normală $\Delta$ există intervalul*

$$\Delta^i G' \supset \Delta^i G'' \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

*și este de asemenea normal.*

Demonstrație. Pentru $i = 0$ relația este banal verificată. Să presupunem că ea este adevărată pentru $i - 1$ și să arătăm că atunci este adevărată și pentru $i$. Prin urmare, avem

$$\Delta^{i-1} G' \supset \Delta^{i-1} G''$$

și acest interval este normal. Conform axiomei 3, de aici rezultă existența intervalului

$$\Delta^i G' \supset \Delta^i G''.$$

Din lema 1 rezultă însă că $\Delta^i G''$ este un subgrup caracteristic al lui $\Delta^{i-1} G''$ care la rîndul său este normal în $\Delta^{i-1} G'$ și deci $\Delta^i G''$ este un subgrup normal al grupului $\Delta^{i-1} G$. Din incluziunile

$$\Delta^{i-1} G' \supset \Delta^i G' \supset \Delta^i G''$$

conchidem că $\Delta^i G''$ este normal în $\Delta^i G'$. Prin urmare, lema a fost demonstrată prin recurență.

CONSECINȚĂ. *Dacă intervalul $G' \supset G''$ este normal, iar $G'$ este $\Delta$-metabelian, $\Delta$ fiind o derivată normală, atunci $G''$ este $\Delta$-metabelian, adică un divizor normal al unui grup $\Delta$-metabelian din clasa $(G)$ este $\Delta$-metabelian.*

În adevăr, fie $j$ un număr natural astfel încît $\Delta^j G' = E$. Din lema 2 obținem $E = \Delta^j G' \supset \Delta^j G''$, adică $\Delta^j G'' = E$.

LEMA 3. *Fie $\Delta$ o derivată ordinară definită pe o clasă de grupuri $(G)$. Dacă $G \in (G)$ atunci $\Delta G$ este un subgrup deplin invariant al lui $G$.*

Demonstrație. Fie $\Omega$ un endomorfism arbitrar al lui $G$. Din $\Omega G \subset G$ aplicînd axioma 3' se obține $\Delta \Omega G \subset \Delta G$ și, conform axiomei 2, găsim

$$\Omega \Delta G \subset \Delta \Omega G \subset \Delta G$$

ceea ce demonstrează lema.

Se verifică imediat că o imagine omomorfă a unui grup $\Delta$-metabelian este $\Delta$-metabelian, dacă $\Delta$ este o derivată slabă permutabilă.

Într-adevăr, fie $G$ un grup $\Delta$-metabelian; din $\Delta^k G = E$ rezultă $\Delta^k \Omega G = \Omega \Delta^k G = E$.

Fie $G$ un grup din $(G)$; vom spune că lanțul finit normal al lui $G$

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = E \tag{2}$$

este $\Delta$-metabelian dacă grupurile factor $G_i/G_{i+1}$, care evident aparțin lui $(G)$, sînt $\Delta$-abeliene.

TEOREMA 1. *Fie $\Delta$ o derivată normală permutabilă, definită pe o clasă $(G)$ de grupuri. O condiție necesară și suficientă ca un grup $G$ din $(G)$ să fie $\Delta$-metabelian este ca $G$ să posede un lanț finit normal $\Delta$-metabelian.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din faptul că dacă $G$ este $\Delta$-metabelian, adică $\Delta^k G = E$, atunci lanțul finit

$$G \supset \Delta G \supset \ldots \supset \Delta^k G = E$$

este, conform lemei 1, format din subgrupuri caracteristice și deci este normal, iar

$$\Delta \frac{\Delta^i G}{\Delta^{i+1} G} = \frac{\Delta^{i+1} G}{\Delta^{i+1} G} = E, \quad \text{pentru } i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

căci $\Delta$ este derivată permutabilă.

Să presupunem că $G$ are un lanț finit normal (2) care este $\Delta$-metabelian. Aceasta înseamnă că avem

$$E = \Delta \frac{G_i}{G_{i+1}} \supset \frac{\Delta G_i}{G_{i+1}}, \quad \text{pentru } i = 0, 2, 3, \ldots, n-1,$$

adică

$$\Delta G_i \subset G_{i+1}, \quad \text{pentru } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Grupul $\Delta G_i$ este însă divizor normal în $G_i$ deci și intervalul (3) este normal. Așadar, putem aplica acestui interval axioma 2, a monotoniei normale, și obținem:

$$\Delta^2 G_i \subset \Delta G_{i+1} \subset G_{i+2}$$

și apoi prin recurență găsim

$$\Delta^j G_i \subset G_{i+j}, \; i = 0, 1, \ldots, n-1, \; j = 1, 2, \ldots, n-i,$$

de unde pentru $i = 0$, $j = n$ deducem

$$\Delta^n G \subset G_n = E.$$

*Observația 1.* În loc de a considera un lanț finit normal $\Delta$-metabelian al grupului $G$ în teorema precedentă, puteam lua un lanț finit caracteristic $\Delta$-metabelian și obțineam același rezultat adică putem enunța:

TEOREMA 2. *O condiție necesară și suficientă ca un grup $G$ din clasa $(G)$ să fie $\Delta$-metabelian, pentru o $\Delta$-derivată normală permutabilă, este ca $G$ să posede un lanț finit caracteristic*

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = E,$$

*astfel încît grupurile factor $G_i/G_{i+1}$, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, să fie $\Delta$-metabeliene.*

*Observația 2.* La demonstrarea necesității condiției dată de teorema 1 s-a folosit numai faptul că $\Delta$ este o derivată slabă permutabilă, iar la demonstrarea suficienței că $\Delta$ este o derivată normală, încît pentru suficiență putem demonstra următorul rezultat mai general:

TEOREMA 3. *Dacă $G$ este un grup din clasa $(G)$, iar $\Delta$ o derivată normală definită pe $(G)$ și dacă $G$ are un lanț finit normal*

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s = E,$$

*cu proprietatea că $G_i/G_{i+1}$, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$, sînt grupuri $\Delta$-metabeliene, atunci $G$ este grup $\Delta$-metabelian.*

Demonstrație. Dacă $G \in (G)$ iar $\Delta$ este o derivată normală definită pe $(G)$, să demonstrăm mai întîi relația

$$\Delta^i \Omega G \supset \Omega \Delta^i G, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

pentru orice omorfism $\Omega$.

Pentru $i = 1$ relația (4) este tocmai axioma 2, încît în acest caz ea se verifică. Să o presupunem adevărată pentru $i - 1$ și să arătăm că din ea rezultă atunci relația (4).

În adevăr, intervalul

$$\Delta^{i-1} \Omega G \supset \Omega \Delta^{i-1} G \tag{5}$$

este normal, deoarece $\Delta^{i-1} G$ este subgrup normal al lui $G$ și deci $\Omega \Delta^{i-1} G$ este subgrup normal al grupului $\Omega G$ și, cu atît mai mult, este subgrup normal al grupului $\Delta^{i-1} \Omega G$. Putem deci aplica intervalului (4) axioma 3 și ținînd seama de axioma 2 deducem

$$\Delta^i \Omega G \supset \Delta \Omega \Delta^{i-1} G \supset \Omega \Delta^i G,$$

adică tocmai relația (4).

Notăm cu $m_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$, treapta de $\Delta$-metabelianitate a grupului $G_i/G_{i+1}$. Atunci, conform relației (4), avem

$$\Delta^{m_i} \frac{G_i}{G_{i+1}} = \frac{\Delta^{m_i} G_i}{G_{i+1}} = E,$$

deci

$$\Delta^{m_i} G_i \subset G_{i+1}.$$

Așadar avem

$$\Delta^{\sum_{i=0}^{s-1} m_i} G = E,$$

adică $G$ este grup $\Delta$-metabelian.

Din teorema demonstrată rezultă :

CONSECINŢA 1. *Extinderea $G \in (G)$ a unui grup $A \in (G)$ $\Delta$-metabelian, printr-un grup $\Delta$-metabelian $B \in (G)$ este un grup $\Delta$-metabelian dacă $\Delta$ este o derivată normală.*

CONSECINŢA 2. *Produsul direct al unui număr finit de grupuri $\Delta$-metabeliene din $(G)$ dacă aparţine lui $(G)$ este de asemenea un grup $\Delta$-metabelian, în cazul în care $\Delta$ este derivată normală.*

TEOREMA 4. *Dacă $\Delta$ este o derivată normală permutabilă şi dacă $G$ are un divizor normal $\Delta$-metabelian maximal $R$, atunci $G/R$ nu conţine nici un divizor normal $\Delta$-metabelian diferit de subgrupul unitate.*

Demonstraţie. Fie $A$ un subgrup $\Delta$-metabelian al lui $G$; avem izomorfismul

$$\frac{R \cup A}{R} \rightleftarrows \frac{A}{R \cap A}. \tag{6}$$

Dacă notăm cu $J$ acest izomorfism, atunci (6) se scrie

$$\frac{R \cup A}{R} = J \frac{A}{R \cap A}. \tag{6'}$$

Fie $i$ treapta de $\Delta$-metabelianitate a lui $R$ şi $j$ cea a lui $A$ ; din (6') rezultă, datorită faptului că derivata $\Delta$ este permutabilă,

$$\Delta^j \frac{R \cup A}{R} = \frac{\Delta^j (R \cup A)}{R} = \Delta^j J \frac{A}{R \cap A} = J \Delta^j \frac{A}{R \cap A} =$$

$$= J \frac{\Delta^j A}{R \cap A} = \frac{E}{R \cap A} = E,$$

adică

$$\Delta^j (R \cup A) \subset R. \tag{7}$$

Intervalul (7) este normal căci, conform lemei 1, $\Delta^j (R \cup A)$ este subgrup caracteristic în $R \cup A$ şi deci este normal în $R \cup A$, adică şi în $R$. Aşadar putem aplica lema 2 intervalului (7) şi obţinem

$$\Delta^{j+i} (R \cup A) \subset \Delta^i R = E,$$

adică $R \cup A$ este un subgrup $\Delta$-metabelian al grupului $G$. Dacă $A$ este divizor normal în $G$, atunci şi $R \cup A$ este divizor normal în $G$. Cum $R$ este maximal printre divizorii $\Delta$-abelieni ai lui $G$ rezultă $R \cup A \subset R$, adică $A \subset R$.

Prin urmare, $R$ conţine pe toţi divizorii normali $\Delta$-metabelieni ai lui $G$. Să arătăm acum că $G/R$ nu conţine divizori normali $\Delta$-metabelieni diferiţi de unitate.

Într-adevăr, fie $B$ un divizor normal $\Delta$-metabelian al lui $G/R$ şi $B'$ ramificarea totală a lui $B$ în epimorfismul $G \rightleftarrows G/R$. Dacă $B$ este $\Delta$-metabelian de treaptă $k$, atunci

$$\frac{\Delta^k B'}{R} = \Delta^k \frac{B'}{R} = \Delta^k I' B = I' \Delta^k B = E, \tag{8}$$

unde cu $I'$ am notat izomorfismul $\frac{B'}{R} \rightleftarrows B$. Din (8) rezultă $\Delta^k B' \subset R$ și cum acest interval este normal obținem

$$\Delta^{k+i} B' \subset \Delta^i R = E,$$

adică $B'$ este divizor normal $\Delta$-metabelian în $G$ și deci, conform celor demonstrate mai sus, avem $B' \subset R$, adică $\frac{B'}{R} = \mathrm{E}$ și deci $B = E$.

Definiție. *Un subgrup $R$ al lui $G$ se numește radical $\Delta$-metabelian al lui $G$ dacă este divizor normal în $G$, este $\Delta$-metabelian, iar grupul factor $G/R$ nu are divizori normali $\Delta$-metabelieni diferiți de subgrupul unitate.*

Cu noțiunea de radical teorema de mai sus poate fi enunțată și astfel : *dacă $R$ este un divizor normal $\Delta$-abelian maximal al grupului $G$, $\Delta$ fiind o derivată normală permutabilă, atunci $R$ este radical al lui $G$.*

*Observație.* Din teorema 4 rezultă că dacă $G$ este grup cu limitare maximală pentru divizorii normali atunci el are radical.

## § 2. EXEMPLE DE DERIVATE GRUPALE

Generalizarea din paragraful precedent a derivatei grupale obișnuite este utilă numai dacă putem construi derivate grupale diferite de derivata grupală clasică. Vom expune în acest paragraf cîteva procedee care conduc la derivate $\Delta$ și unele exemple speciale.

Fie $(G)$ clasa de grupuri formată din toate subgrupurile unui grup $\mathcal{G}$ și din toate imaginile omomorfe ale acestora. Fie $s_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, o mulțime de funcții definite pe grupul $\mathcal{G}$ și pe elementele $\Omega x$ ale imaginilor omomorfe ale subgrupurilor lui $G$, cu valori în inelul întregilor raționali $\mathcal{C}$. Presupunem că $s_i(x)$ sînt permutabile cu orice omomorfism $\omega$ al subgrupului ciclic generat de $x$ în $\mathcal{G}$, adică

$$\omega\,(x^{s_i(x)}) = (\omega x)^{s_i(\omega x)}. \tag{1}$$

Cele mai simple realizări ale sistemului $s_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, sînt constantele din $\mathcal{C}$. În acest caz drept clasă $(G)$ poate fi luată orice clasă de grupuri, în particular clasa tuturor grupurilor. Fiecărui grup $G \in (G)$ îi atașăm un complex de elemente notat cu $X_G$, definit ca mulțimea tuturor produselor (scriere necomutativă) de forma

$$\prod_{j=1}^{n_1} x_j^{s_1(x_j)} \prod_{j=1}^{n_2} x_j^{s_2(x_j)} \ldots \prod_{j=1}^{n_h} x_j^{s_h(x_j)}, \tag{2}$$

unde $h$ și $n_i$ sînt numere naturale (fixe sau variabile) și unde $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ($N$ fiind cel mai mare număr dintre indicii $n_1, \ldots, n_k$) parcurg independent unul de altul grupul $G$.

Definim o derivată grupală punînd

$$\Delta G = (X_G) \text{ pentru orice } G \in (G),$$

unde am notat cu $(X_G)$ grupul generat în $G$ de complexul $X_G$, iar pentru $\Omega G$, $\Delta\Omega G$ se defineşte analog prin înlocuirea în (2) a lui $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, cu $\Omega x_j$. Din modul în care a fost definită pe $(G)$ funcţia $\Delta$, rezultă că ea satisface prima axiomă a derivatei grupale. Din (1) şi (2) rezultă că avem relaţia $\Omega X_G = X_{\Omega G}$ de unde rezultă

$$\Omega \Delta G = \Delta \Omega G.$$

Prin urmare, $\Delta$ satisface şi axioma 2 sub forma tare, adică este o derivată slabă permutabilă. Este clar că din

$$G' \supset G'', \; G', \; G'' \in (G),$$

rezultă

$$X_{G'} \supset X_{G''}$$

şi deci

$$\Delta G' \supset \Delta G'',$$

adică $\Delta$ este chiar derivată ordinară permutabilă.

Să considerăm acum cîteva cazuri particulare.

*Exemplul 1.* Fie $(G)$ clasa tuturor grupurilor. Pentru orice element $x$ al unui grup $G$ punem $s_1(x) = -1$, $s_2(x) = 1$, $s_i(x) = 0$, pentru $i \geqslant 3$. Să considerăm în expresia (2) $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, atunci obţinem pentru un grup $G \in (G)$ complexul

$$X_G = \{x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2\}, \text{ unde } x_1, \; x_2 \in G,$$

care ne conduce la derivata grupală obişnuită pe care o notăm cu $D$.

*Exemplul 2.* Fie $(G)$ clasa tuturor grupurilor. Pentru orice element $x$ aparţinînd unui grup $G$ punem $s_1(x) = s > 1$, $s_i(x) = 0$ dacă $i > 1$. Considerînd în (2) $n = 1$, obţinem pentru un grup $(G)$ complexul

$$X_G = \{x^s\}, \text{ unde } x \in G,$$

care conduce la o derivată pentru care noţiunea de grup $\Delta$-abelian înseamnă grup de exponent $s$.

*Exemplul 3.* Fie $\mathcal{G}$ un grup şi $(G)$ clasa constituită din toate subgrupurile grupului $\mathcal{G}$ şi toate imaginile lor omomorfe. Fie $s_1(x) = s(x)$, $s_i(x) = 0$ dacă $i \geqslant 2$, pentru orice $x \in \mathcal{G}$, unde $s(x)$ este o funcţie cu proprietatea că pentru orice omomorfism $\omega$, al grupului ciclic generat de $x$ în $\mathcal{G}$, există relaţia

$$s(\omega x) = s(x), \text{ pentru } \omega x \neq e. \tag{3}$$

Pentru derivata corespunzătoare, grup $\Delta$-abelian înseamnă grup periodic, în sensul lui A. G. Kuroş, cu perioadele distribuite după legea invariantă (3).

Prin modificări ale expresiei (2) se pot obţine uşor şi următoarele derivate grupale.

*Exemplul 4.* Fie $(G)$ clasa tuturor grupurilor. Unui grup $G$ din $(G)$ îi atașăm complexul $X_G$ de elemente din

$$X_G = \{[\ldots [[x_1 \circ x_2] \circ x_3] \circ \ldots \circ x_k]\},\ x_i \in G,\ i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (4)$$

unde prin [ ] s-a notat comutatorul elementelor respective. Pentru un număr întreg pozitiv dat $k$ complexul (4) generează puterea comutatoare $G^{(k)}$ a cărei definiție recursivă este $G^{(1)} = G$, $G^{(2)} = DG$, $\ldots$, $G^{(k+1)} = [G \circ G^{(k)}]$. Prin urmare, în cazul de față grup $\Delta$-abelian înseamnă grup nilpotent de clasă mai mică decît $k$.

*Exemplul 5.* Tot pe clasa tuturor grupurilor definim și următoarea derivată: dacă $G$ este un grup lui îi atașăm complexul

$$X_G = \{x_1^{-1} x_2^{-m} x_1 x_2^m\},\ x_1, x_2 \in G,$$

unde $m$ este un număr natural $> 1$. Derivata corespunzătoare $\Delta$ conduce la o nouă noțiune de grup $\Delta$-abelian care în acest caz înseamnă grup cu toate puterile $m$ conținute în centru, căci din

$$x_1^{-1} x_2^{-m} x_1 x_2^m = e$$

rezultă

$$x_1 x_2^m = x_2^m x_1.$$

Grupurile hamiltoniene, adică grupurile care generalizează grupurile abeliene, prin cererea ca toate subgrupurile să fie divizori normali pot fi generalizate cu ajutorul următoarei derivate grupale.

*Exemplul 6.* Fie $G$ un grup și $s(x, y)$ o funcție definită pe $G$ cu valori $+1$, $-1$ dacă subgrupul ciclic generat de $y$ în $G$ este infinit, sau în mulțimea numerelor prime cu ordinul dacă grupul ciclic generat de $y$ este finit, și astfel încît

$$s(\Omega x,\ \Omega y) = s(x,\ y)$$

pentru orice omomorfism al lui $G$ diferit de omomorfismul $G \to E$.

Putem atunci defini o derivată grupală $\Delta$ luînd drept complex generator al acesteia, pentru un subgrup $G$, pe

$$X_G = \{x^{-1} y^{-1} x y^{s(x, y)}\},\ x,\ y \in G.$$

Dacă grupul $G$ este $\Delta$-abelian, atunci avem $\Delta G = (X_G) = E$ și ca atare

$$x^{-1} y^{-1} x y^{s(x, y)} = e,$$

sau

$$y^{s(x, y)} = x^{-1} y x$$

și deci

$$(y^{s(x, y)}) = x^{-1} y x.$$

Din ultima relație, conform felului în care a fost aleasă funcția $s(x, y)$, obținem

$$(y) = x^{-1} (y) x,\ \text{pentru}\ x \in G.$$

Prin urmare, subgrupurile ciclice și, de aci, toate subgrupurile lui $G$ sînt normale. În definitiv, în acest caz grup $\Delta$-abelian înseamnă grup hamiltonian cu lege de distribuție $s(x, y)$ invariantă față de omomorfismele lui $G$.

Pornind de la derivatele construite mai sus, prin combinarea lor, putem construi alte derivate cu următorul procedeu.

Fie $\Delta$ și $\Delta_0$ două derivate definite ca mai sus respectiv de complexele $X_G$, $X_G^0$. Considerăm pentru grupul $G$ complexul $X_G^1$ dat de relația

$$X_G^1 = X_G \cap \Delta_0 G.$$

Dacă notăm $\Delta_1 G = (X_G^1)$ se obține o funcție definită pe o clasă de grupuri $(G)$ pe care sînt definite derivatele $\Delta$ și $\Delta_0$. Această funcție satisface evident axiomele 1 și 3. Să verificăm axioma 2. Să căutăm deci complexele $X_{\Omega G}$ cu proprietatea

$$X_{\Omega G} \subset \Delta_0 \Omega G = \Omega \Delta_0 G, \tag{5}$$

care definește funcția $\Delta^1$ pe $\Omega G$, unde $\Omega$ este un omomorfism al grupului $G$. Din (5) rezultă

$$\Omega^{-1} X_{\Omega G} \subset \Omega^{-1} [\Omega \Delta_0 G]. \tag{6}$$

Deoarece

$$X_G \subset \Omega^{-1} X_{\Omega G}$$

din relația (6) rezultă:

$$X_\Omega \subset \Omega^{-1} X_{\Omega G} \subset \Omega^{-1} \Omega \Delta_0 G = \Omega^{-1} \Delta_0 \Omega G.$$

Prin urmare, $\Omega^{-1} X_{\Omega G}^1$ constă din totalitatea elementelor lui $X_G$ cuprinse în $\Omega^{-1} \Delta_0 \Omega G$. Avem însă

$$\Delta_0 G \subset \Omega^{-1} \Omega \Delta_0 G = \Omega^{-1} \Delta_0 \Omega G$$

de unde rezultă

$$X_G^1 \subset \Omega^{-1} X_{\Omega G}^1$$

sau

$$\Omega X_G^1 \subset X_{\Omega G}^1.$$

Deci

$$\Omega \Delta_1 G \subset \Delta_1 \Omega G.$$

Prin urmare, s-a demonstrat că $\Delta_1$ este o derivată ordinară care în general nu este permutabilă.

Un mod de construcție asemănător de derivate grupale ordinare, în general nepermutabile, este următorul:

Fie $\Delta$ și $\Delta_0$ două derivate definite, ca în exemplele 1—6 de mai sus, de complexele $X_G$, $X_G^0$; considerăm pentru un grup dat complexul $X_G^2$ format din totalitatea argumentelor elementelor din $X_G$ care sînt conținute în

$\Delta_0 G$. Notăm $\Delta_2 G = (X_G^2)$. Ne propunem să arătăm că $\Delta_2$, definită pe o clasă de grupuri pe care sînt definite ambele derivate $\Delta$ și $\Delta_0$, este o derivată ordinară.

Complexul $X_{\Omega G}^2$ este prin definiție constituit din totalitatea argumentelor complexului $X_{\Omega G}$ cu proprietatea că

$$X_{\Omega G} \subset \Delta_0 \Omega G = \Omega \Delta_0 G. \tag{7}$$

Din (7) rezultă

$$\Omega^{-1} X_{\Omega G} \subset \Omega^{-1} \Omega \Delta_0 G.$$

Pe de altă parte, din relațiile (1) și (2), prin două incluziuni contrare, se obține ușor că

$$\Omega^{-1} X_{\Omega G} = X_G.$$

Așadar complexul $\Omega^{-1} X_{\Omega G}^2$ este format din totalitatea argumentelor elementelor din $X$ care aparțin grupului $\Omega^{-1} \Omega \Delta_0 G$. Deoarece

$$\Omega^{-1} \Omega \Delta_0 G \supset \Delta_0 G$$

obținem

$$\Omega^{-1} X_{\Omega G}^2 \supset X_G^2,$$

adică

$$X_{\Omega G}^2 \supset \Omega X_G^2$$

și deci

$$\Delta_2 \Omega G \supset \Omega \Delta_2 G.$$

Așadar $\Delta_2$ verifică axioma 2. Se constată ușor că $\Delta_2$ verifică axiomele 1 și 3. Prin urmare, $\Delta_2$ este o derivată ordinară.

Să vedem acum ce înseamnă în acest caz grup $\Delta_2$-abelian. Pentru ca un grup $G$ să fie $\Delta_2$-abelian, adică $\Delta_2 G = E$, este necesar ca $\Delta_0 G = E$, adică să fie $\Delta_0$ -abelian. În adevăr, se observă că $\Delta_2 G \supset \Delta_0 G$ și deci dacă $\Delta_2 G = E$, atunci cu atît mai mult $\Delta_0 G = E$. Pe de altă parte, este clar că $\Delta_2 G = \Delta_0 G$, atunci și numai atunci cînd orice element din $X_G$ aparține lui $\Delta_0$, atunci și numai atunci cînd argumentele lui sînt în $\Delta_0 G$. În particular, $\Delta_2 G = E$ atunci și numai atunci cînd $\Delta_0 G = E$ și orice element din $X_G$ egal cu $e$, are toate argumentele sale egale cu $e$ ($e$ este elementul unitate al grupului $G$).

*Exemplul 7.* Fie $(G)$ clasa tuturor grupurilor pe care putem defini o derivată $\Delta_2$ de tipul de mai sus luînd $\Delta_0 = D$, iar pe $X_G$ din exemplul 2. Pentru $\Delta_2$ astfel obținut grup $\Delta$-abelian înseamnă grup abelian fără elemente de ordine divizori ai lui $s$.

*Exemplul 8.* Fie $\mathcal{G}$ un grup și $(G)$ clasa formată din toate subgrupurile grupului $\mathcal{G}$ și toate imaginile lor omomorfe. Pe $(G)$ definim o derivată $\Delta_2$ luînd pe $\Delta_0 = D$, iar pe $X_G$ din exemplul 3. Pentru $\Delta_2$ astfel construită,

grup $\Delta_2$-abelian este un grup care este abelian şi nu are elemente $\xi$ de ordine divizori ai lui $s(\xi)$.

Exemplele de mai sus de derivate grupale sînt toate derivate ordinare permutabile sau eventual nepermutabile. Acum vom expune un exemplu de derivată care nu este normală.

*Exemplul 9.* Fie $G$ clasa tuturor grupurilor; să punem

$$\Delta G = \text{centrul grupului } G$$

pentru orice grup din $(G)$. Se verifică uşor că $\Delta$ astfel definită este o derivată slabă nepermutabilă şi nenormală.

Nepermutabilitatea acestei derivate se poate proba observînd că dacă $S_n$ este grupul simetric de gradul $n$, $n \geqslant S$, atunci $\Delta S_n = E$. Dacă derivata $\Delta$ ar fi permutabilă am avea $\Omega \Delta S_n = E$ pentru orice omomorfism $\Omega$ al lui $S_n$. Dacă luăm drept $\Omega$ omomorfismul

$$S_n \to \frac{S_n}{A_n},$$

unde $A_n$ este subgrupul altern al lui $S_n$, se observă că $\Delta \Omega S_n > E$ şi deci pentru acest omomorfism avem

$$\Omega \Delta S_n < \Delta \Omega S_n.$$

Aşadar $\Delta$ nu este permutabilă. Faptul că această derivată nu este normală se verifică uşor pe cazul grupului simetric de gradul trei $S_3$. În adevăr, $\Delta S_3 = E$. Dar pentru subgrupul său normal al permutărilor pare $A_3$ avem $\Delta A_3 = A_3$, acesta din urmă fiind grup ciclic. Pentru această derivată grup $\Delta$-abelian înseamnă grup fără centru.

Următorul exemplu pe care îl dăm este de derivată normală permutabilă care nu este ordinară.

*Exemplul 10.* Fie $(G)$ clasa tuturor grupurilor. Oricărui grup $G$ îi ataşăm subgrupul $\Delta G$ al său generat de toţi divizorii normali proprii ai lui $G$, în cazul cînd astfel de divizori există. În cazul contrar, punem $\Delta G = G$. Se constată uşor că $\Delta$ astfel definită este o derivată permutabilă şi normală. Permutabilitatea rezultă din faptul că pentru orice omomorfism nenul $\Omega$ al lui $G$ nucleul său este conţinut în $\Delta G$ şi din aceea că imaginea cît şi imagnea inversă a unui divizor normal printr-un omomorfism este tot un diviizor normal.

Derivata $\Delta$ este normală, căci dacă $G_1$ este un divizor normal al lui $G$ atunci evident $G_1 \subset \Delta G$ şi cu atît mai mult

$$\Delta G \supset \Delta G_1.$$

Se poate arăta că această derivată nu este normală. Într-adevăr, dacă se consideră un grup $G$ cu următoarele proprietăţi: are un singur divizor normal maximal $G_1$ şi un subgrup $G_2 \supset G_1$ cu proprietatea că în $G_2$ există un divizor normal propriu $G_3 > G_1$ atunci evident $\Delta G = G_1$, iar $\Delta G_2 \supset G_3 > G$ şi deci $\Delta G \not\supset \Delta G_2$.

# III

## REZOLVAREA PRIN RADICALI

### § 1. GENERALIZAREA NOȚIUNII DE RADICAL. EXEMPLE

În acest paragraf se extinde noțiunea de radical din teoria rezolvării ecuațiilor algebrice în vederea generalizării construcției prin radicali ai lui Galois.

Fie $(K)$ o clasă de corpuri cu proprietatea că o dată cu un corp $K$ conține toate subcorpurile acestuia și în plus dacă $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ este un lanț crescător de corpuri cu proprietatea $K_i \in (K)$ atunci și $\bigcup K_i \in (K)$. În cele ce urmează prin clasă de corpuri vom înțelege o clasă cu aceste proprietăți.

Să presupunem că oricărui corp $K \in (K)$ îi corespunde o mulțime de funcții $(\rho_K)$, definite pe submulțimi ale lui $K$ cu valori în diverse extinderi ale lui $K$ situate în $(K)$; $\rho_K$ sînt mulțimi de funcții $r_K$ care au ca domeniu de definiție cîte o singură submulțime din $K$ și deci o singură valoare. Prin urmare, între mulțimea funcțiilor și cea a valorilor lor există o corespondență biunivocă și, de aceea, vom nota cu aceeași literă atît funcția cît și valoarea ei. Vom numi elementele submulțimii în care este definită funcția $r_K$ argumente ale sale. Spunem că pe clasa $(K)$ s-a definit un radical dacă sistemul de axiome de mai jos este satisfăcut, iar în acest caz funcția $r_K$ și valoarea ei o vom numi element radical, mulțimea de funcții $\rho_K$ respectiv valorile lor radical, iar $(\rho_K)$ totalitatea radicalilor peste $K$. Atunci cînd nu există pericol de confuzie vom omite indicele $K$.

I. *Axioma lui Steinitz.* Extinderea $K\langle(\rho_K)\rangle$ există, este determinată pînă la echivalențe, pentru orice $K \in (K)$ și aparține clasei $(K)$.

II. *Axioma tranzitivității.* Dacă $\rho \in (\rho_K)$, atunci $\rho$ este radical și peste corpul prim al lui $K$ extins cu argumentele elementelor radicale $r$ din $\rho$ și reciproc.

III. *Axioma finitudinii.* Dacă $K \in (K)$ și $\rho$ este radical peste $K$ atunci mulțimea argumentelor tuturor elementelor $r$ din $\rho$ este finită.

Pentru a enunța axiomele care urmează avem nevoie de definirea cîtorva noțiuni.

Fiind dat un corp $K \in (K)$ și un radical definit pe clasa $K$, atunci definim prin recurență corpurile $K_\lambda$ punînd:

$$K_0 = K,\ K_{\lambda+1} = K_\lambda\langle(\rho_\lambda)\rangle,\ \text{pentru}\ \lambda = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

unde $(\rho_\lambda) = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ este mulțimea radicalilor peste $K_\lambda$. Din axioma I se obține că fiecare $K_\lambda$ există, este determinat pînă la echivalențe și aparține clasei $(K)$.

De aici rezultă că corpul

$$P = \bigcup_{\lambda=0}^{\infty} K_\lambda$$

există, este determinat pînă la o echivalență și aparține clasei $(K)$.

Extinderea $P$ a lui $K$ o numim închiderea radicală a lui $K$, iar corpurile $K_\lambda$ iteratele radicale ale lui $K$. Un corp intermediar $H$ al extinderii $P/K$ îl numim actual dacă există un iterat $K_\lambda$ care îl conţine.

IV. *Axioma invarianţei.* Dacă $H$ este un corp intermediar invariant, actual, al închiderii radicale $P/K$ a lui $K$, iar $\rho$ un radical peste $H$, orice conjugat al lui $\rho$ în $P/K$ este radical peste $H$ (evident $H \in (K)$).

Prin conjugata unei funcţii $r$ definită pe $H$, cu valori evident în $P$, înţelegem funcţia $r'$ care pentru aceleaşi valori ale argumentelor ia valorile conjugate ale lui $r$, faţă de un automorfism al grupului lui Galois $|P/K|$.

V. *Axioma normalităţii.* Dacă $H$ este un corp invariant actual al închiderii radicale $P/K$ a lui $K$, iar $\rho$ un radical peste $H$ există egalitatea de extinderi

$$H\langle\{\rho\}\rangle = H\langle\{\rho_1\}^*, \{\rho_2\}^*, \ldots, \{\rho_n\}^*\rangle, \tag{1}$$

unde s-a notat cu $\{\rho\}$, respectiv $\{\rho_i\}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ clasa de conjugare a mulţimii din paranteză în $P/K$, respectiv $P/H$, iar $\rho_i \to \{\rho\}$, $i = 2, \ldots, n$, $\rho_1 = \rho$, $n$ fiind un număr finit care în general depinde de $H$ şi de $\rho$.

Datorită axiomelor I—IV extinderea din primul membru al egalităţii (1) există şi este determinată pînă la o echivalenţă.

VI. *Axioma $\Delta$-metabelianităţii.* Fiecărui radical $\rho$ peste $K \in (K)$ îi corespunde o înfăşurare $[\rho]$ numită principală

$$\rho \subset [\rho] \subset (\rho),$$

invariantă în $P/K$, aşa încît grupul $\| K\langle[\rho]\rangle/K \|$ indus în $K\langle[\rho]\rangle/K$ de $|P/K|$ să fie $\Delta$-metabelian.

VII. *Axioma inducţiunii.* Extinderea $P/K$ a închiderii radicale este inductivă.

În legătură cu posibilităţile de întărire a axiomelor de mai sus menţionăm că axioma V poate fi înlocuită cu următoarea afirmaţie mai scurtă însă mai restrictivă.

V*. Numărul conjugaţilor radicalului $\rho$ peste $K$ în închiderea radicală $P/K$ a lui $K$ este finit.

Dacă clasa $(K)$ este constituită din subcorpurile unui corp dat $\overline{K}$, atunci evident axioma I este banal verificată. Acesta este cazul radicalilor clasici, în care drept $K$ se poate lua închiderea algebrică a corpului fundamental considerat.

Să trecem acum la demonstrarea cîtorva proprietăţi care rezultă direct din sistemul de axiome de mai sus.

LEMA 1. *Dacă $\rho$ este un radical peste $K \in (K)$, atunci el este radical peste orice corp înfăşurător $H$ al lui $K$, conţinut în $(K)$.*

Demonstraţie. Argumentele elementelor radicale ale lui $\rho$ sînt în $K$, deci în $H$. În virtutea axiomei II, $\rho$ este radical peste corpul prim extins cu aceste argumente care se află în $H$ şi deci, conform aceleiaşi axiome, este radical peste $H$.

LEMA 2. *Dacă $P$ și $P^*$ sînt respectiv închiderile radicale ale lui $K \in (K)$, respectiv $K^* \in (K)$, și dacă $P \supset K^* \supset K$, atunci $P^* = P$.*

Demonstrație. Fie $K_\lambda$ și $K_\lambda^*$ iteratele radicale respectiv ale lui $K$ și $K^*$. Prin ipoteză $K_0 \subset K^*$. Să arătăm prin inducție completă că

$$K_\lambda \subset K_\lambda^*, \text{ pentru } \lambda = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Pentru aceasta presupunem că (2) este adevărată pentru $\lambda$ și vom arăta că de aici rezultă valabilitatea ei și pentru $\lambda + 1$. În adevăr, conform lemei 1, rezultă $\rho_\lambda \in (\rho_\lambda^*)$ și deci

$$(\rho_\lambda) \subset (\rho_\lambda^*), \tag{3}$$

unde am notat prin $(\rho_\lambda)$, respectiv $(\rho_\lambda^*)$, totalitatea radicalilor peste $K$, respectiv peste $K^*$. Din incluziunile (2) și (3) rezultă

$$K_{\lambda+1} \subset K_{\lambda+1}^*,$$

de unde obținem

$$P \subset P^*. \tag{4}$$

Pe de altă parte, prin ipoteză, $K^* = K_0^* \subset P$. Presupunem

$$K_\lambda^* \subset P \tag{5}$$

și să arătăm că aceeași incluziune este adevărată și pentru $\lambda + 1$. Fie $x^* \in K_{\lambda+1}^*$; $x^*$ are în expresia sa polinomială cu coeficienți din $K_\lambda^*$ un număr finit de elemente adjuncte, așadar de valori ale elementelor radicale de treaptă $\lambda$. Prin urmare, în expresia lui $x^*$ intervin prin elementele lor un număr finit de radicali de treaptă $\lambda$. Să notăm cu $|\rho_\lambda^*|$ mulțimea acestor radicali.

În virtutea axiomei III mulțimea argumentelor tuturor elementelor radicale din $|\rho_\lambda^*|$ este finită și din relația (5) se vede că ele aparțin lui $P$. Mulțimea argumentelor elementelor radicale fiind finită și situată în $P$, conform definiției lui $P$, există un iterat radical $K_\mu$ care le conține, și deci, din axioma II, rezultă că $|\rho_\lambda^*|$ este o mulțime de radicali peste $K_\mu$. Conchidem

$$|\rho_\lambda^*| \subset K_{\mu+1}$$

de unde obținem, ținînd seama de (5), că

$$x^* \in K_\lambda^* \langle |\rho_\lambda^*| \rangle \subset P$$

așadar $K_{\lambda+1} \subset P$. S-a demonstrat deci prin inducție că $K_\lambda^* \subset P$ pentru orice $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, de unde găsim

$$P^* \subset P. \tag{4'}$$

Incluziunile (4) și (4') conduc la $P^* = P$ și cu aceasta lema este demonstrată.

*Observaţie.* În demonstraţiile 1 şi 2 s-au folosit numai axiomele I, II şi III.

LEMA 3. *Dacă* $\rho$ *este un radical peste* $K$, *iar* $\Delta$ *o derivată slabă permutabilă, atunci grupul indus* $\left\| \frac{K\langle\{\rho\}\rangle}{K} \right\|$, *unde* $\{\rho\}$ *este clasa de conjugare a radicalului* $\rho$ *în închiderea radicală* $P/K$ *a lui* $K$, *este* $\Delta$*-metabelian.*

Demonstraţie. Din definiţia înfăşurării principale rezultă

$$\{\rho\} \subset [\rho]$$

şi deci

$$K\langle\{\rho\}\rangle \subset K\langle[\rho]\rangle,$$

unde cei doi termeni ai acestei incluziuni sînt corpuri invariante în $P/K$. Din această cauză grupul $\| K\langle\{\rho\}\rangle/K \|$ este inclus chiar de $\| K\langle[\rho]\rangle/K \|$, aşadar el este imagine omomorfă a acestuia. Deoarece $\| K\langle[\rho]\rangle/K \|$ este $\Delta$-metabelian rezultă că şi $\| K\langle\{\rho\}\rangle/K \|$ este $\Delta$-metabelian.

TEOREMA 1. *Fie* $K \in (K)$, $H$ *un corp intermediar invariant al extinderii radicale* $P/K$ *iar* $\Delta$ *o derivată normală permutabilă; atunci grupul* $\| H\langle\{\rho\}\rangle/H \|$, *unde* $\{\rho\}$ *este clasa de conjugare a radicalului* $\rho$ *peste* $K$ *în* $P/K$, *este* $\Delta$*-metabelian.*

Demonstraţie. Deoarece avem $| P/H |$ iar $H\langle\{\rho\}\rangle$ este invariant de $P/K$, avem

$$\left\| \frac{H\langle\{\rho\}\rangle}{H} \right\| \subset \left\| \frac{H\langle\{\rho\}\rangle}{K} \right\|. \tag{6}$$

Membrul al doilea din incluziunea (6) invariază însă global pe $H$. În consecinţă, el induce în extinderea $H/K$ un grup de automorfisme, imagine omomorfă a sa. Nucleul acestui omomorfism este tocmai primul termen din (6). Aceasta înseamnă că intervalul (6) este normal. Din lema 3 rezultă că membrul drept din (6) este $\Delta$-metabelian; atunci, conform consecinţei lemei 3 din cap. II, § 1, obţinem că şi primul membru din (6) este $\Delta$-metabelian, adică tocmai afirmaţia teoremei.

*Observaţie.* Pentru demonstraţia lemei 3 şi a teoremei 1 am folosit din sistemul de axiome numai axiomele I şi IV. Dacă utilizăm şi axioma VII, cum $K\langle\{\rho\}\rangle$ şi $H\langle\{\rho\}\rangle$ sînt extinderi intermediare invariante de $| P/K |$ în lema 3 şi teorema 1 putem înlocui peste tot pe $\| K\langle\{\rho\}\rangle/K \|$ cu $| K\langle\{\rho\}\rangle/K |$ şi pe $\| H\langle\{\rho\}\rangle/K \|$ cu $| H\langle\{\rho\}\rangle/K |$, însă nu putem înlocui pe $\| H\langle\{\rho\}\rangle/H \|$ prin $| H\langle\{\rho\}\rangle/H |$ căci proprietatea de inducţie nu este regresiv tranzitivă.

Trecem acum la expunerea unor exemple de radicali asociaţi exemplelor de derivate grupale care au fost date în cap. II, § 2. Ne mărginim aici la exemple de radicali utili teoriei ecuaţiilor, deşi teoria radicalilor şi generalizarea teoremei lui Galois pe care o vom expune în paragraful următor interesează şi cazul extinderilor necomutative.

Fie $(K)$ clasa tuturor corpurilor comutative şi $\Delta$ o derivată grupală. Să presupunem că într-un mod oarecare (de exemplu, prin inversarea problemei lui Galois) am reuşit să construim ecuaţii peste orice corp $K$

$$f(x) = 0 \tag{7}$$

depinzînd de un număr finit de parametri din $K$ de grup $\Delta$-metabelian (sau mai simplu, $\Delta$-abelian).

Prin definiţie un radical $\rho$ peste $K$ este funcţia care ataşază unui sistem de valori ale parametrilor ecuaţiei (6) o rădăcină a acestei ecuaţii, uniformizată printr-o anumită convenţie, dintr-o anumită închidere algebrică $\overline{K}$ a lui $K$. Mulţimea $(\rho)$ este constituită din totalitatea funcţiilor de tipul indicat pentru diverse valori date parametrilor. În cazul de faţă radicalul coincide cu elementul radical. Înfăşurătoarea principală $[\rho]$ este constituită din totalitatea funcţiilor definite pe sistemul de valori considerat al parametrilor cu valorile rădăcinilor ecuaţiei respective. Să verificăm axiomele din tabloul de mai sus. Axioma I este verificată datorită faptului că $K\langle(\rho)\rangle$ face parte dintr-o închidere algebrică a lui $K$, care închideri sînt determinate pînă la o echivalenţă. Ţinînd seama de faptul că într-o închidere algebrică a unui corp comutativ $K$ o ecuaţie are aceleaşi rădăcini oricare dintre înfăşurătorile corpului minimal al coeficienţilor am luat drept corp iniţial, rezultă că axioma II este şi ea verificată.

Axioma III se verifică imediat datorită faptului că $\rho = r$ iar $r$ are un număr finit de argumente.

Fie $H$ un corp invariant al închiderii radicale $P/K$ ; grupul lui Galois $|P/K|$ duce o rădăcină $r$ a unei ecuaţii de forma (7) cu coeficienţi în $H$ într-o rădăcină a altei ecuaţii peste $H$ de acelaşi tip. Adică dacă $\alpha$ este un automorfism din $|P/K|$, atunci din faptul că $\rho$ este radical peste $H$ rezultă că şi $\rho^{\alpha}$ este radical peste $H$ şi deci axioma IV este verificată. Din faptul că numărul conjugaţilor $\{\rho\}$ ai radicalului $\rho$ în închiderea radicală $P/K$ este cel mult gradul ecuaţiei de definiţie, deducem că axioma V se verifică sub forma tare V*.

Pentru a verifica axioma VI observăm că înfăşurarea principală $[\rho]$ a radicalului $\rho$ este evident invariată de grupul lui Galois $|P/K|$ al închiderii radicale, iar grupul $\|K\langle[\rho]\rangle/K\|$ indus în $K\langle[\rho]\rangle/K$ de $|P/K|$ coincide cu grupul lui Galois $|K\langle[\rho]\rangle/K|$ conform teoremei 2 din capitolul I, § 2, căci extinderea $P/K$ este evident o extindere algebrică normală (corp de reducţiune). Dar grupul $|K\langle[\rho]\rangle/K|$ este prin însăşi alegerea ecuaţiei (7) $\Delta$-metabelian.

Din faptul că extinderea algebrică $P/K$ este normală, conform teoremei 2, cap. I, § 2, rezultă că este inductivă.

*Exemplul 1.* În clasa $(K)$ a corpurilor comutative putem defini radicali, prin intermediul ecuaţiilor de forma

$$x^m - a = 0, \qquad a \in K. \tag{8}$$

Se ştie că grupul lui Galois al ecuaţiei (8) este metabelian (ca subgrup al grupului liniar de o variabilă peste inelul claselor de resturi mod $m$).

Mai menţionăm aici ca radicali ataşaţi derivatei grupale clasice radicalii introduşi de Artin şi Schreier [9], definiţi prin rădăcini de trinoame de forma

$$x^p - x - a = 0, \tag{9}$$

în clasa corpurilor comutative de caracteristică $p > 1$.

Pentru a verifica acest lucru rămîne doar să arătăm că grupul lui Galois al ecuaţiei (9) este rezolubil. Pentru aceasta observăm că ecuaţia este separabilă, iar dacă $\alpha$ este o rădăcină a ei, atunci celelalte rădăcini vor fi $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, ..., $\alpha + p - 1$. Deci corpul de descompunere al ecuaţiei (9) este $K\langle\alpha\rangle$, unde $\alpha$ este o rădăcină oarecare a ei. Deci dacă $\alpha$ nu aparţine lui $K$ (în cazul contrar grupul lui Galois $|K\langle\alpha\rangle/K| = E$), atunci gradul extinderii $K\langle\alpha\rangle$, egal cu ordinul grupului lui Galois al ei, este $p$ şi deci $K\langle\alpha\rangle$ este o extindere ciclică.

*Exemplul 2.* Să considerăm tot clasa tuturor corpurilor comutative $(K)$ şi radicalii definiţi de ecuaţiile peste orice corp $K \in (K)$ :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{s'} a_i x_i = 0, \tag{10}$$

unde $P(x)$ este un polinom normal, separabil peste subcorpul $K'$ al lui $K$ generat de elementele $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, s'$.

În acest caz, derivata este cea din exemplul 4, cap. II, § 2. Ecuaţiile (10) se iau pentru numere $s'$ divizoare ale unui număr dat $s$.

În adevăr, în acest caz grupul lui Galois al ecuaţiei (10) are ordinul un divizor al lui $s'$ şi deci pentru orice element $\alpha$ al său avem $\alpha^s = e$.

Dar din definiţia înfăşurării principale rezultă

$$\left|\frac{K\langle[\rho]\rangle}{K}\right| = \left|\frac{K \cup K'\langle[\rho]\rangle}{K}\right| \subset \left|\frac{K'\langle[\rho]\rangle}{K'}\right|,$$

adică ordinul grupului lui Galois al ecuaţiei (10) faţă de $K$ este un divizor al lui $s'$ şi deci şi al lui $s$ ; ca atare pentru orice $\alpha \in |K\langle[\rho]\rangle/K|$, $\alpha^{s'} = \alpha^s = e$.

*Exemplul 3.* Ca şi în exemplul precedent considerăm clasa corpurilor comutative şi definim în mod analog un radical astfel. Fiind dat un corp $K$, considerăm radicali definiţi prin construcţia generală dată mai sus cu ajutorul ecuaţiilor de tipul

$$\sum_{i=0}^{p^{k'}} a_i x^i = 0, \quad a_i \in K, \tag{11}$$

unde $p$ este un număr prim fixat, $k'$ sînt numere mai mici decît un număr natural $k$ fix, ecuaţia (11) fiind normală separabilă peste subcorpul $K'$ al lui $K$ generat de elementele $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, p^{k'}$, derivata grupală respectivă fiind în acest caz cea din exemplul 4, cap. II, § 2.

Ca şi în exemplul precedent se arată că grupul lui Galois al unei astfel de ecuaţii peste $K$ este nilpotent de treaptă cel mult $k$.

## § 2. TEOREMA LUI GALOIS

Să presupunem că pe o clasă de corpuri $(K)$ s-au definit radicalii $(\rho_k)$. În acest paragraf vom demonstra o teoremă care generalizează condiția necesară, din teoria ecuațiilor, pentru reprezentarea prin radicali.

Definiție. *O mulțime $X$ de elemente luate din diverse extinderi ale unui corp $K \in (K)$ situate în clasă $(K)$, se zice construibilă prin radicali peste $K$ dacă elementele ei aparțin închiderii radicale $P/K$ a lui $K$.*

TEOREMA 1. *Dacă mulțimea finită $X$ este construibilă prin radicali, iar derivata corespunzătoare $\Delta$ este normală permutabilă, atunci grupul lui Galois $| K\langle\{X\}\rangle/K |$ este $\Delta$-metabelian.*

Prin $\{X\}$ am notat aci clasa de conjugare a mulțimii $X$ în închiderea radicală $P/K$.

Demonstrație. Elementele mulțimii $X$ aparținînd închiderii radicale și $X$ fiind o mulțime finită, înseamnă că întreaga mulțime $X$ aparține unui iterat radical. Fie $K_{\Lambda+1}$ primul iterat radical care conține mulțimea $X$. În expresiile elementelor din $X$ peste $K_\Lambda$ intervin un număr finit de radicali peste $K_\Lambda$, prin valorile lor. Fie acești radicali $\rho_\Lambda^1, \rho_\Lambda^2, \ldots, \rho_\Lambda^{n_\Lambda}$. Fie apoi $\rho_{\Lambda-1}^1, \rho_{\Lambda-1}^2, \ldots, \rho_{\Lambda-1}^{n_{\Lambda-1}}$ radicali în număr finit de dreaptă $\Lambda - 1$ care intervin în expresiile elementelor din $X$ sau pentru care unele elemente apar cu argumente pentru radicali de treaptă $\Lambda$ considerați mai sus. Repetînd acest procedeu obținem următorul tabel de radicali, în care radicalii de pe aceeași linie $\lambda$ aparțin corpului iterat $K_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \Lambda)$ și sînt în număr finit:

$$\begin{array}{l} \rho_0^1, \rho_0^2, \ldots, \rho_0^{n_0} \\ \rho_1^1, \rho_1^2, \ldots, \rho_1^{n_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho_\Lambda^1, \rho_\Lambda^2, \ldots, \rho_\Lambda^{n_\Lambda} \end{array} \qquad (1)$$

Este clar că prin construcție fiecare element radical dintr-un radical $\rho_i^j$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \Lambda$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, își are argumentele printre combinațiile corporale peste $K$ de elemente radicale ale unora dintre predecesorii săi în acest tabel.

Să notăm cu $\{\rho_i^j\}$ $(i = 0, 1, \ldots, \Lambda, j = 1, 2, \ldots, n_i)$ clasa de conjugare a radicalului $\rho_i^j$ în închiderea radicală $P/K$ a lui $K$ și să considerăm lanțul de corpuri

$$K = K_0 \subset K^1 \subset \ldots \subset K^i \subset \ldots K^N, \quad N = n_0 + n_1 + \ldots + n_\Lambda, \qquad (2)$$

în care $K^{i+1} = K^i\langle\{\rho^i\}\rangle$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, unde $\rho^i$ este acel radical din tabloul (1) care în numerotarea de la stînga la dreapta ocupă locul $i$. Corpurile $K^i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, sînt invariante în $P/K$ căci

$$K^i = K\langle\{\rho^0\}, \ldots, \{\rho^i\}\rangle.$$

În axioma V, § 1, să luăm $H = K^{i-1}$ ; obţinem atunci $K^i = K^{i-1}\langle\{\rho^{i_1}\}^*, \{\rho^{i_2}\}^*, \ldots, \{\rho^{i_k}\}^*\rangle$, unde $\rho^{i_1} = \rho^i$, $\rho^j$ se află în $\{\rho^i\}$, pentru $j = i_2, \ldots, i_k$, şi conjugarea $\{\ \}^*$ se ia în extinderea $P/K^{i-1}$. Deoarece elementele radicale din $\rho^i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, au argumentele în $K^{i-1}$ înseamnă că $\rho^i$ este radical peste $K^{i-1}$, iar $K^{i-1}$ fiind invariant în $P/K$ şi evident actual, sîntem în condiţiile axiomei IV, § 1 şi deci putem conchide că şi conjugaţii săi în raport cu $|\, P/K\,|$ sînt radicali peste $K^{i-1}$. Notăm

$$K_h^i = K^{i-1}\langle\{\rho^{i_1}\}^*, \{\rho^{i_2}\}^*, \ldots, \{\rho^{i_h}\}^*\rangle,$$
$$i = 0, 1, \ldots, \Lambda,\ h = 1, 0, \ldots, i_k. \tag{3}$$

În lanţul de corpuri (2) să intercalăm şi corpurile de mai sus. Atunci, cu o altă notaţie, găsim şirul de corpuri

$$K = H^0 \subset H^1 \subset \ldots \subset H^M = K^N.$$

Din relaţiile (3) rezultă că $\rho^{i_h}$ este radical şi peste $K^{i-1}$ şi conform lemei 2, § 1, închiderea radicală a lui $K^{i-1}$ este tot $P$. Sîntem acum în condiţiile teoremei 1, § 1, $\rho^{i_h}$ este radical peste $K^{i-1}$, $K_{h-1}^i$ este corp invariant al extinderii $P/K^{i-1}$, iar $\{\rho^{i_h}\}^*$ este clasa de conjugare a radicalului $\rho^{i_h}$ în extinderea $P/K^{i-1}$. Deducem de aici că grupul lui Galois indus de $|\, P/K^{i-1}\,|$

$$\left\| \frac{K_{h-1}^i\langle\{\rho^{i_h}\}\rangle}{K_{h-1}^i} \right\|$$

este $\Delta$-metabelian. Aşadar, conchidem că grupurile

$$\left\| \frac{H^\sigma}{H^{\sigma-1}} \right\|,\ \sigma = 1, 2, \ldots, M, \tag{4}$$

induse respectiv de $|\, P/H^{\sigma-1}\,|$ sînt $\Delta$-metabeliene. Însă corpul $H^M$ este invariat de $|\, P/K\,|$ deci şi de $|\, P/H^{\sigma-1}\,| \subset |\, P/K\,|$. Aşadar grupul (4) este indus de grupul $\|H^M/H^{\sigma-1}\|$ indus de $|\, P/K\,|$.

Avem deci

$$\Omega \left\| \frac{H^M}{H^{\sigma-1}} \right\| = \left\| \frac{H^\sigma}{H^{\sigma-1}} \right\|. \tag{5}$$

Al doilea membru al relaţiei (5) fiind $\Delta$-metabelian rezultă că există un număr natural $m_\sigma$ astfel încît

$$\Delta^{m_\sigma}\Omega \left\| \frac{H^M}{H^{\sigma-1}} \right\| = E$$

sau, ţinînd seama de faptul că $\Delta$ este o derivată permutabilă, obţinem

$$\Omega\,\Delta^{m_\sigma} \left\| \frac{H^M}{H^{\sigma-1}} \right\| = E. \tag{6}$$

Luînd în considerare pe (5), relația (6) se mai poate scrie astfel

$$\Delta^{m_\sigma}\left\|\frac{H^M}{H^{\sigma-1}}\right\| \subset \left\|\frac{H^M}{H^\sigma}\right\|, \tag{6'}$$

căci nucleul omomorfismului (5) este tocmai membrul din dreapta al incluziunii (6'). Dar intervalul

$$\Delta^{m_\sigma}\left\|\frac{H^M}{H^{\sigma-1}}\right\| \subset \left\|\frac{H^M}{H^{\sigma-1}}\right\|$$

este normal, primul membru este chiar caracteristic în cel de-al doilea (a se vedea lema 2, cap. II, § 1). De aici rezultă că și intervalul (6') este normal. Sîntem acum în condițiile teoremei 1, cap. II, § 1, și de acolo deducem că grupul

$$\left\|\frac{H^M}{K}\right\|$$

este $\Delta$-metabelian.

Extinderea $K\langle\{X\}\rangle$ este prin construcția lui $H^M$ inclusă în aceasta din urmă. Însă atunci grupul lui Galois indus $\|K\langle\{X\}\rangle/K\|$ de $|P/K|$ este indus și de $\|H^M/K\|$, adică există omomorfismul

$$\left\|\frac{K\langle\{X\}\rangle}{K}\right\| = \Omega\left\|\frac{H^M}{K}\right\|.$$

Prin urmare grupul din partea stîngă a acestei egalități este $\Delta$-metabelian, ca imagine omomorfă a unui grup $\Delta$-metabelian.

Corpul $K\langle\{X\}\rangle$ este însă corp intermediar invariant al extinderii $P/K$. Ținînd seama de axioma VII de aci rezultă

$$\left\|\frac{K\langle\{X\}\rangle}{K}\right\| = \left|\frac{K\langle\{X\}\rangle}{K}\right|$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

*Observație.* Din demonstrația teoremei se observă că dacă nu utilizăm axioma VII din sistemul de axiome din paragraful precedent, se obține (în aceleași ipoteze) că grupul lui Galois indus $\|K\langle\{X\}\rangle/K\|$ este $\Delta$-metabelian.

Din teorema de mai sus se pot deduce consecințe pentru teoria ecuațiilor. Să formulăm consecințele ce rezultă prin intermediul radicalilor din exemplele 1, 2, 3 din § 1.

CONSECINȚA 1. *O condiție necesară ca o rădăcină a unei ecuații ireductibile*

$$f(x) = 0, \tag{7}$$

*peste un corp comutativ dar arbitrar, să fie reprezentată prin rădăcini de ecuaţii binome*

$$x^n - a = 0,$$

*este ca grupul lui Galois al ecuaţiei* (7) *să fie rezolubil* ($\Delta$ *fiind în cazul de faţă derivata grupală obişnuită*). *În acest caz fiecare rădăcină este de asemenea reprezentabilă prin radicali.*

Pentru radicalii lui Artin şi Schreier, condiţia are aceeaşi formulare.

CONSECINŢA 2. *O condiţie necesară ca o rădăcină a unei ecuaţii ireductibile peste un corp* $K$ *să fie nereprezentabilă prin radicalii introduşi în exemplul* 2, § 1, *este ca grupul lui Galois al ecuaţiei să fie* $\Delta$*-metabelian, unde* $\Delta$ *este derivata grupală din exemplul* 2, *cap.* II, § 2, *iar în acest caz fiecare rădăcină a ecuaţiei admite o reprezentare analogă prin radicali.*

CONSECINŢA 3. *Dacă o rădăcină a unei ecuaţii ireductibile este reprezentabilă prin radicalii introduşi în exemplul* 3 *din* § 1, *atunci grupul lui Galois al ecuaţiei este* $\Delta$*-metabelian, unde* $\Delta$ *este derivata din exemplul* 3, *cap.* II, § 2, *iar fiecare rădăcină admite o reprezentare analogă prin aceiaşi radicali.*

În teoria ecuaţiilor sînt considerate ecuaţii ale căror rădăcini se reprezintă prin rădăcini de ecuaţii binome ireductibile, sau în plus care sînt şi de grad prim. Aceşti radicali satisfac toate axiomele din sistemul de axiome expus în § 1 cu excepţia axiomei II. Fie $(K)$ clasa corpurilor comutative; să notăm cu $(\rho)$ radicalii definiţi de ecuaţiile binome ca în exemplul 1, § 1 şi cu $(\rho')$ radicalii definiţi peste fiecare $K \in (K)$ cu ajutorul ecuaţiilor binome ireductibile de grad prim, radicali care, conform observaţiei precedente, nu verifică axioma II. Se vede însă că pentru orice corp $K \in (K)$, $(\rho'_K) \subset (\rho_K)$ şi dacă notăm cu $P$ respectiv $P'$ închiderile radicale ale lui $K$ faţă de $(\rho)$ respectiv $(\rho')$, atunci avem $P \supset P'$. De aici rezultă că dacă o mulţime finită $X$ aparţine închiderii radicale $P'$ a lui $K$, atunci ea aparţine şi închiderii radicale $P$ a lui $K$, aşa încît grupul lui Galois $|K\langle\{X\}\rangle/K|$ este rezolubil. Aşadar am obţinut:

CONSECINŢA 4. *Dacă o rădăcină a unei ecuaţii ireductibile peste un corp comutativ* $K$ *se reprezintă prin rădăcini de ecuaţii de grad prim ireductibile, atunci grupul lui Galois al ecuaţiei este rezolubil şi fiecare rădăcină a ecuaţiei este reprezentabilă prin aceiaşi radicali.*

Evident rezultate analoge se pot obţine şi pentru celelalte exemple de radicali din § 1.

Să mai menţionăm că dacă considerăm clasa corpurilor comutative de caracteristică $p > 1$, atunci, prin raţionamente analoge celor de mai sus, din teorema demonstrată se deduce:

CONSECINŢA 5. *Dacă o rădăcină a unei ecuaţii ireductibile peste corpul* $K$ *de caracteristică* $p > 1$ *este reprezentabilă prin rădăcini de ecuaţii de forma*

$$x^q - a = 0, \quad p \times q,$$

$$x^p - x + a = 0,$$

*atunci grupul lui Galois al ecuaţiei este rezolubil şi toate rădăcinile ei se reprezintă prin radicali de acelaşi tip.* Acest rezultat se află în [10].

Reciproca teoremei 1 de mai sus în condițiile în care ne situăm nu o putem demonstra fără alte cerințe impuse radicalilor. Deși după cum se va vedea nu toate proprietățile radicalilor apar ca necesare.

Să presupunem că pe o clasă de corpuri $(K)$ s-a definit un radical $(\rho)$ față de $\Delta$-derivata normală permutabilă care are în plus proprietatea :

1. Dacă $H$, $K \in (K)$ și $H$ este o extindere a lui $K$ astfel încît grupul $|H/K|$ este $\Delta$-abelian, atunci $H$ este un corp actual al închiderii radicale $P/K$.

TEOREMA 2. *Fie* $(\rho)$ *radicalii definiți peste o clasă* $(K)$ *de corpuri și care verifică proprietatea 1 de mai sus. Dacă extinderea inductivă krulliană* $L/K$ *cu* $L$ *și* $K$ *din* $(K)$ *este astfel încît grupul* $|L/K|$ *este* $\Delta$*-metabelian, atunci* $L$ *este un corp actual al extinderii* $P/K$, *unde* $P$ *este închiderea radicală a lui* $K$.

Demonstrație. Să considerăm lanțul de grupuri

$$|L/K| = G > \Delta G > \Delta^2 G > \ldots > \Delta^n G = E,$$

unde $n$ este treapta de $\Delta$-metabelianitate a lui $|L/K|$. Să considerăm apoi corpurile corespunzătoare acestui șir de grupuri în extinderea $L/K$,

$$K \subset \mathcal{H}G \subset \mathcal{H}\Delta G \subset \ldots \subset \mathcal{H}\Delta^{n-1} G \subset L.$$

Deoarece $\Delta G$ este caracteristic în $G$, conform teoremei 1, cap. I, § 1, avem, ținînd seama de inductivitatea și krullianitatea extinderii,

$$\left\| \frac{\mathcal{H}\Delta^{n-1} G}{K} \right\| = \left| \frac{\mathcal{H}\Delta^{n-1} G}{K} \right| \rightleftarrows \frac{G}{\mathcal{G}\mathcal{H}\Delta^{n-1} G} = \frac{G}{\Delta^{n-1} G}.$$

Să observăm că și extinderea $\mathcal{H}\Delta^{n-1} G/K$ este inductivă și deoarece $\Delta$ este derivată permutabilă avem

$$\Omega\Delta^{n-1} G = \Delta^{n-1}\, \Omega G$$

și dacă considerăm pe $\Omega$ drept omomorfismul

$$G \to \frac{G}{\Delta^{n-1} G}$$

obținem că grupul $G/\Delta^{n-1} G$ este $\Delta$-metabelian de treaptă cel mult $n-1$. Să observăm că extinderea $\mathcal{H}\Delta^{n-1} G/K$ este de asemenea krulliană. Demonstrînd teorema prin inducție în raport cu treapta de $\Delta$-metabelianitate a grupului extinderii, putem presupune că pentru extinderea $\mathcal{H}\Delta^{n-1} G/K$ afirmația teoremei este adevărată. Grupul extinderii $L/\mathcal{H}\Delta^{n-1} G$ este $\mathcal{G}\mathcal{H}\Delta^{n-1} = \Delta^{n-1} G$ care este $\Delta$-abelian, prin urmare $L$ este un corp actual al închiderii radicale a lui $\mathcal{H}\Delta^{n-1} G$, care la rîndul său este un corp actual al închiderii radicale a lui $K$ prin ipoteză inductivă, așadar $L$ este corp actual al închiderii radicale a lui $K$ și teorema este demonstrată.

*Observație.* Din demonstrația teoremei se observă că condiția 1 de mai sus poate fi slăbită, cerînd ca ea să fie îndeplinită pentru anumite

tipuri de grupuri Δ-abeliene, însă atunci în ipoteza teoremei trebuie să cerem ca grupul lui Galois $G$ al extinderii $L/K$ să aibă un lanț normal

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = E$$

cu factorii $G_i/G_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, Δ-abelieni şi de tipul indicat. De exemplu, dacă considerăm clasa corpurilor comutative $(K)$ de caracteristică $p = 0$, Δ este derivata grupală obişnuită iar radicalii sînt rădăcinile ecuațiilor binome, atunci condiția 1 este verificată pentru extinderile ciclice şi pentru un grup rezolubil finit $G$ există un şir de tipul (2) astfel încît $G_i/G_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, este grup ciclic.

Dacă se consideră o extindere algebrică ataşată unei ecuații cu coeficienți într-un corp $K \in (K)$ astfel încît grupul lui Galois al ei să fie rezolubil, condițiile teoremei de mai sus sînt îndeplinite şi obținem reciproca consecinței 1 a teoremei 1. În mod analog, aşa cum se face în [10], se poate obține o reciprocă a consecinței 5 a teoremei 1.

Primită la redacție la 7 aprilie 1962

## АБСТРАКТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

### РЕЗЮМЕ

В заметках [1], [2], [3] дано обобщение понятия о радикале в теории уравнений и доказана теорема о решении уравнений в введенных радикалах. В настоящей работе дается более детальное изложение этого понятия, понятия о групповой производной, используемой в определении радикалов, а также некоторые примеры и новые предложения в этом направлении.

Для развития результатов о теории радикалов необходимы понятия и предложения об индуктивных, дедекиндовых и круллевых расширениях, которые излагаются в главе 1.

Групповая производная Δ вводится в главе II, § 1 как „функция", определенная на классе групп со значениями в том же классе, удовлетворяющая некоторым условиям. Доказываются предложения о Δ-метабелевых группах (группа $G$ рассматриваемого класса называется Δ-метабелевой, если существует натуральное $k$ такое, что $\Delta^k G = E$, где $E$ — единичная группа), аналогичных разрешимым группам, которые являются Δ-метабелевыми в случае, когда Δ—обычная групповая производная. В § 2 главы II дается несколько примеров групповых производных.

Понятие о радикале вводится в § 1 главы III в классе полей с определенными свойствами, как функция, область определения которой состоит из одного элемента, являющегося подмножеством поля из данного класса, со значением в расширении поля, находящегося в рассма-

триваемом классе. Эти функции должны удовлетворять некоторым требованиям. Такое понятие радикала содержит классическое понятие радикала и, вероятно, может быть использовано не только при изучении алгебраических, но также при изучении трансцендентных или даже некоммутативных расширений. В последней части работы даются примеры радикалов в алгебраических расширениях и доказываются теоремы о представлении в радикалах, аналогичные теореме Галуа из теории уравнений.

## RÉSOLUTION ABSTRACTÉE PAR DES RADICAUX

RÉSUMÉ

Les notes [1], [2], [3] avaient présenté une généralisation de la notion de radical de la théorie des équations et démontré un théorème concernant la résolution par les radicaux introduits. Cette fois les auteurs présentent d'une manière plus détaillée cette notion, la notion de dérivée groupale, utilisée dans la définition des radicaux ainsi que des exemples et des propositions nouvelles dans cette direction.

Pour le développement des résultats relatifs à la théorie des radicaux, il faut disposer de notions et de propositions sur les extensions inductives, dédékindiennes et kroulléennes, qui figurent au premier chapitre de l'article.

Au chapitre II, paragr. 1, on introduit une dérivée groupale $\Delta$ définie, comme une «fonction», par une classe de groupes à valeurs dans la même classe et satisfaisant à certaines propriétés. Les auteurs démontrent des propositions au sujet des groupes $\Delta$-métabéliens (un groupe $G$ de la classe considérée est dit $\Delta$-métabélien s'il existe un nombre naturel $k$ tel que $\Delta^k G = E$, où $E$ est le groupe unité), analogues aux groupes résolubles qui apparaissent comme des groupes $\Delta$-métabéliens lorsque $\Delta$ est la dérivée groupale ordinaire. On trouve au paragr. 2 du chapitre II quelques exemples de dérivées groupales.

La notion de radical est introduite au paragr. 1 du III$^e$ chapitre dans une classe de corps doués de certaines propriétés, comme une fonction dont le domaine de définition est constitué par un élément unique, qui est le sous-ensemble d'un corps de la classe donnée ayant la valeur respective dans une extension du corps qui se trouve dans la classe considérée. Ces fonctions doivent satisfaire à certaines exigences. Cette notion de radical contient la notion classique de radical et elle est probablement utilisable non seulement pour l'étude des extensions algébriques mais aussi transcendantes et même non commutatives. Dans la dernière partie de leur article, les auteurs donnent des exemples de radicaux dans les extensions algébriques et ils démontrent des théorèmes relatifs à la représentation par des radicaux, analogues au théorèmes de Galois de la théorie des équations.

## BIBLIOGRAFIE

1. D. BARBILIAN, *Lărgirea noţiunii de grup rezolubil.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Seria mat.-fiz.-chim., **II**, *10*, 769—776 (1950).
2. — *Lărgirea noţiunii de radical.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Seria mat.-fiz., **III**, *1*, 75—86 (1951).
3. — *În jurul teoriei lui Galois a radicalilor.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Seria mat.-fiz., *11*, 97—106 (1951).
4. W. KRULL, *Galoische Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen.* Math. Ann., **100**, 687—698 (1928).
5. O. ORE, *Galois connexions.* Trans. Amer. Math. Soc., **55**, 493—517 (1944).
6. R. BAER, *Abbildungseigenschaften algebraischer Erweiterungen.* Math. Zeitschr., **33**, 451—479 (1931).
7. D. BARBILIAN, *Soluţia exhaustivă a problemei lui Steinitz.* St. cerc. mat., **II**, *1*, 1—65 (1950).
8. W. KRULL, *Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs.* J. reine u. angew. Math., **191**, *1/2*, 54—63 (1953).
9. E. ARTIN, O. SCHREIER, *Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper.* Abh. d. math. Sem. d. Hamburger Univ., **5**, 225—231 (1927).
10. E. FRIED, *Über eine Verallgemeinerung der Auflösbarkeit von Gleichungen.* Ann. Univ. Scient. Budapest, Sec. Math., **2**, 67—71 (1959).

# CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC

## IV. PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU O CLASĂ DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

### INTRODUCERE

Obiectul lucrării de față este rezolvarea de probleme la limită pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} + P(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (\alpha)$$

În acest scop este necesar să se rezolve problemele la limită corespunzătoare, pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (\beta)$$

în cazul cînd $m$ este impar sau par, fapt ce constituie obiectul cap. I și II.

La baza lucrării stă cercetarea amănunțită a funcției $\Phi(x,\ y)$ dată de (3) cît și a derivatei sale $\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}$. Studiul singularităților acestei derivate ne permite să extindem formulele lui Holmgren din cazul ecuației căldurii, la ecuația ($\beta$) și în modul acesta să putem rezolva efectiv problemele la limită ce se pun în mod obișnuit pentru acestă clasă de ecuații.

Lucrarea de față continuă lucrarea [1] și se sprijină pe rezultatele obținute în [1].

# I

## PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad m \text{ IMPAR}$$

1. *O relație integrală fundamentală.* Se știe [2], [1] că funcția

$$v(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(y - y_0)^{\frac{1}{2m}}} \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{(x - \xi)\tau}{(y - y_0)^{\frac{1}{2m}}} d\tau, & y > y_0, \\ 0, & y \leqslant y_0, \end{cases} \tag{1}$$

este soluție a ecuației

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

cu $m$ impar, fapt ce se poate verifica și direct, prin derivare. Funcția

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^y \frac{\varphi(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x - \psi(\eta))}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} d\tau, & y > \eta, \\ 0, & y \leqslant \eta, \end{cases} \tag{3}$$

este de asemenea soluție a ecuației (2) dacă $\varphi(\eta)$ și $\psi(\eta)$ sînt continue în $(a, y)$ [3][1]).

Integrala (3) este uniform convergentă în vecinătatea arcului $(\Gamma)$ definit de $y = \eta$, $x = \psi(\eta)$, deoarece dacă $|\varphi(\eta)| \leqslant M$, avem

$$|\Phi(x, y)| \leqslant M \int_a^y \frac{d\eta}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) d\tau \leqslant M' \int_a^y \frac{d\eta}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}}.$$

Să cercetăm acum cum se comportă în vecinătatea arcului $(\Gamma)$ derivatele parțiale ale funcției $\Phi(x, y)$ și anume derivata de ordinul $2m - 1$ în raport cu $x$, deoarece studiul acestei derivate ne va conduce la rezolvarea problemelor la limită ce vom pune.

Avem

$$\frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x^{2m-1}} =$$

$$= \int_a^y \frac{\varphi(\eta)}{y - \eta} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{x - \psi(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} \tau + (2m - 1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau$$

[1]) p. 810.

care integrată prin părți, devine, ținînd seama că $m$ este impar,

$$\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2m}\int_a^y \frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\varphi(\eta)\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\tau\frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau. \quad (4)$$

Ne propunem să studiem funcția

$$F(x,\ y) = -2m\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} \quad (4')$$

în vecinătatea arcului $x = \psi(y)$. Vom considera mai întîi $\varphi(\eta) \equiv 1$.

Vom nota cu $F^*(x,\ y)$ funcția (4') cu $\varphi(\eta) \equiv 1$.

Deoarece avem

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} = \frac{-\psi'(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + \frac{1}{2m}\cdot\frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}},$$

cu notația

$$H^*(x,\ t) = -2m\int_a^y \frac{\psi'(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\left(\tau\frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)d\tau \quad (5)$$

și

$$u = \frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}},$$

urmează că putem scrie egalitatea:

$$F^*(x,\ y) + H^*(x,\ y) = 2m\int_\alpha^\beta du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos(u\tau)\,d\tau \quad (6)$$

pentru $(x,\ y)$ nesituat pe arcul $(\Gamma)$, unde

$$\alpha = \frac{x-\psi(a)}{(y-a)^{\frac{1}{2m}}}$$

și

$$\beta = \lim_{\eta\to y-0}\frac{x-\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } x > \psi(\eta), \\ -\infty, \text{ dacă } x < \psi(\eta). \end{cases}$$

În consecință pentru $M(x,\ y)$ nesituat pe arcul $(\Gamma)$ există egalitatea:

$$\lim_{M\to M_0+0}[F^*(x,\ y) + H^*(x,\ y)] = 2m\int_\alpha^\infty du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos(u\tau)\,d\tau, \quad (7)$$

$$\lim_{M\to M_0-0}[F^*(x,\ y) + H^*(x,\ y)] = 2m\int_\alpha^{-\infty} du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos(u\tau)\,d\tau, \quad (7')$$

unde $M_0(X,\ Y)$ este un punct de pe $(\Gamma)$.

Dacă ne situăm chiar pe arcul ($\Gamma$), în ipoteza că $\psi(\eta)$ este o funcție hölderiană cu $\rho > \frac{1}{2m}$, atunci cînd $M \to M_0$ avem

$$\alpha = \frac{X - \psi(a)}{(Y-a)^{\frac{1}{2m}}}, \quad \beta = 0,$$

deci

$$F^*(X, Y) + H^*(X, Y) = 2m \int_\alpha^0 du \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos(u\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Funcția $H^*(x, y)$ este continuă pe ($\Gamma$) deci valorile lui $H^*$ din (7), (7′) și (8) coincid, încît putem scrie :

$$\lim_{M \to M_0 \pm 0} F^*(x, y) = F^*(X, Y) \pm 2m \int_0^\infty du \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos(u\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

unde $M_0(X, Y)$ este un punct pe ($\Gamma$).

Dacă revenim acum la funcția (4′) unde nu mai considerăm pe $\varphi(\eta)$ identică cu unitatea,

$$F(x, y) = \int_a^y \frac{x - \psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \varphi(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\tau \frac{x - \psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right) d\tau,$$

avem :

$$F(x, y) = \int_a^y \frac{x - \psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} [\varphi(\eta) - \varphi(y)]\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\tau \frac{x - \psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right) d\tau +$$

$$+ \varphi(y) \int_a^y \frac{x - \psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\tau \frac{x - \psi(\eta)}{y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right) d\tau.$$

Dacă $\varphi(\eta)$ este o funcție hölderiană cu $\rho > \frac{1}{2m}$ prima integrală este continuă cînd $\eta \to y - 0$, încît putem scrie la limită :

$$\lim_{M \to M_0 \pm 0} F(x, y) =$$

$$= \int_0^Y \frac{X - \psi(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} [\varphi(\eta) - \varphi(Y)]\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\frac{X - \psi(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} \tau\right) d\tau +$$

$$+ \varphi(Y) \int_0^Y \frac{X - \psi(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\frac{X - \psi(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} \tau\right) d\tau \pm$$

$$\pm 2m\, \varphi(Y) \int_0^\infty du \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos(u\tau)\, d\tau,$$

sau

$$\lim_{M\to M_0\pm 0} F(x,\ y) =$$

$$= \int_0^Y \frac{X-\psi(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\varphi(\eta)\,d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\left(\frac{X-\psi(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right)d\tau \pm$$

$$\pm 2m\,\varphi(Y)\int_0^\infty du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos(u\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Formulele (9) și (10) generalizează formulele lui Holmgren corespunzătoare, din cazul ecuației căldurii.

2. *Prima problemă la limită.* Ne propunem să găsim funcția $u(x, y)$ soluție a ecuației (2) cu $m$ impar, care să îndeplinească condiția inițială

$$u(x,\ +0) = 0 \tag{11}$$

și condițiile la limită

$$\begin{aligned} u(+0,\ y) &= \omega_1(y),\\ u(a-0,\ y) &= \omega_2(y), \end{aligned} \tag{12}$$

cu $\omega_1$ și $\omega_2$ funcții continue de $y$.

Vom căuta soluția $u(x, y)$ de forma :

$$u(x,\ y) = \int_0^y \frac{x\,\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\frac{x\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau +$$

$$+\int_0^y \frac{(x-a)\,\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\frac{(x-a)\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau. \tag{13}$$

Se vede că condiția inițială (11) este satisfăcută. Impunînd soluției (13) condițiile la limită, obținem, ținînd seamă de (10), următorul sistem de ecuații integrale :

$$\begin{aligned} &2m\,\mu(m)\,\varphi(y) - a\cdot\int_0^y \frac{\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\frac{a\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau = \omega_1(y),\\ &-2m\mu(m)\,\psi(y) + a\cdot\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\frac{a\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau = \omega_2(y), \end{aligned} \tag{14}$$

care determină pe $\varphi$ și $\psi$ în mod unic. În (14) s-a notat

$$\mu(m) = \int_0^\infty du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos(u\tau)\,d\tau.$$

3. *A doua problemă la limită.* Ne propunem să găsim soluția $u(x, y)$ a ecuației (2) cu $m$ impar, care să îndeplinească condiția inițială

$$u(x, +0) = 0 \tag{15}$$

și condițiile la limită

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\partial^h u}{\partial x^h} = \omega(y), \tag{16}$$

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \theta(y), \tag{17}$$

cu $h, k \leqslant 2m-1$, $\omega$ și $\theta$ fiind două funcții continue de $y$.

Pentru $h = k = 0$ obținem problema rezolvată la paragraful precedent.

Vom lua pentru $u(x, y)$ expresia :

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{1-\frac{h}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-h-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{x\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m-h-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau + \int_0^y \frac{\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1-\frac{k}{2m}}} d\eta \cdot \int_0^\infty \tau^{2m-k-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{\tau(x-a)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m-k-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau, \tag{18}$$

care îndeplinește condiția inițială (15). Dacă derivăm pe (18) de $h$ ori în raport cu $x$, obținem :

$$\frac{\partial^h u}{\partial x^h} = \int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{y-\eta} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{\tau x}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau + \int_0^y \frac{\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1-\frac{k-h}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-k+h-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{\tau(x-a)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m+h-k-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau. \tag{19}$$

Dacă integrăm prin părți prima integrală din partea a doua din (19) avem

$$-\frac{1}{2m} \int_0^y \frac{\varphi(\eta)\, x}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{x\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} d\tau. \tag{20}$$

Dacă aplicăm lui (19), după ce folosim (20), prima condiție la limită obținem ecuația

$$\int_0^y \frac{\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{2m-k+h}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-k+h-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[-\frac{\tau a}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m-k+h-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau = \omega(y) + \mu(m)\, \varphi(y). \tag{21}$$

Procedînd în mod asemănător și pentru a doua condiție la limită avem :

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{2m-h+k}{2m}}} d\eta \int_0^\infty \tau^{2m-h+k-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{a\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}} + (2m+k-h-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau = \theta(y) - \mu(m)\,\psi(y). \tag{21'}$$

Sistemul de ecuații integrale (21) și (21′) determină în mod unic funcțiile necunoscute $\varphi$ și $\psi$ care înlocuite în (18) ne dă soluția căutată.

4. *A treia problemă la limită.* Să găsim acum soluția $u(x, y)$ a ecuației (2), $m$ impar, care satisface condiția inițială

$$u(x, +0) = 0 \tag{22}$$

și condițiile la limită : de-a lungul arcului de curbă $x = f(y)$, $0 < y < y_0$, se reduce la o funcție dată $\omega(y)$ :

$$u(f(y), y) = \omega(y); \tag{23}$$

de-a lungul arcului de curbă $x = g(y)$, $0 < y < y_0$, se reduce la o funcție dată $\theta(y)$ :

$$u(g(y), y) = \theta(y), \tag{24}$$

cu $\omega(y)$ și $\theta(y)$ funcții continue cu derivate continue iar $f(y) < g(y)$.

Căutăm soluția sub forma :

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{x - f(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \varphi(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\frac{x-f(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right) d\tau + \int_0^y \frac{x - g(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \psi(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\tau\frac{x-g(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right) d\tau, \tag{25}$$

unde $\varphi$ și $\psi$ sînt două funcții necunoscute. Funcția $u(x, y)$, dată în (25), verifică condiția inițială (22).

Punînd condiția la limită (23) obținem, ținînd seama de (10) :

$$\omega(Y) = \int_0^Y \frac{f(Y)-f(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \varphi(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\frac{f(Y)-f(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right) d\tau + \int_0^Y \frac{f(Y)-g(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \psi(\eta)\, d\eta \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos\left(\frac{f(Y)-g(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right) d\tau + 2m\mu(m)\,\varphi(Y), \tag{26}$$

iar dacă punem a doua condiție la limită (24) avem în mod asemănător:

$$\theta(Y)=\int_0^Y \frac{g(Y)-f(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\varphi(\eta)\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\left(\frac{g(Y)-f(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right)d\tau+$$
$$+\int_0^Y \frac{g(Y)-g(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\psi(\eta)\,d\eta\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\cos\left(\frac{g(Y)-g(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\tau\right)d\tau- \tag{26'}$$
$$-2m\,\mu(m)\,\psi(Y).$$

Sistemul de ecuații integrale (26) și (26') admite o soluție unică pentru $\varphi$ și $\psi$ care înlocuite în (25) ne dă soluția căutată.

## II

### PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA $\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial u}{\partial t}$ CU $m$ PAR

1. Am arătat în [1] că funcția

$$v(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m}-a\frac{(x-\xi)\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\left(\frac{b(x-\xi)\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)d\tau, & \\ \qquad\qquad x-\xi\geqslant 0,\ y-\eta>0, & \\ \dfrac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m}+a\frac{(x-\xi)\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\left(\frac{b(x-\xi)\tau}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)d\tau, & \\ \qquad\qquad x-\xi\leqslant 0,\ y-\eta>0, & \\ 0,\ y-\eta\leqslant 0, & \end{cases} \tag{1}$$

unde $\alpha=a+ib$, $a>0$ este o rădăcină a ecuației $\alpha^{2m}+1=0$, este *soluția fundamentală* care permite rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad m \text{ par}. \tag{2}$$

Funcția

$$\Phi(x,\,y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\eta\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m}-a\tau\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau(x-\xi)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\tau, & \\ \qquad\qquad y-\eta>0, & \\ 0,\quad y-\eta\leqslant 0, & \end{cases} \tag{3}$$

este de asemenea soluție a ecuației (2), uniform convergentă în vecinătatea segmentului de dreaptă $x=\xi$, $0\leqslant y\leqslant y_0$.

Dacă calculăm derivata de ordinul $2m-1$ în raport cu $x$ a lui $\Phi(x, y)$, dat de (3), obținem :

$$\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} = -\frac{1}{2m}\int_0^y \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\varphi(\eta)\,d\eta\int_0^\infty \exp\left[-\tau^{2m} - a\tau\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right]\times$$

$$\times\cos\frac{b\tau(x-\xi)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau. \tag{4}$$

Funcția

$$F(x, y) = -2m\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} \tag{5}$$

se bucură de aceleași proprietăți ca și funcția corespunzătoare studiată la capitolul precedent, de unde rezultă că

$$\lim_{M\to M_0\pm 0} F(x, y) = \pm 2m\,\mu'(m)\,\varphi(Y), \tag{6}$$

unde

$$\mu'(m) = \int_0^\infty du\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m} - au\tau)\cos(bu\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

2. *Prima problemă la limită.* Să găsim soluția $u(x, y)$ a ecuației (2), $m$ par, care îndeplinește condiția inițială

$$u(x, +0) = 0 \tag{8}$$

și condițiile la limită

$$u(+0, y) = \omega_1(y), \tag{9}$$

$$u(l-0, y) = \omega_2(y), \tag{10}$$

cu $\omega_1$ și $\omega_2$ funcții continue de $y$.

Vom căuta pe $u(x, y)$ de forma :

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{x\varphi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}d\eta\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} - \frac{a\tau x}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau x}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\tau +$$

$$+\int_0^y \frac{(x-b)\psi(\eta)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}d\eta\int_0^\infty \exp\left[-\tau^{2m} + a\tau\frac{x-l}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right]\cos\frac{b\tau(x-l)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\tau, \tag{11}$$

care îndeplinește condiția inițială (8). În ceea ce privește prima condiție la limită avem :

$$2m\,\mu'(m)\,\varphi(Y) - \omega_1(Y) =$$

$$= l\int_0^Y \frac{\psi(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}d\eta\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} - \frac{a\tau l}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau l}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}d\tau; \tag{12}$$

condiția (10) dă de asemenea :

$$\omega_2(Y) + 2m\,\mu'(m)\,\psi(Y) =$$

$$= l\int_0^Y \frac{\psi(\eta)}{(Y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\,d\eta\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} - \frac{a\tau l}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau l}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau. \qquad (12')$$

Ecuațiile (12) și (12′) formează un sistem de ecuații integrale cu necunoscutele $\varphi$ și $\psi$ care în condițiile enunțate sînt determinate în mod unic.

3. *A doua problemă la limită.* Să găsim soluția $u(x, y)$ a ecuației (2), cu $m$ par, care să îndeplinească condiția inițială

$$u(x, +0) = 0 \qquad (13)$$

și condițiile la limită

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\partial^h u}{\partial x^h} = \omega(y), \qquad (14)$$

$$\lim_{x\to l-0}\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \theta(y), \qquad (15)$$

cu $h, k \leqslant 2m-1$, $\omega$ și $\theta$ fiind două funcții continue de $y$.

Pentru $u(x, y)$ luăm expresia :

$$u(x, y) = \frac{\partial^{2m-h-1}}{\partial x^{2m-h-1}}\left[\int_0^y \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} - \frac{a\tau x}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau x}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau\right] +$$

$$+ \frac{\partial^{2m-k-1}}{\partial x^{2m-k-1}}\left[\int_0^y \frac{\psi(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} + a\tau\frac{x-l}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\cos\frac{b\tau(x-l)}{(y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau\right], \qquad (16)$$

care satisface condiția inițială (13). În ceea ce privește condiția la limită (14) putem scrie, după ce derivăm pe $u$ de $h$ ori în raport cu $x$ și ținem seamă de (4) :

$$\omega(Y) + 2\mu'(m)\,\varphi(Y) =$$

$$= \frac{\partial^{2m-k+h-1}}{\partial x^{2m-k+h-1}}\left[\int_0^Y \frac{\psi(\eta)\,d\eta}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} + a\tau\frac{x-l}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{b\tau(x-l)}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau\right]_{x=0}. \qquad (17)$$

Pentru a doua condiție la limită procedăm în mod asemănător după ce derivăm pe (16) de $k$ ori în raport cu $x$ :

$$\theta(Y) - 2\mu'(m)\,\psi(Y) =$$

$$= \frac{\partial^{2m-h+k-1}}{\partial x^{2m-h+k-1}}\left[\int_0^Y \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\int_0^\infty \exp\left(-\tau^{2m} - \frac{a\tau x}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{b\tau x}{(Y-\eta)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau\right]_{x=l}; \qquad (17')$$

ecuațiile (17) și (17′) formează un sistem de ecuații integrale în raport cu $\varphi$ și $\psi$ și soluția obținută rezolvă problema la limită pusă.

## III

### PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = P(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{CU } m \text{ IMPAR}$$

1. *Proprietățile unei integrale.* În [1] am arătat că funcția definită de

$$v(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{1}{\mu(m)}[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{-\frac{1}{2m}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(x-\xi)\,d\tau}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}, \tag{1}$$

unde $G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta) > 0$, cu $G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)$ soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial w}{\partial y} P(y,\ z) + \frac{\partial w}{\partial z} Q(y,\ z) = 1 \tag{2}$$

cît și a ecuației

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} P(\eta,\ \zeta) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} Q(\eta,\ \zeta) = -1, \tag{3}$$

care pentru $z = \zeta$ se reduce la $y - \eta$, este soluție a ecuației

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - P(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y,\ z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ m \text{ impar}, \tag{4}$$

și anume soluția fundamentală care permite rezolvarea problemei lui Cauchy. În (1) $\mu(m)$ are aceeași valoare ca în cap. I, § 2, iar în (4) $P$ și $Q$ sînt funcții continue și nenule într-un domeniu $D$ din planul $y\,o\,z$.

Derivata de ordinul $2m-1$ în raport cu $x$ va fi tot o soluție a ecuației (4); avem,

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} = \frac{-1}{\mu(m)}[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{-1}{2m}} \int_0^\infty \tau^{2m-1} \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \sin \frac{\tau(x-\xi)}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \tag{5}$$

sau, integrînd prin părți,

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} = -\frac{1}{2m\,\mu(m)} \cdot \frac{x-\xi}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(x-\xi)}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau. \tag{6}$$

Urmează de aici că funcția

$$w(x,\ y,\ z) = \int_C \frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} [P(\eta,\ \zeta)\, d\zeta - Q(\eta,\ \zeta)\, d\eta], \tag{7}$$

unde $C$ este o curbă închisă oarecare în planul $\eta,\ \zeta$ ce nu conține punctul $y,\ z$, va fi tot o soluție a ecuației (2).

Să luăm acum în (7) curba $(C)$ formată din segmentul de dreaptă al axei $o\zeta$ cuprins între punctul $S\,(0,\ \alpha)$ și $T\,(0,\ z)$, segmentul de dreaptă $T(0,\ z)$ și $M_0\,(y,\ z)$ paralel cu axa $o\eta$ și arcul de curbă $M_0S$ soluție a ecuației diferențiale

$$P(\eta, \zeta)\, d\zeta - Q(\eta, \zeta)\, d\eta = 0 \tag{8}$$

ce trece prin punctul $M_0\,(y,\ z)$ și taie axa $o\,\zeta$ în punctul $(0,\ \alpha)$.

În această situație integrala (7) se scrie

$$w(x,\ y,\ z) = \frac{1}{2m\,\mu(m)} \int_{\alpha(y,\ z)}^{z} \frac{(x-\xi)\ P(0,\ \zeta)}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}}\, d\zeta$$

$$\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau + \frac{1}{2m\,\mu(m)} \times \tag{9}$$

$$\times \int_0^{y} \frac{(x-\xi)\, Q(\eta,\ z)\, d\eta}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2m}}}\, d\tau$$

și reprezintă tot o soluție a ecuației (4). În adevăr, prima integrală nu prezintă discontinuități în intervalul de integrare, iar ultima integrală, conform studiului făcut la cap. I, este uniform convergentă, anulîndu-se pentru $\eta = y$. Folosind tot rezultatele cap. I, urmează că avem în plus :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \xi + 0} w(x,\ y,\ z) = Q(y,\ z), \\ &\lim_{x \to \xi - 0} w(x,\ y,\ z) = -\,Q(y,\ z), \\ &\lim_{y \to 0+} w(x,\ y,\ z) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

În ipoteza permanentă că $P(y,\ z) \neq 0$, $Q(y,\ z) \neq 0$ urmează că funcția $u(x,\ y,\ z)$, dată de

$$2m\,\mu(m) \cdot u(x,\ y,\ z) =$$

$$= \int_C \left[ \frac{(x-\xi)\,\varphi(\eta,\ \zeta)}{(G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta))^{1+\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{[G(y,\ z) - G(\eta,\ \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \right] \times$$

$$\times (Q(\eta,\ \zeta)\, d\eta - P(\eta,\ \zeta)\, d\zeta), \tag{11}$$

unde $\varphi(\eta, \zeta)$ este o funcție continuă iar $C$ este conturul descris mai sus, este de asemenea o soluție a ecuației (4) care satisface condiția inițială

$$u(x, 0, z) = 0$$

și condițiile la limită

$$\begin{aligned} u(\xi + 0, y, z) &= Q(y, z)\,\varphi(y, z), \\ u(\xi - 0, y, z) &= -Q(y, z)\,\varphi(y, z). \end{aligned} \tag{12}$$

Sensul de parcurs al contului $C$ este hotărît de relația (9).

2. *Prima problemă la limită.* Ne propunem să determinăm funcția $u(x, y, z)$ soluție a ecuației (4) care îndeplinește condițiile inițiale

$$u(x, 0, z) = 0 \tag{13}$$

și la limită

$$u(0 +, y, z) = \omega(y, z), \tag{14}$$

$$u(a - 0, y, z) = \theta(y, z), \tag{15}$$

cu $\omega$ și $\theta$ funcții continue.

Luăm pentru funcția căutată o expresie de forma

$$2m\,\mu(m)\,u(x, y, z) =$$

$$= \int_C \left[ \frac{(x-a)\,\varphi(\eta, \zeta)}{(G(y, z) - G(\eta, \zeta))^{1+\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-a)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \right] \times$$

$$\times (Q(\eta, \zeta)\,d\eta - P(\eta, \zeta)\,d\zeta) + \int_C \left[ \frac{x\,\psi(\eta, \zeta)}{(G(y, z) - G(\eta, \zeta))^{1+\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times \right.$$

$$\left. \times \cos \frac{\tau x}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \right] [Q(\eta, \zeta)\,d\eta - P(\eta, \zeta)\,d\zeta] \tag{16}$$

care satisface condiția inițială (13). Cît privește condițiile la limită (14) și (15), obținem, ținînd seama de (12), sistemul de ecuații integrale :

$$\omega(M_0) = Q(M_0)\,\psi(M_0) -$$

$$- \frac{1}{2m} \frac{a}{\mu(m)} \int_C \frac{\varphi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}}\, d\sigma \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{a\tau}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau,$$

$$\theta(M_0) = -Q(M_0)\,\varphi(M_0) + \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{2m} \frac{a}{\mu(m)} \int_C \frac{\psi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}}\, d\sigma \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{a\tau}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau,$$

sistem care determină în mod unic pe $\varphi$ și $\psi$. În (17) am notat cu $M_0$ punctul de coordonate $x$, $y$, $z$ și $M$ punctul de coordonate curente $\xi$, $\eta$, $\zeta$, iar cu $d\sigma$

$$d\sigma = Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta, \tag{18}$$

notație justificată deoarece pe $ST$, $d\sigma = -P(M)\, ds$ iar pe $TM_0$ $d\sigma = Q(M)\, ds$.

3. *Problema a doua.* Să determinăm acum soluția $u(x, y, z)$ a ecuației (4) care să îndeplinească condiția inițială

$$u(x, 0, z) = 0 \tag{19}$$

și condițiile la limită

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\partial^h u(x, y, z)}{\partial x^h} = \omega(y, z), \tag{20}$$

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\partial^k u(x, y, z)}{\partial x^k} = \theta(y, z), \tag{21}$$

cu $\omega$ și $\theta$ funcții continue iar $h$, $k \leqslant 2m - 1$.

Luăm pentru funcția căutată o expresie de forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = &\int_C \frac{\varphi(\eta, \zeta)}{(G(y, z) - G(\eta, \zeta))^{1 - \frac{h}{2m}}} d\sigma \int_0^\infty \tau^{2m-h-1} \exp(-\tau^{2m}) \times \\ &\times \cos\left[\frac{x\tau}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}} + (2m - h - 1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau + \\ &+ \int_C \frac{\psi(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{1 + \frac{k}{2m}}} d\sigma \int_0^\infty \tau^{2m-k-1} \exp(-\tau^{2m}) \times \\ &\times \cos\left[\frac{(x - a)\tau}{(G(y, z) - G(\eta, \zeta))^{\frac{1}{2m}}} + (2m - k - 1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

cu

$$d\sigma = Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta \tag{22'}$$

și care îndeplinește condiția inițială (19). Cît privește condițiile la limită, avem, dacă derivăm de $k$ ori pe (22) și ținem seamă de (20) (cap. I, § 3) cît și de (12):

$$\begin{aligned} &\omega(M_0) + \mu(m)\, \varphi(M_0)\, Q(M_0) = \\ &= \int_C \frac{\psi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1 - \frac{k-h}{2m}}} d\sigma \int_0^\infty \tau^{2m+h-k-1} \exp(-\tau^{2m}) \times \\ &\times \cos\left[-\frac{a\tau}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}} + (2m - k + h - 1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

În mod asemănător, dacă trecem la a doua condiție la limită (21), avem după ce derivăm de $k$ ori în raport cu $x$ pe (22):

$$\theta(M_0) - \mu(m)\,\psi(M_0)\,Q(M_0) =$$

$$= \int_C \frac{\varphi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1-\frac{h-k}{2m}}}\, d\sigma \int_0^\infty \tau^{2m-h+k-1} \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos\left[\frac{a\tau}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}} + (2m + k - h - 1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau. \qquad (23')$$

Am obținut astfel un sistem de două ecuații integrale care determină pe $\varphi$ și $\psi$. Înlocuite în (22) determinăm soluția căutată.

4. *Problema a treia.* Ne propunem să găsim soluția $u(x, y, z)$ a ecuației (4) care pentru

$$x = f(y, z)$$

să se reducă la o funcție dată

$$u[f(y, z), y, z] = \omega(y, z), \qquad (24)$$

iar pentru

$$x = g(y, z)$$

să se reducă la altă funcție dată

$$u[g(y, z), y, z] = \theta(y, z), \qquad (25)$$

cu $f(y, z)$ și $g(y, z)$ funcții continue, satisfăcînd în plus condiția

$$g(y, z) > f(y, z). \qquad (26)$$

În afară de condițiile la limită de mai sus, $u(x, y, z)$ trebuie să satisfacă și condiția inițială

$$u(x, 0, z) = 0. \qquad (27)$$

Ipotezele făcute asupra lui $\omega$ și $\theta$ sînt aceleași ca și în problema precedentă.

Să considerăm, în acest scop, integrala următoare:

$$F(x, y, z) = \int_C \frac{[x - f(\eta, \zeta)]\,\varphi(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}}\, d\sigma \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos\left[\frac{\tau[x - f(\eta, \zeta)]}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau, \qquad (28)$$

unde $d\sigma$ este dat tot de (22') iar $C$ este o curbă închisă care se proiectează în planul $o\eta\zeta$ după conturul $C$ descris în acest capitol la § 1.

Folosind proprietăţile funcţiei $G(y, z) - G(\eta, \zeta)$ obţinem :

$$F(x, y, z) =$$

$$= -\int_{\alpha(y, z)}^{z} \frac{[x - f(0, \zeta)]\,\varphi(0, \zeta)}{[G(y, z) - G(0, \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}} P(0, \zeta)\, d\zeta \int_0^{+\infty} \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(x - f(0, \zeta))}{[G(y, z) - G(0, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau + \int_0^{y} \frac{[x - f(\eta, z)]\,\varphi(\eta, z)}{(y - \eta)^{1+\frac{1}{2m}}} Q(\eta, z)\, d\eta$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x - f(\eta, z))}{(y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} d\tau$$

şi la limită cînd punctul $M_0'(x, y, z)$ tinde către punctul $M_0(X, Y, Z)$ situat pe suprafaţa $x = f(y, z)$, obţinem :

$$\lim_{M_0' \to M_0 \pm 0} F(x, y, z) =$$

$$= -\int_{\alpha(Y, Z)}^{Z} \frac{f(Y, Z) - f(0, \zeta)}{[G(Y, Z) - G(0, \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}} \varphi(0, \zeta)\, P(0, \zeta)\, d\zeta \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(f(Y, Z) - f(0, \zeta))}{[G(Y, Z) - G(0, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau + \int_0^{Y} \frac{f(Y, Z) - f(\eta, Z)}{(Y - \eta)^{1+\frac{1}{2m}}} \varphi(\eta, Z)\, Q(\eta, Z)\, d\eta$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(f(Y, Z) - f(\eta, Z))}{(Y - \eta)^{\frac{1}{2m}}} d\tau \pm$$

$$\pm 2m\, \mu(m)\, Q(Y, Z)\, \varphi(Y, Z),$$

relaţie care ne permite imediat să transformăm condiţiile la limită (24) şi (25) într-un sistem de ecuaţii integrale dacă luăm pentru $u$ următoarea expresie :

$$u(x, y, z) = \int_C \varphi(\eta, \zeta) \frac{x - f(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(x - f(\eta, \zeta))}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau + \int_C \psi(\eta, \zeta) \frac{x - g(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x - g(\eta, \zeta))}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau. \qquad (29)$$

În adevăr, dacă notăm cu $M$ punctul de coordonate curente și cu $M_0$ un punct situat pe suprafața $z = f(x, y)$ sau $z = g(x, y)$, condiția (24) ne conduce la :

$$\omega(M_0) - 2m\mu(m)\, Q(M_0)\, \varphi(M_0) =$$

$$= \int_C \varphi(M) \frac{f(M_0) - f(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(f(M_0) - f(M))}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau + \int_C \psi(M) \frac{f(M_0) - g(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma$$

$$\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(f(M_0) - g(M))}{(G(M_0) - G(M))^{\frac{1}{2m}}} d\tau, \tag{30}$$

iar condiția (25) la :

$$\theta(M_0) + 2m\,\mu(m)\,\theta(M_0)\,\psi(M_0) =$$

$$= \int_C \varphi(M) \frac{g(M_0) - f(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \times$$

$$\times \cos \frac{\tau(g(M_0) - f(M))}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau + \int_C \psi(M) \frac{g(M_0) - g(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{1+\frac{1}{2m}}} d\sigma$$

$$\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(g(M_0) - g(M))}{[G(M_0) - G(M)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau. \tag{31}$$

Sistemul de ecuații integrale (30) și (31) determină în mod unic pe $\varphi$ și $\psi$.

Pentru ecuația (4) cu $m$ par, rezolvarea problemelor la limită corespunzătoare se face în mod asemănător.

Primită la redacție la 10 martie 1962

## К ИЗУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

### IV. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

### РЕЗЮМЕ

В первой главе решаются граничные задачи для уравнения

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad m \text{ — нечетное.} \tag{$\alpha$}$$

Указываем вторую задачу: найти решение $u(x, y)$ уравнения $(\alpha)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, +0) = 0$$

и граничные условия

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\partial^h u}{\partial x^h} = \omega(y),$$

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \theta(y),$$

где $h$, $k \leqslant 2m-1$, а $\omega$ и $\theta$ непрерывные функции $y$. Решение получается при помощи двух интегральных уравнений (21) и (21′).

Вторая глава занимается граничной задачей для уравнения $(\alpha)$ с четным $m$.

Последняя глава занимается граничными задачами для уравнения

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad m \text{ — четное.} \qquad (\beta)$$

Указываем третью задачу: определить решение $u(x, y, z)$ уравнения $(\beta)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0, z) = 0,$$

и граничные условия

$$u[f(y, z), y, z] \equiv \omega(y, z),$$
$$u[g(y, z), y, z] \equiv \theta(y, z),$$

где $f(y, z)$, $g(y, z) \in C^1$, $g(y, z) > f(y, z)$, а $\omega$, $\theta$ — заданные функции.

Решение получается при помощи двух интегральных уравнений (30) и (31).

## CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

### IV. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

RÉSUMÉ

Au premier chapitre, l'auteur résout des problèmes aux limites pour l'équation

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad m \text{ impair.} \qquad (\alpha)$$

Nous en citerons le second problème : trouver la solution $u(x, y)$ de l'équation $(\alpha)$ remplissant la condition initiale

$$u(x, +0) = 0$$

et les conditions aux limites

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\partial^h u}{\partial x^h} = \omega(y),$$

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \theta(y)$$

avec $h, k \leqslant 2m - 1$, $\omega$ et $\theta$ étant deux fonctions continues de $y$. La solution s'obtient par l'intermédiaire de deux équations intégrales (21) et (21′).

Le second chapitre s'occupe du problème aux limites de l'équation $(\alpha)$ à $m$ pair.

Le dernier chapitre traite des problèmes aux limites concernant l'équation

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + P(v, z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad m \text{ pair.} \qquad (\beta)$$

Nous en citerons le troisième : déterminer la solution $u(x, y, z)$ de l'équation $(\beta)$ remplissant la condition initiale

$$u(x, 0, z) = 0$$

et les conditions aux limites :

pour $x = f(y, z)$, $u(x, y, z)$ doit se réduire à une fonction donnée

$$u[f(y, z), y, z] \equiv \omega(y, z),$$

et pour $x = g(y, z)$ à une autre fonction donnée

$$u[g(y, z), y, z] \equiv \theta(y, z)$$

avec $f(y, z), g(y, z) \in C^1$ satisfaisant en outre à la condition $g(y, z) > f(y, z)$.

La solution s'obtient par l'intermédiaire de deux équations intégrales (30) et (31).

## BIBLIOGRAFIE

1. MARCEL N. ROSCULET, *Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. III. Problema lui Cauchy pentru o clasă de ecuații de ordin superior.* Bul. Inst. politehnic, București, *4* (1961).
2. P. C. ROSEMBLOOM, *Linear equations of parabolic type with constant coefficients.* Ann. Math. Studies, *33* (1954).
3. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare.* IV. Edit. tehnică, București, 1956.

# CONTROLUL STATISTIC AL CALITĂȚII ÎN REPUBLICA DEMOCRATĂ GERMANĂ

DE

E. SCHINDOWSKI

(Berlin)

În industria naționalizată a Republicii Democrate Germane au fost inițiate pentru prima oară în 1952 măsuri sistematice pentru pregătirea introducerii metodelor statisticii matematice. Aceasta n-a avut loc în mod întîmplător, ci a fost determinată de dezvoltarea mereu crescîndă a economiei socialiste. Una din sarcinile cele mai importante ale producției socialiste constă în realizarea unor produse de cea mai bună calitate cu o cheltuială minimă de muncă socială. De rezolvarea acestei probleme depinde în mare măsură satisfacerea tot mai bună a nevoilor populației.

Se impunea deci să se recurgă la metodele controlului statistic al calității, care nu fuseseră încă aplicate pînă atunci în Republica Democrată Germană. Aceste metode pot contribui într-o mare măsură, mai ales datorită controlului permanent al procesului de finisare, la creșterea productivității muncii, scăderea rebutului și a muncii de retușare și prin aceasta la scăderea prețului de cost al producției.

Interesul pentru controlul statistic al calității era întărit atunci și de constatarea că în alte țări socialiste, precum și în Republica Federală Germană, se manifestau tendințe intense pentru popularizarea controlului statistic al calității, care era aplicat cu succes de mulți ani în S.U.A. În această privință ne-a atras atenția cartea *Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen* a autorilor vest-germani V. Graf și H. J. Henning, tipărită în Republica Democrată Germană și al cărei tiraj a rămas în parte în R.D.G.; în această carte se tratau noțiunile statistice de bază, examinarea valorilor medii și a dispersiilor, analiza dispersională etc., și într-o măsură mai mică metodele statistice ale controlului de fabricație.

În legătură cu faptul că astăzi metodele statisticii matematice se aplică cu succes în numeroase întreprinderi, trebuie amintit că Academiei Germane de Ştiinţe din Berlin îi revine meritul de a fi iniţiat studiul sistematic al acestor metode şi răspîndirea lor treptată în practica industrială. Institutul de matematică şi mecanică aplicată al Academiei de Ştiinţe din Berlin şi-a pus atunci problema verificării metodelor controlului de calitate statistic în întreprinderi adecvate, respectiv pe exemple adecvate, în vederea popularizării lor în industria naţionalizată. Totodată a fost adoptat punctul de vedere că este în interesul unui ajutor rapid şi eficace pentru industrie să se aplice pentru început metode cunoscute, deja verificate, fără a începe cu dezvoltarea unor metode noi.

Cînd, după studierea aprofundată a bibliografiei existente atunci în ţările socialiste şi capitaliste, a devenit necesară încercarea de a verifica în practică cunoştinţele dobîndite, pentru a trezi interesul industriei pentru aceste metode, eforturile noastre au fost privite întîi cu un anume scepticism. Abia după ce am publicat în presă, printre altele în ziarul *Neues Deutschland*, cîteva articole cu caracter informativ, o întreprindere a fost de acord să ne dea posibilitatea efectuării unor verificări practice şi introducerii metodelor statistice. Este vorba despre *VEB Elektromotorenwerk Wernigerode*, căruia îi revine meritul de a fi făcut începutul.

Caracteristicile calităţii se verifică în această întreprindere fie cu calibre fie vizual. De aceea trebuia să folosim în verificările noastre numai fişa $p$ cu o repartiţie amănunţită a erorilor. În această întreprindere se folosesc din 1955 peste 20 fişe de control la locurile cruciale ale producţiei.

Prin eforturile comune ale întregului colectiv din întreprindere bazate pe indicaţiile furnizate de fişele de control, s-a obţinut, ţinînd seama de toate măsurile pentru îmbunătăţirea calităţii, o scădere continuă a cheltuielilor pentru rebut, finisare şi pentru reparaţiile de garanţie. Astfel, scăderea volumului global de rebuturi constituie 64% faţă de anul 1955. Rebutul din vină proprie a putut fi micşorat cu 76% faţă de 1955. Nivelul înalt al calităţii atins în unele secţii a permis micşorarea cheltuielilor pentru control cu 73%. În total economiile realizate de la introducerea controlului statistic al calităţii în această întreprindere se ridică la peste 5 000 000 DM. Fişa $p$ a devenit astăzi un instrument permanent al întreprinderii.

Acest succes deplin a determinat şi alte întreprinderi ale industriei electrice, iar apoi şi ale altor ramuri ale industriei, să se intereseze pentru controlul statistic al calităţii şi să-l introducă. Astăzi Institutul de matematică şi mecanică aplicată menţine o strînsă legătură cu numeroase întreprinderi industriale, sprijinindu-le activ la introducerea controlului statistic al calităţii. Nu este locul aici de a indica toate aceste întreprinderi. În concluzie, se poate spune că controlul statistic al calităţii a devenit un factor important în multe întreprinderi socialiste ale Republicii Democrate Germane.

În afară de Institutul de matematică şi mecanică aplicată al Academiei Germane de Ştiinţe se ocupă astăzi de metodele statisticii matematice şi diferite alte instituţii ştiinţifice. Institutul de tehnologia fibrelor şi-a luat sarcina introducerii controlului statistic al calităţii în ţesătoriile

de iută. Secția de control sistematic al finisajului a Institutului de cercetări de tehnologie textilă din Karl Marx-Stadt se ocupă exclusiv de introducerea controlului statistic al calității în industria textilă. Ca rezultat s-a putut stabili că în multe cazuri nu mai este necesară o verificare permanentă și că se poate economisi pînă la 75% din munca de verificare efectuată pînă acum, fără a fi expus la un risc mai mare în privința uniformității produselor. În afară de aceasta, s-a obținut în multe cazuri o îmbunătățire considerabilă a uniformității firelor, exprimată prin coeficientul de variație.

Politehnica *Otto von Guericke*, din Magdeburg, s-a străduit să introducă fișe de control în industria constructoare de mașini. S-au obținut succese deosebite prin folosirea fișelor de control la sudură și la fabricarea de unicate în ateliere mecanice.

Este vorba despre metode de control, prin care munca poate fi apreciată prin puncte sau note. Fișele de control folosite corespund deci oarecum fișelor *c*[1]) cunoscute. În atelierele mecanice scăderea cheltuielilor provocate de finisaj și rebut pe timp de un an a totalizat mai mult de 60%, iar la sudori, cca. 70%. Pe baza studiului cauzelor rebuturilor au putut fi detectate și înlăturate o serie de lipsuri în procesul de producție. Cheltuielile astfel economisite pot fi cu greu apreciate; este de presupus că ele reprezintă un multiplu al scăderii cheltuielilor pentru finisare și rebut.

În unele întreprinderi se aplică deja planuri pentru probe de control. Trebuie însă menționat că se susține adeseori părerea că la introducerea metodelor statistice ar trebui să predomine fișele de control, deoarece numai pe baza lor este posibil să se regleze în mod permanent procesul de producție. Îndată ce procesul de producție a fost pus în ordine sau, după cum se spune, *sub control statistic* se impune verificare prin probe de control. Dar chiar fără a fi folosit înainte fișe de control, multe întreprinderi preferă verificarea prin probe de control, pornind de la punctul de vedere că prin aceasta se economisește personal de control. Acest punct de vedere nu este totdeauna justificat, căci numai prin verificarea cu ajutorul probelor de control nu se pot înlătura perturbații în procesul de producție.

Se aplică planul AWF-ul probelor de control al lui Wagner, respectiv o variantă a lui *Zwingerplan*, sistemul Philips Standard al probelor de control, planurile lui Dodge și Romig, precum și Military Standard 105 A, care trebuie privit ca o dezvoltare a tabelelor Columbia, standardizate în Republica Socialistă Cehoslovacă și în Republica Populară Ungară. Planurile Mil Std 414 și planul Standard prin sondaj al lui Shainin au fost introduse la controlul prin măsurare.

Evoluția îmbucurătoare în Republica Democrată Germană a trezit în întreprinderi tot mai mult conștiința că în practică este nevoie de specialiști familiarizați cu metodele controlului statistic de calitate. De aceea în ultima vreme se manifestă tendința de a recurge la matematicieni sau ingineri exclusiv pentru problemele controlului statistic al calității în întreprinderi, respectiv în uniuni de întreprinderi naționalizate.

Justețea acestei tendințe se manifestă prin aceea că folosirea controlului statistic al calității în industria naționalizată a Republicii Democrate

[1]) Fișa *c* este fișa cu ajutorul căreia se ține evidența calității producției în vederea retribuirii personalului.

Germane a fost recunoscută acum principial și legiferată. Prin *Hotărîrea asupra organizării controlului tehnic în întreprinderile producătoare naționalizate și îmbunătățirea calității produselor industriale*, intrată în vigoare la 15 octombrie 1960, conducerea întreprinderii este obligată să creeze toate condițiile pentru rezolvarea sistematică a sarcinilor cu privire la calitate, dintre care face parte introducerea și aplicarea controlului statistic al calității.

Cu toate succesele realizate pînă în prezent trebuie precizat că deocamdată se lucrează în cele mai multe cazuri după metode deja cunoscute. De aceea dezvoltarea unor metode noi constituie o sarcină a viitorului. La aceasta trebuie adăugat că în ultimul timp institutele de învățămînt superior și de specialitate, și în special institutele lor de matematică, au început să se ocupe și de probleme teoretice ale controlului statistic de calitate.

Se poate deci afirma că în Republica Democrată Germană a început să se manifeste tendința îmbucurătoare de a considera controlul statistic de calitate ca fiind menit să aducă o contribuție esențială la realizarea unui înalt nivel de calitate. Pentru aceasta este însă necesar ca aceste metode să fie introduse și folosite în mod consecvent, chiar dacă la început nu se realizează economii vizibile, ci apar chiar cheltuieli suplimentare.

Dacă dorim să obținem avantaje maxime pentru întreaga economie prin aplicarea controlului statistic al calității, este necesar să introducem acest control pe scara cea mai largă. O condiție esențială pentru aceasta era coordonarea eforturilor în parte paralele ale diverselor grupe de lucru și reunirea lor într-o organizație centrală cu atribuții operative corespunzătoare. O asemenea instituție are posibilitatea să elaboreze, pe baza experienței dobîndite, propuneri pentru introducerea treptată a controlului statistic al calității pentru întreaga economie naționalizată, să sprijine activ această introducere și să controleze permanent evoluția ei.

Un asemenea for a fost creat cu aproape trei ani în urmă la secția de matematică și mecanică aplicată a Academiei Germane de Științe din Berlin, și poartă denumirea de *Subcomisia pentru controlul statistic al calității*. Majoritatea membrilor subcomisiei sînt oameni de știință și practicieni, care au participat cu un succes deosebit la introducerea și propagarea controlului statistic al calității și ale căror cunoștințe și experiență sînt necesare la rezolvarea marilor sarcini de viitor. Subcomisia are în prezent 14 membri. Printre sarcinile ei fundamentale amintim următoarele : elaborarea principiilor de introducere pe scară largă a controlului statistic al calității, recomandări către organele de Stat, influențarea programelor de predare în facultăți și școli de specialitate, acordarea de consultații și sprijin întreprinderilor, ținerea unor cursuri pentru delegați ai întreprinderilor, colaborarea cu străinătatea, organizarea unor colocvii.

Pe baza tezelor amintite comisia a obținut deja unele realizări. După ce la început au fost ținute numai ocazional prelegeri în regiuni asupra problemelor controlului statistic al calității, au fost organizate mai multe cicluri complete de cursuri. Participanții aparțineau unor întreprinderi din cele mai diferite ramuri industriale. Scopul cursurilor a fost să transmită participanților bazele și posibilitățile de aplicare a controlului

statistic de calitate. S-a pus un accent deosebit pe tehnica fișelor de control, deoarece predomină părerea că reglarea procesului de producție constituie țelul principal al controlului statistic al calității. În cazul controlului statistic asupra procesului de producție există posibilitatea trecerii de la un control intermediar sau final de 100% la un plan statistic adecvat de probe de control.

De curînd comisia a hotărît înființarea unor cercuri de muncă. Anumiți membri ai comisiei au primit sarcina să reunească colegi cu pregătirea corespunzătoare în cercuri de muncă cu sarcini speciale. Aceste cercuri se vor ocupa în viitor printre altele cu probleme ale calificării, cu dezvoltarea materialului didactic corespunzător (modele, planșeta Galton, nomograme etc.), cu unificarea formularelor, cu stabilirea profitului economic, cu probleme ale standardizării precum și cu înființarea unei reviste internaționale de aplicații ale matematicii în industrie și economie.

În ultimii ani au fost organizate anual, în parte în colaborare cu Politehnica *Otto von Guericke* din Magdeburg, colocvii asupra unor probleme ale controlului statistic al calității, la care participă tot mai mulți savanți străini. Astfel, are loc un vast schimb de experiență cu R.P. Bulgaria, R.S. Cehoslovacă, R.P. Polonă, R.P. Romînă, R.P. Ungară, R. F. Germană și Organizația Europeană pentru controlul statistic al calității. Este de presupus că în viitor aceste colocvii vor deveni, într-o măsură și mai mare, centrul unui schimb de experiență regulat și fertil pe scară internațională și mai ales în cadrul lagărului socialist.

La unul din ultimele colocvii participanții străini au emis în mod unanim părerea că printr-o colaborare internațională strînsă, organizată, introducerea controlului statistic al calității în țările socialiste ar putea fi accelerată, contribuindu-se totodată la rezolvarea rapidă a problemelor comune. În afară de aceasta ar exista posibilitatea, ținînd seama că în diversele țări au fost folosite căi diferite la verificarea metodelor amintite, să se transmită altor țări experiența dobîndită în domeniul în care țara respectivă are o situație conducătoare. De aceea savanți și practicienii de frunte ai unor țări manifestă dorința ca colaborarea în cadrul lagărului socialist să fie întărită și îmbunătățită prin crearea unei comisii internaționale pentru controlul statistic al calității, pentru a iniția mai ales contactul nemijlocit între ramurile industriale corespunzătoare din diferite țări. Pentru moment această idee foarte bună nu pare să fie încă realizabilă: pe de o parte forurile de stat competente nu sînt încă pe deplin convinse de marea importanță a controlului statistic al calității în construcția socialistă, pe de altă parte mai există și divergențe mari de păreri în legătură cu forma organizatorică a unui astfel de for internațional.

*Institutul de matematică*
*și mecanică aplicată al*
*Academiei Germane de Științe*

Primită la redacție la 17 martie 1962

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА ПРОИЗВОДСТВА В ГДР


## РЕЗЮМЕ

Это обзорная статья об использовании методов математической статистики и в особенности статистического контроля за качеством производства национализированной промышленности Германской Демократической Республики. Приводятся некоторые данные, доказывающие успехи, достигнутые применением этих методов на предприятиях разных отраслей производства.


# DIE STATISTISCHE QUALITÄTSKONTROLLE IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK


## ZUSAMMENFASSUNG

Ein ausführlicher Bericht über die Einführung mathematisch-statistischer Methoden und insbesondere der statistischen Qualitätskontrolle in der volkseigenen Industrie der Deutschen Demokratischen Republik. Es werden Daten angeführt, welche die Erfolge nachweisen, die bei der Anwendung dieser Methoden in Betrieben aus verschiedenen Produktionszweigen erzielt werden.

# SISTEMUL DE ECHIVALENȚĂ, CONJUNCȚIE ȘI RECIPROCITATE

DE

EUGEN MIHĂILESCU

## INTRODUCERE

Scopul acestei lucrări este de a axiomatiza sistemul logicii clasice în care cu idei primitive, intră variabilele de propoziție și functorii de echivalență, conjuncție și reciprocitate; totodată să studiem formele din mulțimea $\mathbf{L}(E, K, R)$ și să arătăm că sistemul $\mathbf{L}(E, K, R)$ este incomplet, admițînd o infinitate de forme libere, toate echivalente între ele și cea mai scurtă fiind forma

$$Rpp,$$

adică să admitem ca axiomă negarea principiului de contradicție.

Avînd în vedere că sistemul nostru conține ca subsistem sistemul de echivalență și reciprocitate studiat în lucrarea [1], urmează că toate teoremele publicate acolo rămîn valabile și pentru sistemul $\mathbf{L}(E, K, R)$.

Studiul nostru se va desfășura în modul următor:

*a*) vom da forme normale pentru formele din mulțimea $\mathbf{S}(K)$, arătînd totodată condiția pentru ca $\alpha \sim \beta$ unde $\alpha, \beta \in \mathbf{S}(K)$;

*b*) vom da forme normale pentru formele din mulțimea $\mathbf{S}(E, K)$, arătînd totodată care din ele sînt teoreme ale logicii clasice;

*c*) vom da forme normale pentru formele din mulțimea $\mathbf{S}(E, K, R)$, arătînd care din ele sînt teoreme ale logicii clasice și care din ele sînt forme libere.

Concluzia care se desprinde din punctul *c*) este că sistemul nostru este incomplet.

### § 1. SISTEMUL $\mathbf{L}(E, K)$

Sistemul $\mathbf{L}(E, K, R)$ este axiomatizat de următoarele axiome:

*A1.* $EEPqEqp$.

*A2.* $EEEpqrEpEqr$.

*A3. EERpqRrsEEpqErs.*
*A4. EKKpqrKKqpr.*
*A5. EKKpqrKpKqr.*
*A6. EKKppqKpq.*
*A7. EKWKprKqrrKrEpq.*
*A8. EKRpqrRKprKqr.*

Arătăm că axiomele *A7* și *A8* sînt independente față de celelalte axiome.

Într-adevăr dacă înlocuim functorul *R* cu *E* *A1—A7* au valoare logică *1* atunci cînd înlocuim variabilele cu *0* și *1*, iar

*A8. EEEKprKqrrKrEpq,*

poate fi *0* deoarece din studiul ce urmează, vom arăta că *A8* nu este o teoremă a logicii clasice.

Dacă înlocuim pe *K* cu *A* și pe *R* cu *E* axiomele *A1—A6* și *A8* au valoarea logică *1* iar forma

*A7. EEEKprKqrrKrEpq,*

poate fi și *0*, conform teoremelor stabilite în lucrarea [2].

Sistemul $\mathbf{L}(E, R, R)$ conține ca subsistem pe $\mathbf{L}(E, K)$ axiomatizat de *A1—A7*.

TEOREMA 1. *Orice formă* $\alpha \in \mathbf{S}(K)$ *conținînd variabilele* $p_i$ *fiecare respectiv de* $k_i$ *ori* $(i = 1, 2,...,n)$ *admite forma normală*

$$\mathbf{N}(K) = K^{n-1} p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n,$$

*cu care este echivalentă și în care putem schimba oricum variabilele între ele.*

Demonstrația se face utilizînd metoda de recurență și totodată pe baza tezelor deduse din axiome.

*A4. EKKpqrKKqpr.*
*A7. EKEKprKqrrKrEpq.*
*A7 p/Kpq, q/Kqp* × 1.
1. *EEEKKpqrKKqprrKrEKpqKqp.*
2. *EEEEpqrsEEpqErs*[1]).
*2p/KKpqr, q/KKqpr, s/KrEKpqKqp E1—3.*
3. *ErKrEKpqKqp.*
4. *Epp*[1]).
*3r/EPPx E4—5.*
5. *KEppKEppEKpqKqp.*
*A1 p/EEKprKqrr, q/KrEpq WA7—6.*
6. *EKrEpqEEKprKqrr.*
*6r/Epp, p/Kpq, q/Kqp* × *E5—7.*
7. *EEKKpqEppKKqpEppEpp.*
8. *EEpqrErEpq*[1]).
*8p/KKpqEpp, q/KKqpEpp, r/Epp* × *E7—E4—9.*
9. *EKKpqEppKKqpEpp.*
*6r/Kpq, q/p* × 10.
10. *EKKpqEppEEKpKpqKpKpqKpq.*
*6r/Kqp, q/p* × 11.

[1]) Teză în sistemul **L** (*E*).

*11. EKKqpEppEEKqKqpKqKqpKqp.*
*12. EEpqEErsEEprEqs*[1]).
*p/KKpqEpp, q/EEKpKpqKpKpqKpq, r/KKqpEpp, s/EEKqK qpKqKqpKqp E10—E11—E—13.*
*13. EEEKpKpqKpKpqKpqEEKqKqpKqKqpKqp.*
*14. EEpqEErsEEprEqs* [1]).
*p/EKpKpqKpKpq, q/Kpq, r/KqKqpKqKqp, s/Kqpr×E13—15.*
*15. EEEKpKpq KpKpq EKqKqpKKqpEKpqKqp.*
*16. EEpprEEqqsErs* [1])
*16 p/EKpKpqKpKpq, q/EKqKqp KqKqp, r/Kpq, s/Kqp × E15—17.*
**17. EKpqKqp.*
*A1 p/KKpqr, q/KpKqr×EA5—11.*
*18. EKpKqrKKpqr.*
*19. EEpqEEqrEpr*[1]).
*19 p/KKpqr, q/KrKpq, r/KKprq E17pKpq, q/r×E18 p/r, q/p, r/q—20.*
*20. EKKpqrKKprq.*
*A8p/Kpp, q/p, r/q×21.*
*21. EEEKKppqKpqqKqEKppp.*
*2p/KKppq, q/Kpq, r/q, s/EKppp×E21—EA7.*
*22. EqKqEKppp.*
*q/Epp×E4—23.*
*23. KEppEKppp.*
*6r/Epp, p/Kpp, q/p×E5—24.*
*24. EKKppEppKpEpp.*
*6r/Kpp, q/p×25.*
*25. EKKppEpp EEKKpppKKpppKpp*
*6r/p, q/p×26.*
*26. EKpEppEEKppKppp.*
*12p/KKppEpp, q/EEKKpppKKpppKpp, r/KpEpp s/EEKppKppp × E25—E26—27.*
*27. EEEKKpppKKpppKppEEKppKppp.*
*14p/EKKpppKKppp, q/Kpp, r/Kpp, s/Kpp.*
*28. EEKKpppKKpppEEKppKppEKppp.*
*29. EEpEqsEEpqs.*
*30. EEEppqq.*
*29p/EKKpppKKpp, q/EKppKpp, s/EKppp×E38—E30 p/KK ppp, q/Kpp—31.*
**31. EKppp.*

Trecem la demonstrarea teoremei. Vom considera întîi cazul cînd variabilele $p_i$ sînt distincte. Demonstrăm prin recurență că orice formă $\alpha \in \mathbf{S}(K)$, conținînd $n$ variabilele distincte $p_i$, admite forma normală:

$$\mathbf{N}(K) = K^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n$$

în care putem permuta oricum variabilele $p_i$.

[1]) Teză în sistemul $\mathbf{L}(E)$.

Pentru $n = 2$ ea este evidentă în baza tezei *17.
Pentru $n = 3$ avem următoarele 2 tipuri:
a) $KpKqr$; b) $KKpqr$.
Dar după teza 18 avem

$$KpKqr \sim KKpqr,$$

deci a) se reduce la b). Să arătăm că în b) putem schimba oricum variabilele între ele. Avem

$$KKpqr \sim KKqpr, \qquad \text{(axioma } A3\text{)},$$
$$KKpqr \sim KKprq, \qquad \text{(teza *20)},$$

deci variabilele pot fi intervertite.

Presupunem că teorema este adevărată pentru cazul $n$ și să arătăm că rămîne și pentru $n + 1$.

În forma $\alpha \in \mathbf{S}(K)$ de $n + 1$ variabile punem $t = Kp_1p_2$ și ea devine de $n$ variabile și deci admite forma

$$\mathbf{N}(K) = K^{n-1} t\, p_3 p_4 \cdots p_{n+1},$$

în care putem schimba oricum variabilele $t, p_3, \ldots, p_{n+1}$ între ele, și deci

$$K^{n-1} tp_3 p_4\, Kp_1p_2p_5 \cdots p_{n-1} \sim K^{n-1} Kp_3p_4p_1p_2p_5 \cdots p_{n+1}$$

și în care dacă punem $t = Kp_3p_4$ urmează că putem schimba variabilele $p_1, p_2, p_5, \ldots, p_{n+1}, t$ între ele și deci, cum și $p_3, p_4, p_5, \ldots, p_{n+1}$ se pot schimba între ele cu $p_1, p_2, p_3, p_{n+1}$, rezultă că putem schimba între ele oricum variabilele $p_1, \ldots, p_{n-1}$.

Arătăm acum cazul cînd variabilele $p_i$ nu sînt distincte. În acest caz avem următoarele formule:

$$KKp_1p_1p_2 \sim Kp_1p_2, \qquad \text{(axioma } A6\ p/p_1,\ q/p_2\text{)},$$
$$Kp_1p_1 \sim p_1, \qquad \text{(teza } 31\ p/p_1\text{)};$$

procedînd din aproape în aproape ajungem la un moment dat cînd toate variabilele sînt distincte.

TEOREMA 2. *Orice formă* $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ *admite forma normală*

$$\mathbf{N}(E, K) = E^{h-1} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_h \quad \textit{unde} \quad \alpha_i \in \mathbf{S}(K).$$

Verificăm teorema pentru 3 variabile. Toate formele $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ de trei variabile sînt de următoarele tipuri:

| | |
|---|---|
| *a.* $EpEqr$. | *e.* $EEpqr$. |
| *b.* $EpKqr$. | *f.* $EKpqr$. |
| *c.* $KpEqr$. | *g.* $KEpqr$. |
| *d.* $KpKqr$. | *h.* $KKpqr$. |

În baza formulelor

$$KpEqr \sim EEKqpKrpp, \qquad \text{(teza 6)},$$
$$KpEqr \sim KEqrp, \qquad \text{(teza 17)},$$

rezultă că și pentru 3 variabile teorema se verifică.

Presupunem teorema adevărată pentru $n$ variabile și $k$ functori $E$. Distingem două cazuri:

1. $\alpha$ conține cel puțin o subformă de tipul $Kpq$.

2. $\alpha$ nu conține nici o subformă de tipul $Kpq$. 1. Dacă $\alpha$ conține cel puțin o subformă $Kpq$, atunci înlocuind pe $Kpq$ cu $t$, forma devine de $n$ variabile și deci va admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, K) = E^{h-1}\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_h, \qquad h \geqslant k,$$

și unde $\alpha_i \in \mathbf{S}(K)$ care dacă conțin ca subforme pe $t=Kpq$ rezultă totuși $\alpha_i \in \mathbf{S}(K)$.

2. $\alpha$ nu conține nici o subformă de tipul $Kpq$. În acest caz ea conține cel puțin o sub formă de tipul $Epq$. Punînd $t = Kpq$, forma devenind de $n$ variabile admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, K) = E^{h-1}\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_h,$$

unde $\alpha_i$ pot conține subforma $Epq$.

În acest caz dacă $\alpha_i$ conține pe $Epq$, în baza teoremei 1 avem:

$$\alpha_i \sim \mathbf{N}(K) = K^{h_i}\,Ep_1p_2p_3 \ldots p_{h_i} \sim KEp_1p_2\,\omega_i,$$

unde $\omega_i = Kp_3p_4 \ldots p_{h_i}$. Dar

$$KEp_1p_2\omega_i \sim EEKp_1\,\omega_i Kp_2\,\omega_i$$

și deci

$$\mathbf{N}(E, K) \sim \mathbf{N}'(E, K) = E^{h'} \prod_{i=1}^{h'+1} EEKp_1\,\omega_i\,Kp_2\,\omega_i\,\omega_i \sim$$

$$\sim E^{h'+1} \prod_{i=1}^{h'+1} EEKp_1\,\omega_i\,Kp_2\,\omega_i\,\omega_i \sim E^{k'-1}\,\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_k,$$

unde $\beta_i$ pot fi de forma $Kp_1\,\omega_i$, $Kp_2\,\omega_i \in \mathbf{S}(K)$ și $\beta_i \in \mathbf{S}(K)$, adică teorema este demonstrată.

Dacă $\alpha_i$ conține mai multe subforme de tipul $Epq$, atunci repetăm acest raționament pînă cînd forma ei normală nu va mai conține nici o subformă de acest tip.

## § 2. TEOREMELE ADEVĂRATE ALE SUBSISTEMULUI $\mathbf{L}(E, K)$

Arătăm întîi în primul rînd că două forme $\alpha, \beta \in \mathbf{S}(K)$ sînt echivalente

$$\alpha \sim \beta \text{ față } \mathbf{L}(E, K)$$

dacă pentru oricare variabilă $p \in \alpha$ avem $p \in \beta$ și reciproc.

Într-adevăr, în acest caz formele $\alpha$ și $\beta$ sînt echivalente cu aceeași formă normală $\mathbf{N}(K)$.

Demonstrăm acum că toate formele $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ se clasifică în două grupe :

1. Formele $\alpha$ care admit forma normală

$$\mathbf{N}(E, K) = E^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_j} \omega_j^{(i)},$$

unde $\omega_j^{(i)} \in \mathbf{S}(K)$ și $\omega_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ sînt echipolente între ele. Ele sînt teoreme adevărate ale logicii clasice.

2. Celelalte forme alăturate axiomelor conduc la deducerea tuturor formelor, adică fac sistemul contradictoriu și deci ele nu sînt teoreme adevărate ale logicii clasice.

1. Dacă $\alpha$ admite forma normală :

$$\mathbf{N}(E, K) = E^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_i} \omega_j^{(i)} \quad [\omega_j^{(i)} \in \mathbf{S}(K)]$$

și unde formele $\omega_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ sînt echipolente între ele, urmează că $\omega_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ vor admite forma normală $\mathbf{N}_j'(K)$ cu care vor fi echipolente și deci

$$\mathbf{N}(E, K) \sim E^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} [\mathbf{N}_j(K)]^{2n_j} = \mathbf{N}'(E, K).$$

Fie :

I. $E^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} (p_j)^{2n_j}$ [teză în $\mathbf{L}(E)$] ;

II. $E\,\mathbf{N}(E, K)\ \mathbf{N}(E, K)$,

$\mathrm{II} \times E\,\mathrm{I}\ p_j/\mathbf{N}_j(K) - \mathrm{III}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$ ;

III. $\mathbf{N}(E, K)$.

Dar $\alpha \sim \mathbf{N}(E, K)$ și deci

IV. $E\mathbf{N}(E, K)\ \alpha$,

$\mathrm{IV} \times \mathrm{E}\ \mathrm{III} - \mathrm{V}$

V. $\alpha$.

și deci $\alpha$ este teză, adică o teoremă adevărată a logicii clasice.

2. Toate formele care nu îndeplinesc ipoteza punctului 1, vor admite o formă normală de tipul :

$$\mathbf{N}(E, K) = EE^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_j} \alpha_j^{(i)}\ E^{1}{}^{\sum_{1}^{h} 2m_i} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2m_j+1} \beta_j^{(i)},$$

unde $\alpha_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ sînt echipolente între ele și $\beta_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ sînt echipolente între ele. Dacă alăturăm pe $\alpha$ la axiome urmează că obținem teză :

I. $\mathbf{N}(E, K)$.

Dar $\mathbf{N}(E, K) \sim EE^{\sum_1^h (2m_i+2n_1)-1} \prod_{j=1}^{h} \left[ \prod_{i=1}^{2n_j} \alpha_j^{(i)} \prod_{i=1}^{2m_j} \beta_j^{(i)} \right] E^{2m_h} \beta_1^1 \beta_2^2$

$\beta_3^3 \ldots \beta_{2m_h+1}^{2m_h+1} = \mathbf{N}'(E, K)$

și deci :

II. $\mathbf{N}'(E, K) = E \omega E^{2m_h} \beta_1^1 \beta_2^2 \ldots \beta_{2m_h+1}^{2m_h+1}$.

Dar $\omega$ îndeplinind condiția de la punctul 1 este teză și deci :

III. $\omega$.

$\mathrm{II} \times E$ III $-$ IV.

IV. $E^{2m_h} \beta_1^1 \beta_2^2 \ldots \beta_{2m_h+1}^{2m_h+1}$ unde $\beta_i^i \in \mathbf{S}(K)$ și nu sînt echipolente între ele.

Dacă în $\beta_i^i$ substituim toate variabilele de propoziții prin $p$, rezultă că vom avea :

$$\beta_i^i \sim p \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m + 1) \text{ și deci}$$

V. $EE^{2m_j-1}(p)^{2m_j} p$ este teză.

Dar după lucrarea [2] avem :

VI. $p$ este teză,

adică toate formele mulțimii $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ sînt deductibile din axiome și deci sistemul devine contradictoriu.

## § 3. SISTEMUL $\mathbf{L}(E, K, R)$

Facem de la început observația că acest sistem conține ca subsistem pe $\mathbf{L}(E, R)$ studiat în lucrarea [2] și deci toate teoremele din $\mathbf{L}(E, R)$ rămîn valabile și pentru $\mathbf{L}(E, K, R)$.

TEOREMA 3. Orice formă $\alpha \in \mathbf{S}(E, K, R)$ admite o formă normală de tipul

$$\mathbf{N}(E, K, R) = E^h R^k \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{h+k+1} \quad \text{cu} \quad \alpha_i \in \mathbf{S}(K).$$

Demonstrăm teorema prin recurență. Pentru 2 variabile teorema este evidentă. Pentru 3 variabile formele sînt de următoarele tipuri :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$. $RpRqr$. | $a_2$. $RRpqr$. | $a_3$. $EpEqr$. | $a_4$. $EEpqr$. |
| $b_1$. $RpKqr$. | $b_2$. $RKpqr$. | $b_3$. $EpKqr$. | $b_4$. $EKpqr$. |
| $c_1$. $KpRqr$. | $c_3$. $KRpqr$. | $c_3$ $KpEqr$. | $c_4$. $EKpqr$. |

precum și formele $KpKqr$, $KKpqr$ pentru care teorema este evidentă la fel ca și pentru $a_i$, $b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Următoarele formule sînt adevărate :

$$KpRqr \sim RKprKqr,$$
$$KpRqr \sim KRqrp,$$
$$KpEqr \sim EEKpKqrr,$$
$$KpEqr \sim EKqrp.$$

În baza acestor formule rezultă că și pentru 3 variabile teorema se verifică.

Presupunem că forma $\alpha$ de $n$ variabile admite forma normală

$$\mathbf{N}(E, K, R) = E^h R^k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{h+k+1} \quad \text{cu} \quad \alpha_i \in \mathbf{S}(K).$$

Pentru forma $\alpha$ de $n+1$ variabile, avem 2 cazuri :

1. $\alpha$ conține cel puțin o subformă de tipul $Kpq$ ;
2. $\alpha$ nu conține nici o subformă de tipul $Kpq$.

Pentru subcazul 1, notînd $Kpq = t$, $\alpha$ devine de $n$ variabile și deci va admite forma normală

$$\mathbf{N}(E, K, R) = E^h K^k \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{h+k+1}, \quad \text{cu} \quad \alpha_i \in \mathbf{S}(K),$$

și unde formele $\alpha_i$ pot conține variabila $t = Kpq$ adică și în această ipoteză $\alpha_i \in \mathbf{S}(K)$.

În subcazul 2, rezultă că $\alpha$ conține cel puțin o subformă de tipul $Epq$ sau $Rpq$.

Pentru cazul cînd $\alpha$ conține cel puțin o subformă $Epq$ s-a demonstrat în teorema precedentă.

În cazul cînd $\alpha$ conține cel puțin o subformă $Rpq$ notăm $u = Rpq$ și $\alpha$ devenind de $n$ variabile va admite forma normală :

$$\mathbf{N}'(E, R, K) = E^{h''} R^{k''} \prod_{i=1}^{h''+k''+1} \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{S}(K).$$

Dar după teorema 1 avem :

$$\alpha_i \sim Ku\, \beta_i,$$

unde $\beta_i$ nu conține $u$ și deci $\beta_i \in \mathbf{S}(K)$.

Urmează

$$\mathbf{N}'(E, R, K) \sim E^{h''} R^{k''} \prod_{i=1}^{h''+k''+1} Ku\, \beta_i = E^{h''} R^{k''} \prod_{i=1}^{h''+k''+1} KR\, pq\, \beta_i .$$

Dar

$$RKpq\, \beta_i \sim RKp\, \beta_i\, Kq\, \beta_i$$

și deci :

$$\mathbf{N}'(E, R, K) \sim E^{h''} R^{k''} KRpq\, \beta_i \sim E^{h''} R^{k''} \prod_{i=1}^{h''+k''+1} RKp\, \beta_i\, Kq\, \beta_i$$

și deci după teoremele sistemului $\mathbf{L}(E, R)$ urmează:

$$\mathbf{N}'(E, R, K) = E^{h''} R^{2k''+h''+1} \prod_{i=1}^{h''+k''+1} (Kp\ \beta_i\ Kq\ \beta_i) = E^h R^k \prod_{i=1}^{h+k+1} \gamma_i$$

cu $\gamma_i \in \mathbf{S}(K)$ și unde $h = h''$, $k = k'' + h'' + 1$.

Teorema este astfel în întregime demonstrată.

*Observație.* După teoremele lui $\mathbf{L}(E, R)$, forma normală poate fi scrisă în modurile următoare:

1. Dacă $h + k = 2m + 1$ și $k = 2n$ atunci admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, R, K) = E^{h+k} \prod_{i=1}^{h+k+1} \alpha_i .$$

2. Dacă $h + k = 2m + 1$ și $k = 2n + 1$ atunci admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, R, K) = R^{h+k} \prod_{i=1}^{h+k+1} \alpha_i .$$

3. Dacă $h + k = 2m$ și $k = 2n$ atunci admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, R, K) = E^{h+k} \prod_{i=1}^{h+k+1} \alpha_i .$$

4. Dacă $h + k = 2m$ și $k = 2n + 1$ atunci admite forma normală:

$$\mathbf{N}(E, R, K) = RE^{h+k+1} \prod_{i=1}^{h+k+1} \alpha_i \sim ER^{h+k+1} \prod_{i=1}^{h+k+1} \alpha_i .$$

TEOREMA 4. 1) *Orice formă* $\alpha \in \mathbf{S}(E, R, K)$ *care admite forma normală*

$$\mathbf{N}(E, R, K) = E^{\sum_1^h 2n_j - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_j} \omega_j^{(i)}, \quad \text{cu} \quad \omega_j^{(i)} \in \mathbf{S}(K),$$

*unde* $\omega_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ *sînt echipolente între ele, este o teză, adică o teoremă adecvată a logicii clasice.*

2) *Orice formă* $\alpha \in \mathbf{S}(E, R, K)$ *care admite forma normală*

$$\mathbf{N}(E, R, K) = R^{\sum_1^h 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_j} \omega_j , \qquad \omega_j^{(i)} \in \mathbf{S}(K),$$

*unde* $\omega_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ *sînt echipolente între ele, este o formă liberă.*

3) *Celelalte forme ce nu satisfac condiția* 1 *sau* 2, *alăturate axiomelor, fac ca sistemul să devină contradictoriu.*

*Cazul 1* este evident în baza teoremei 2 din sistemul $\mathbf{L}(E, K)$.

*Cazul 2.* Dacă $\alpha$ admite forma normală

$$\mathbf{N}(E, R, K) = R^{\sum_1^h 2n_i - 1} \prod_{j=1}^{h} \prod_{i=1}^{2n_j} \omega_j^{(i)},$$

atunci forma

$$E\mathbf{N}(E, R, K)\ Rpp$$

este o teză, deoarece satisface condiția cazului 1.

Dacă la axiomele sistemului $\mathbf{L}(E, R, K)$ alăturăm axioma

*A9. Rpp,*

sistemul nu devine contradictoriu. Într-adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea tuturor consecințelor axiomelor $A1-A9$, arătăm că

$$\mathcal{P} \neq \mathbf{S}(E, R, K).$$

Formele mulțimii $\mathbf{S}(E, R, K)$ se împart în 3 grupe și anume:

I. submulțimea $\mathcal{O}$ a formelor care au valoarea logică *1*;
II. submulțimea $\mathcal{F}$ a formelor care au valoarea logică *0*;
III. submulțimea $Q$ a formelor care au valoarea logică *1* sau *0*.

Este evident că:

$$^*\mathbf{L}(E, K, R) \subset \mathcal{O} \quad \text{și} \quad \mathcal{C}(A9) \subset \mathcal{F},$$

unde $\mathbf{L}(E, K, R)$ este noul sistem la care s-a alăturat axioma $A9$ iar $\mathcal{C}(A9)$ toate consecințele lui $A9$.

$$\mathcal{P} = {}^*\mathbf{L}(E, R, K) + \mathcal{C}(A9) + \mathcal{M}$$

unde $\mathcal{M}$ este mulțimea tuturor formelor care derivă în virtutea regulei de detașare astfel: $\omega \in \mathcal{M}$ dacă există $\gamma = E\beta\omega$ astfel ca:

a. $\gamma \in {}^*\mathbf{L}(E, R, K)$ și $\beta \in \mathcal{C}(A9)$,

sau b. $\gamma \in \mathcal{C}(A9)$ și $\beta \in {}^*\mathbf{L}(E, R, K)$.

*Cazul a.* Dacă $\gamma \in {}^*\mathbf{L}(E, K, R)$ și $\beta \in \mathcal{C}(A9)$ însumăm $\gamma = 1$ și $\beta = 0$ deci $E10 = 0$ și deci trebuie absolut necesar $\omega = 0$.

*Cazul b.* Dacă $\gamma \in \mathcal{C}(A9)$ și $\beta \in {}^*\mathbf{L}(E, R, K)$ înseamnă $\gamma = 0$ și $\beta = 1$ deci $E01 = 0$ și deci absolut necesar $\omega = 0$.

Rezultă astfel că în ambele cazuri avem

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \text{ deoarece } \omega \in \mathcal{F}.$$

De aici rezultă că în $\mathcal{P}$ nu există nici o formă $\omega \in Q$, adică

$$\mathcal{P} \neq \mathbf{S}(E, R, K),$$

și deci sistemul nu este contradictoriu. Astfel forma *Rpp*, care nu este o consecință a axiomelor $A1-A8$ și totuși alăturată axiomelor nu face sistemul contradictoriu, este o formă liberă.

În baza formulei

$$\mathbf{N}(E, R, K) \sim Rpp$$

pentru cazul cînd $\alpha$ satisface condiția din subcazul 2, rezultă că $\mathbf{N}(E, R, K)$ este formă liberă și deci $\alpha$ este formă liberă, adică avem o infinitate de forme libere toate echipolente între ele.

3. Formele $\alpha \in \mathbf{S}(E, K, R)$ care nu satisfac condițiile din cazurile 1 și 2 alăturate axiomelor, atrag deductibilitatea tuturor formelor. Într-adevăr, ele admit forme normale de tipurile:

$$2a.\quad \mathbf{N}_1(E, R, K) = E^{M_1}\left(\prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{2n_j}\alpha_j^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{t}\prod_{i=1}^{2m_j+1}\beta_j^{(i)}\right),$$

$$2b.\quad \mathbf{N}_2(E, R, K) = R^{M_2}\left(\prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{2n_j}\alpha_j^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{2t}\prod_{i=1}^{2m_j+1}\beta_j^{(i)}\right),$$

$$2c.\quad \mathbf{N}_3(E, R, \mathcal{C}) = R^{M_3}\left(\prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{2n_j}\alpha_j^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{2t+1}\prod_{i=1}^{2m_j+1}\beta_j^{(i)}\right),$$

unde $\alpha_j^{(i)}$, $\beta_j^{(i)} \in \mathbf{S}(K)$ și

$\alpha_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ sînt echipolente,

$\beta_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2h + 1)$ sînt echipolente,

iar

$$M_1 = 2\left(\sum_{j=1}^{t} n_j + \sum_{j=1}^{h} m_j\right) + t - 1,$$

$$M_2 = 2\left(\sum_{i=1}^{h} n_i + \sum_{i=1}^{2t} m_i\right) + 2t - 1,$$

$$M_3 = 2\left(\sum_{i=1}^{h} n_i + \sum_{i=1}^{2t+1} m_i\right) + 2t - 1.$$

2a. Acest caz a fost studiat în § 2.

2b. Considerînd $\alpha$ ca axiomă, obținem:

I. $\alpha$.

II. $\mathbf{N}_2(E, K, R)$.

Dar forma

$$D = E\,\mathbf{N}_2(E, R, K)\,R^{M_4}\left(\prod_{j=3}^{2t}\prod_{i=1}^{2m_j+1}\beta_j^{(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{2}\prod_{i=1}^{2m_j+1}\beta_j^{(i)}\right)E\beta_1^{(2m_1+1)}\,\beta_2^{(2m_2+1)}$$

este o formă care satisface condiția 1, cu

$$M_4 = \sum_{j=1}^{2t} 2n_j + 2t - 1,$$

și deci:

III. $E\,\mathbf{N}_2(E, R, K)\,D^*\,E\,\beta_1^{(2m_1+1)}\,\beta_2^{(2m_2+1)}$.

Dar

IV. $EEpRqrERpqr$ fiind teză, avem :

IV $p/\mathbf{N}_2$, $q/\mathbf{D}^*$, $r/E\ \beta_1^{(2m_1+1)}\ \beta_2^{(2m_2+1)} \times E$ III—V.

V. $ER\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{D}^*\,E\,\beta_1^{(2m_1+1)}\ \beta_2^{(2m_2+1)}$.

Dar formele $\beta_1^{(2m_1+1)}$, $\beta_2^{(2m_2+1)}$ nefiind echipolente, rezultă că conține cel puțin o literă $p$ care nu este conținută în $\beta_1^{(2m_1+1)}$. În $\beta_2^{(2m_2+1)}$ substituind prin $q$ toate literele diferite de $p$, $E\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{D}^*$ devine $E\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{D}^{**}$ iar $\beta_1^{(2m_1+1)}$ devine $\beta_1^*$ iar $\beta_2^{(2m_2+1)}$ devine $\beta_2^*$ și deci

VI. $ER\,\mathbf{N}_2^*\,\mathbf{D}^{**}\,E\,\beta_1^*\,\beta_2^*$ este teză și cum $R\,\mathbf{N}_2^*\,\mathbf{D}^*$ satisface condiția din cazul 1, este teză și deci

$$\text{VI} \times ER\,\mathbf{N}^*\,\mathbf{D}^* - \text{VII}.$$

VII. $E\,\beta_1^*\,\beta_2^*$.

Dar pe de altă parte

$$\beta_1^* \sim p$$

$$\beta_2^* \sim Kpq$$

și deci

VII. $EpKpq$

adică

VIII. $p$.

2c. În acest caz procedăm analog ca în cazul 2b.

Primită la redacție la 8 martie 1962

## СИСТЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, КОНЪЮНКЦИИ И ВЗАИМНОСТИ

### РЕЗЮМЕ

Система $\mathbf{L}(E, R, K)$ аксиоматизируется следующими аксиомами

$A_1$ $EEpqEqp$,
$A_2$ $EEE\,prqEpEqr$,
$A_3$ $EKK\,pqrKKqpr$,
$A_4$ $EKpKqrKKpqr$,
$A_5$ $EKKppqq$,
$A_6$ $EEEKprKqrrKrEpqr$,
$A_7$ $EKRpqr\ RKpr\ Kqr$.

В § 1 даются нормальные формы для $\alpha \in \mathbf{S}(K)$ и $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ и формы из $\mathbf{S}(E, K)$ развиваются на две группы, а именно те, которые являются

истинными теоремами классической логики и те, которые присоединенные к аксиомам делают систему $\mathbf{L}(E, K)$ противоречивой.

В § 2 доказывается, что система $\mathbf{L}(E, K, R)$ не является полной; она допускает бесконечное множество свободных форм, эквивалентных между собой, кратчайшей из которых является форма

$$Rpp,$$

то есть мы должны допускать как аксиому отрицание принципа противоречия, для того чтобы $\mathbf{L}(E, K, R)$ стала полной.

Доказательство этого факта проводится также на основании нормальных форм множества $\mathbf{S}(E, R, K)$, при помощи которых множество форм из $\mathbf{S}(E, R, K)$ разбивается на три группы:

I. формы, являющиеся истинными теоремами классической логики,

II. свободные формы,

III. формы, которые, присоединенные к аксиомам, влекут выводимость всех форм, следовательно, делают систему противоречивой.

## SYSTÈME D'ÉQUIVALENCE, CONJONCTION ET RÉCIPROCITÉ

RÉSUMÉ

L'auteur a axiomatisé le système $\mathbf{L}(E, R, K)$ en recourant aux axiomes suivants :

$$\begin{aligned} &A_1\ EEpqEqp,\\ &A_2\ EEEprqEpEqr,\\ &A_3\ EKKpqrKKqpr,\\ &A_4\ EKpKqrKKpqr,\\ &A_5\ EKKppqq,\\ &A_6\ EEEKprKqrrKrEpqr,\\ &A_7\ EKRpqrRKprKqr. \end{aligned}$$

Au paragraphe 1, l'auteur indique des formes normales pour $\alpha \in \mathbf{S}(K)$ et $\alpha \in \mathbf{S}(E, K)$ et il classifie les formes de l'ensemble $\mathbf{S}(E, K)$ en deux groupes, à savoir celles qui sont de véritables théorèmes de la logique classique et celles qui jointes aux axiomes rendent le système $\mathbf{L}(E, K)$ contradictoire.

Au paragraphe 2, il démontre que le système $\mathbf{L}(E, K, R)$ n'est pas complet, car il admet une infinité de formes libres, toutes équivalentes entre elles et dont la plus courte est de la forme

$$Rpp$$

ce qui l'oblige à admettre comme axiome la négation du principe de contradiction pour que $\mathbf{L}(E, K, R)$ soit complet.

La démonstration de ce fait a été également faite en recourant aux formes normales de l'ensemble $\mathbf{S}(E, R, K)$, qui lui ont permis de classifier l'ensemble de formes de $\mathbf{S}(E, R, K)$ en trois groupes :

I. Formes qui sont des thèses (vrais théorèmes de la logique classique) ;

III. Formes qui sont libres ;

III. Formes qui jointes aux axiomes entraînent la déductibilité de toutes les formes, c'est-à-dire rendent le système contradictoire.

## BIBLIOGRAFIE

1- E. MIHĂILESCU, *Recherches sur un sous-système.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 1937.
2. — *Recherches sur l'équivalence et la réciprocité.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 1938.

# DOUĂ EXTINDERI ALE INTEGRALELOR RIEMANN ŞI LEBESGUE. II [1]

DE

ION I. CRISTEA

## A DOUA EXTINDERE

### § 4. DEFINIŢIE. PROPRIETĂŢI

Am văzut în paragraful precedent că dacă $g(x)$ este o funcţie măsurabilă iar $f(x)$ o funcţie $g$-integrabilă pe $E$, atunci oricare ar fi funcţia $h(x)$ măsurabilă, alta decît $g(x)$, avem

$$\underline{\int}_E f\,dh^{-1} \leqslant \int_E f\,dg^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\,dh^{-1}.$$

În baza acestor inegalităţi, $g$-integrala lui $f(x)$ pe $E$ poate fi privită pe de o parte ca marginea superioară a $h$-integralelor inferioare $\underline{\int}_E f\,dh^{-1}$ ale lui $f(x)$ cînd $h(x)$ parcurge mulţimea tuturor funcţiilor măsurabile pe $E$, iar pe de altă parte ca marginea inferioară a $h$-integralelor superioare, $\overline{\int}_E f\,dh^{-1}$ cînd $h(x)$ parcurge aceeaşi mulţime a funcţiilor măsurabile pe $E$.

Totodată, conform propoziţiei 3 şi relaţiilor de medie (1), oricare ar fi funcţiile măsurabile $g_1(x)$ şi $g_2(x)$ avem

$$a \cdot m\,E \leqslant \underline{\int}_E f\,dg_1^{-1} \leqslant \overline{\int}_E f\,dg_2^{-1} \leqslant A \cdot m\,E.$$

[1]) Prezenta lucrare este o reluare a comunicării *Asupra unor extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue*, prezentată de autor la „Conferinţa pe ţară a cercurilor ştiinţifice studenţeşti" din 25—26 aprilie 1959, la Universitatea din Bucureşti. Este de asemenea o continuare a lucrării [4].

Să notăm atunci cu $\mathfrak{M}$ mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile pe $E$ și să considerăm marginile

$$\begin{aligned} \underset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx &= \sup_{g\in\mathfrak{M}} \underline{\int_E} f\,dg^{-1}, \\ \overset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx &= \inf_{g\in\mathfrak{M}} \overline{\int_E} f\,dg^{-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Vom numi aceste margini *integrala inferioară*, respectiv *integrala superioară, a funcției $f(x)$ pe mulțimea $E$.* În general avem

$$a\cdot m\,E \leqslant \underset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx \leqslant \overset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx \leqslant A\cdot m\,E. \tag{12}$$

D e f i n i ț i a 2. *Dacă pentru o funcție $f(x)$ definită pe o mulțime $E$ măsurabilă avem*

$$\underset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx = \overset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx,$$

*vom spune că funcția $f(x)$ este integrabilă pe mulțimea $E$ iar valoarea comună a celor două integrale inferioară și superioară o vom nota cu*

$$\int_E f(x)\,dx.$$

În urma acestei definiții, dacă $g(x)$ este o funcție măsurabilă, iar $f(x)$ o funcție $g$-integrabilă pe $E$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $E$ și avem

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f\,dg^{-1}.$$

De asemenea, faptul semnalat în paragraful precedent prin care $g$-integrala unei funcții $f(x)$ pe $E$ este aceeași oricare ar fi funcția $g(x)$ măsurabilă, conform ultimei definiții, devine și mai vizibil. Integrabilitatea în sensul definiției 1 este astfel eliberată de particularitatea funcției $g(x)$ măsurabile, cunoașterea funcțiilor $g(x)$ pentru care $f(x)$ este $g$-integrabilă pe $E$ având doar valoare practică.

Generalitatea definiției 2, față de definiția 1, constă și în aceea că pentru o funcție $f(x)$ suficient de generală este posibil ca integralele inferioară și superioară ale lui $f(x)$ să nu se poată exprima cu ajutorul uneia și aceleiași funcții măsurabile $g(x)$; cu alte cuvinte, din

$$\underset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx = \underline{\int_E} f\,dg_1^{-1}, \qquad \overset{\cdot}{\int_E} f(x)\,dx = \overline{\int_E} f\,dg_2^{-1}, \tag{13}$$

să rezulte că $g_1(x)$ nu este identic egală cu $g_2(x)$ pe $E$. Mai departe este posibil să existe o funcție $g(x) \in \mathfrak{M}$ pentru care să avem una din egalitățile (13), dar să nu existe nici o funcție $h(x) \in \mathfrak{M}$ pentru care să avem egalitatea cealaltă. Mai mult, se poate chiar să nu existe nici o funcție $g(x) \in \mathfrak{M}$ care să satisfacă una cel puțin din egalitățile (13), în acest ultim caz marginile (11) putînd să fie atinse printr-un proces la limită.

Să analizăm deocamdată cîteva proprietăți ale integrabilității introduse prin definiția 2.

Este imediată proprietatea de medie

$$a \cdot m E \leqslant \int_E f(x)\, dx \leqslant A \cdot m E, \tag{12'}$$

de unde rezultă de asemenea că dacă $E$ este de măsură nulă, integrala oricărei funcțiuni $f(x)$ pe $E$ este nulă.

Propoziția 4. *Oricare ar fi descompunerea mulțimii $E$ într-un număr finit de mulțimi măsurabile disjuncte*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k),$$

*atunci avem inegalitățile*

$$\int_E f(x)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\, dx \leqslant \int_E f(x)\, dx.$$

În adevăr, deoarece integrala inferioară a lui $f(x)$ este marginea superioară a $g$-integralelor inferioare ale lui $f(x)$ cînd $g(x) \in \mathfrak{M}$, rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o funcție măsurabilă $g(x)$ pe $E$ astfel încît

$$\int_E f(x)\, dx - \varepsilon < \int_E f\, dg^{-1}.$$

Or, conform propoziției 1 și definiției integralei inferioare a lui $f(x)$ pe mulțimile $E_i$, avem

$$\int_E f\, dg^{-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, dg^{-1}$$

și

$$\int_{E_i} f\, dg^{-1} \leqslant \int_{E_i} f(x)\, dx.$$

Prin urmare

$$\int_E f(x)\, dx - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\, dx,$$

sau, cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar,

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

Analog se demonstrează și inegalitatea

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

COROLAR. *Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $E$, oricare ar fi descompunerea finită a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k),$$

*atunci avem integrabilitatea lui $f(x)$ pe fiecare mulțime $E_i$ iar*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

Ca și în paragraful 1, în baza proprietății de medie (12′), se arată că acest corolar este valabil chiar în cazul unei descompuneri infinit-numerabile a lui $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte.

Putem deci enunța următoarea proprietate de aditivitate completă a integralei noastre ca funcție de mulțime :

TEOREMA 11. *Oricare ar fi descompunerea cel mult numerabilă a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două*

$$E = \bigcup_{i} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k),$$

*dacă $f(x)$ este integrabilă pe $E$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe fiecare mulțime $E_i$ și avem egalitatea*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i} \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

Propoziția 5a. *Oricare ar fi constanta $C$, dacă $C > 0$ avem*

$$\int_E [Cf(x)]\,dx = C \int_E f(x)\,dx, \qquad \int_E [Cf(x)]\,dx = C \int_E f(x)\,dx$$

*iar dacă $C < 0$*

$$\int_E [Cf(x)]\,dx \geqslant C \int_E f(x)\,dx, \qquad \int_E [Cf(x)]\,dx \leqslant C \int_E f(x)\,dx.$$

Propoziţia 5 b. *Oricare ar fi funcţiunile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ avem inegalităţile*

$$\underline{\int_E} f_1(x)\,dx + \underline{\int_E} f_2(x)\,dx \leqslant \underline{\int_E} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx,$$

$$\overline{\int_E} f_1(x)\,dx + \overline{\int_E} f_2(x)\,dx \geqslant \overline{\int_E} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Ambele propoziţii sînt imediate. Pe baza lor se deduc :

TEOREMA 12 a. *Oricare ar fi constanta $C$, dacă $f(x)$ este integrabilă pe $E$ atunci şi $Cf(x)$ este integrabilă pe $E$ iar*

$$\int_E [Cf(x)]\,dx = C\int_E f(x)\,dx.$$

TEOREMA 12 b. *Dacă funcţiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sînt integrabile pe mulţimea $E$ atunci şi suma lor $f_1(x) + f_2(x)$ este integrabilă pe $E$ şi avem egalitatea*

$$\int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx = \int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Într-un cuvînt, ultimele două teoreme stabilesc că mulţimea funcţiilor integrabile pe $E$, în sensul definiţiei 2, constituie de asemenea un spaţiu liniar.

## § 5. PROBLEMA INTEGRABILITĂŢII

Este imediată următoarea teoremă :

TEOREMA 13. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă două funcţii măsurabile $g_1(x)$ şi $g_2(x)$ astfel încît*

$$\overline{\int_E} f\,dg_2^{-1} - \underline{\int_E} f\,dg_1^{-1} < \varepsilon.$$

În adevăr, $\varepsilon > 0$ fiind dat, conform definiţiei integralelor inferioară şi superioară ale lui $f(x)$ pe $E$, există două funcţii măsurabile $g_1(x)$ şi $g_2(x)$ astfel încît

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_E} f\,dg_1^{-1}, \quad \overline{\int_E} f\,dg_2^{-1} < \overline{\int_E} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, presupunînd că $f(x)$ este integrabilă pe $E$, adică

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx,$$

inegalitatea din enunț pe care o avem pentru funcțiile $g_1(x)$ și $g_2(x)$ este imediată.

Reciproc, dacă $\varepsilon > 0$ să presupunem că există două funcții $g_1(x)$ și $g_2(x)$, măsurabile pe $E$, astfel încît

$$\overline{\int_E} f\,dg_2^{-1} - \underline{\int_E} f\,dg_1^{-1} < \varepsilon.$$

Deoarece avem cu atît mai mult

$$\int_E f(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx < \varepsilon$$

și deoarece $\varepsilon$ este un număr arbitrar iar primul membru al ultimei inegalități nu depinde de $\varepsilon$, rezultă

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

și deci avem integrabilitatea lui $f(x)$ pe $E$.

Această teoremă se poate pune și sub forma echivalentă.

TEOREMA 13′. *O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă două funcții măsurabile*

$$g_1 : E \to (b_1, B_1) \text{ și } g_2 : E \to (b_2, B_2)$$

*și două diviziuni $\Delta_1$ și $\Delta_2$ ale intervalelor $(b_1, B_1)$, respectiv $(b_2, B_2)$ astfel încît*

$$S_{\Delta_2}(f, g_2) - s_{\Delta_1}(f, g_1) < \varepsilon.$$

În adevăr, cum în baza teoremei precedente $\varepsilon > 0$ fiind dat, există două funcții $g_1(x)$ și $g_2(x)$ măsurabile pe $E$, astfel încît

$$\overline{\int_E} f\,dg_2^{-1} - \underline{\int_E} f\,dg_1^{-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

și, deoarece în baza definițiilor simbolurilor din primul membru există două diviziuni $\Delta_1$ și $\Delta_2$ ale intervalelor $(b_1, B_1)$, respectiv $(b_2, B_2)$, pentru care

$$\underline{\int_E} f\,dg_1^{-1} - \frac{\varepsilon}{4} < s_{\Delta_1}(f, g_1),\ S_{\Delta_2}(f, g_2) < \overline{\int_E} f\,dg_2^{-1} + \frac{\varepsilon}{4},$$

avem

$$S_{\Delta_2}(f, g_2) - s_{\Delta_1}(f, g_1) < \overline{\int_E} f\, dg_2^{-1} - \underline{\int_E} f\, dg_1^{-1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Reciproc, dacă oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespund două funcţii $g_1 : E \to (b_1, B_1)$ şi $g_2 : E \to (b_2, B_2)$ şi două diviziuni $\Delta_1$ şi $\Delta_2$ ale intervalelor $(b_1, B_1)$ şi $(b_2, B_2)$ astfel ca

$$S_{\Delta_2}(f, g_2) - s_{\Delta_1}(f, g_1) < \varepsilon,$$

rezultă cu atît mai mult

$$\overline{\int_E} f\, dg_2^{-1} - \underline{\int_E} f\, dg_1^{-1} < \varepsilon$$

şi deci, în baza teoremei precedente, $f(x)$ este integrabilă pe $E$.

Vom demonstra acum o teoremă extrem de utilă în consideraţiile ce vor urma şi care va permite a da o nouă definiţie, echivalentă cu definiţia 2, noţiunii de integrabilitate a unei funcţiuni $f(x)$ pe o mulţime măsurabilă $E$.

TEOREMA 14. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă o descompunere finită a mulţimii $E$ în mulţimi măsurabile disjuncte două cîte două*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k)$$

*astfel încît să aibă loc inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} [\sup f(E_i) - \inf f(E_i)] \cdot m E_i < \varepsilon. \tag{14}$$

*Necesitatea.* Conform teoremei 13′, $\varepsilon > 0$ fiind dat există două funcţii măsurabile $g_1 : E \to (b_1, B_1)$ şi $g_2 : E \to (b_2, B_2)$ şi două diviziuni $\Delta_1$ şi $\Delta_2$ ale intervalelor $(b_1, B_1)$ şi $(b_2, B_2)$ aşa fel ca

$$S_{\Delta_2}(f, g_2) - s_{\Delta_1}(f, g_1) < \varepsilon.$$

Să presupunem că

$$\Delta_1 = (b_1 = g_1^0 < g_1^1 < g_1^2 < \ldots < g_1^i < \ldots < g_1^n = B_1)$$

$$\Delta_2 = (b_2 = g_2^0 < g_2^1 < g_2^2 < \ldots < g_2^j < \ldots < g_2^m = B_2)$$

şi să considerăm mulţimile

$$e_1^i = g_1^{-1}([g_1^{i-1}, g_1^i)), \qquad e_2^j = g_2^{-1}([g_2^{j-1}, g_2^j)), \qquad e^{ij} = e_1^i \cap e_2^j$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m).$$

Avem

$$s_{\Delta_1}(f, g_1) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(e_1^i) \cdot m e_1^i, \qquad S_{\Delta_2}(f, g_2) = \sum_{j=1}^{m} \sup f(e_2^j) \cdot m e_2^j,$$

și cum

$$e_1^i = \bigcup_{j=1}^{m} e^{ij}, \qquad e_2^j = \bigcup_{i=1}^{n} e^{ij},$$

ultima inegalitate se transcrie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [\sup f(e_2^j) - \inf f(e_1^i)] \cdot m e^{ij} < \varepsilon.$$

Însă,

$$e_1^i \supset e^{ij}, \; e_2^j \supset e^{ij}$$

și deci

$$\inf f(e_1^i) \leqslant \inf f(e^{ij}), \quad \sup f(e_2^j) \geqslant \sup f(e^{ij}),$$

astfel că, cu atît mai mult,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [\sup f(e^{ij}) - \inf f(e^{ij})] \cdot m e^{ij} < \varepsilon. \tag{15}$$

Cum $e^{ij}$ sînt mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două și avem

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} e^{ij} = E,$$

mulțimile $e^{ij}$ realizează o descompunere finită a mulțimii $E$. Or, pentru aceste mulțimi avînd inegalitatea (15) necesitatea teoremei este demonstrată.

*Suficiența.* Să presupunem, reciproc, că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o descompunere finită a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad (E_j \cap E_k = O, \quad j \neq k),$$

astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} [\sup f(E_i) - \inf f(E_i)] \cdot m E_i < \varepsilon. \tag{14}$$

Să considerăm atunci o funcție $g(x)$, definită pe $E$, care să fie constantă pe fiecare mulțime $E_i$, anume

$$g(x) = c_i, \quad \text{pentru} \quad x \in E_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și astfel ca $c_j < c_k$ dacă $j < k$.

Funcția $g(x)$ astfel definită este evident măsurabilă pe $E$.

Fie $(b, B)$ un interval deschis pe axa valorilor lui $g(x)$ care conține toate punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cum

$$\Delta = (b = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_i < \ldots c_n < c_{n+1} = B)$$

este o diviziune a intervalului $(b, B)$ iar

$$E_i = g^{-1}([c_i, c_{i+1})), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

să considerăm sumele

$$s_\Delta(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(E_i) \cdot m E_i, \qquad S_\Delta(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(E_i) \cdot m E_i.$$

Cu ajutorul acestor sume, inegalitatea (14) se transcrie

$$S_\Delta(f, g) - s_\Delta(f, g) < \varepsilon. \tag{16}$$

Rezumînd, $\varepsilon > 0$ fiind dat s-a determinat o funcție $g : E \to (b, B)$ măsurabilă pe $E$ și o diviziune $\Delta$ a lui $(b, B)$ astfel încît pentru această funcție $g(x)$ și această diviziune $\Delta$ să avem inegalitatea (16). Or, în baza teoremei 13', aceasta înseamnă integrabilitatea funcției $f(x)$ pe $E$.

*Observație.* Din felul cum a fost demonstrată această teoremă rezultă că în teoremele 13 și 13' funcțiile $g_1(x)$ și $g_2(x)$ ce se atașază fiecărui $\varepsilon > 0$, se pot lua identice.

Cum diferența

$$\omega_f(E_i) = \sup f(E_i) - \inf f(E_i)$$

reprezintă oscilația funcției $f(x)$ pe mulțimea $E_i$, inegalitatea (14) a teoremei 14 se mai scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(E_i) \cdot m E_i < \varepsilon. \tag{14'}$$

Considerînd atunci un punct $x_0 \in E$ și familia tuturor mulțimilor măsurabile $\widetilde{E} \subset E$ care conțin punctul $x_0$, marginea inferioară

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\widetilde{E} \subset E} \{\omega_f(\widetilde{E})\}$$

o vom numi *oscilația în sens generalizat* a funcției $f(x)$ în punctul $x_0$.

Cu această definiție și în baza inegalității (14') terorema 14 va conduce la

TEOREMA 15 a. *Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $E$, atunci oricare ar fi perechea de numere pozitive $\varepsilon$ și $\sigma$, există o familie finită de submulțimi măsurabile $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$ ale lui $E$ disjuncte două cîte două care acoperă mulțimea punctelor $x \in E$ pentru care $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ și astfel ca reuniunea mulțimilor $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$ să fie de măsură inferioară lui $\sigma$.*

Absolut analog ca la teorema 4a se demonstrează că oricare ar fi perechea de numere pozitive $\varepsilon$ și $\sigma$ există o familie finită de mulțimi măsurabile $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$, disjuncte două cîte două, astfel ca

$$\omega_f(\widetilde{E}_k) \geqslant \varepsilon, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

iar

$$\sum_{k=1}^{p} m\,\widetilde{E}_k < \sigma,$$

de unde rezultă teorema.

Reciproc avem

TEOREMA 15 b. *Dacă oricărei perechi de numere pozitive* $\varepsilon$ *și* $\sigma$ *îi corespunde o familie finită de submulțimi măsurabile* $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$ *disjuncte două cîte două, care să acopere mulțimea punctelor* $x \in E$ *pentru care* $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ *și astfel ca reuniunea acestor mulțimi să fie de măsură inferioară lui* $\sigma$, *atunci* $f(x)$ *este integrabilă pe* $E$.

În adevăr, dîndu-se $\varepsilon > 0$ și $\sigma > 0$ să presupunem că mulțimea punctelor $x \in E$ pentru care $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ se poate acoperi cu o familie finită de submulțimi măsurabile disjuncte două cîte două $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$, incluse în $E$ și astfel ca

$$\sum_{k=1}^{p} m\,\widetilde{E}_k < \sigma.$$

Să considerăm și mulțimea

$$E^* = C_E\left(\bigcup_{k=1}^{p} \widetilde{E}_k\right) = E - \bigcup_{k=1}^{p} \widetilde{E}_k.$$

Această mulțime $E^*$ este măsurabilă iar în orice punct $x$ al ei avem evident

$$\omega_f(x) < \varepsilon.$$

Mulțimile $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_p$ și $E^*$ constituie o descompunere finită a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două. Considerînd suma

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_f(\widetilde{E}_k) \cdot m\,\widetilde{E}_k + \omega_f(E^*) \cdot m\,E^*$$

relativă la această descompunere finită a mulțimii $E$, cum

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_f(\widetilde{E}_k) \cdot m\,\widetilde{E}_k < (A - a) \cdot \sum_{k=1}^{p} m\,\widetilde{E}_k < (A - a) \cdot \sigma$$

iar

$$\omega_f(E^*) \cdot m\,E^* < \varepsilon \cdot m\,E^* < \varepsilon \cdot m\,E,$$

vom avea

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_f(\widetilde{E}_k) \cdot m\,\widetilde{E}_k + \omega_f(E^*) \cdot m\,E^* < (A - a) \cdot \sigma + \varepsilon \cdot m\,E.$$

Cum $\varepsilon$ și $\sigma$ sînt arbitrari, în virtutea teoremei 14 avem integrabilitatea funcției $f(x)$ pe $E$.

Vom spune acum că o funcție $f(x)$ este *continuă în sens generalizat* într-un punct $x_0 \in E$, dacă $\varepsilon > 0$ fiind dat, există o mulțime măsurabilă $\widetilde{E} \subset E$ care conține punctul $x_0$ și care are proprietatea că

$$\omega_f(\widetilde{E}) < \varepsilon.$$

Dacă $f(x)$ este continuă în sens generalizat în orice punct $x$ al unei mulțimi $M \subset E$, vom spune că $f(x)$ este continuă în sens generalizat pe mulțimea $M$. Este evident că o funcție continuă în raport cu o funcție măsurabilă oarecare într-un punct $x_0$ este continuă și în sens generalizat în acest punct.

Dacă $f(x)$ nu este continuă în sens generalizat în punctul $x_0 \in E$, vom spune că $f(x)$ este *discontinuă în sens generalizat* în $x_0$. Dacă $f(x)$ este discontinuă în sens generalizat în punctul $x_0$, există un $\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice mulțime măsurabilă $\widetilde{E} \subset E$ care conține punctul $x_0$ să avem

$$\omega_f(\widetilde{E}) \geqslant \varepsilon.$$

Cu aceste definiții putem demonstra

TEOREMA 16. *Dacă mulțimea $E$ este măsurabilă și mărginită, o condiție necesară și suficientă ca o funcție $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca pentru orice $\sigma > 0$ să existe o familie cel mult numerabilă de mulțimi măsurabile $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ale lui $E$, care să acopere mulțimea punctelor lui $E$ în care $f(x)$ este discontinuă în sens generalizat și astfel ca*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m E_n < \sigma.$$

*Necesitatea.* Notînd cu $D$ mulțimea punctelor lui $E$ în care $f(x)$ este discontinuă în sens generalizat, cum

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{\varepsilon}{2^n}}, \text{ unde } E_\alpha = \{x \mid x \in E,\ \omega_f(x) \geqslant \alpha > 0\}$$

iar oricare ar fi $\sigma > 0$, în baza teoremei 15 a, mulțimile $E_\alpha \left(\alpha = \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots\right)$ acoperindu-se cu o familie finită de mulțimi măsurabile $E_\alpha^1, E_\alpha^2, \ldots, E_\alpha^{p_\alpha}$, disjuncte două cîte două astfel ca

$$\sum_{k=1}^{p_\alpha} m E_\alpha^k < \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \alpha,$$

să considerăm mulțimea tuturor mulțimilor $E_\alpha^k$ $\left(\alpha = \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots;\right.$ $\left.k = 1, 2, \ldots, p_\alpha\right)$. Cum aceste mulțimi se pot scrie sub formă de șir, avînd

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p_{\frac{\varepsilon}{2^n}}} E_{\frac{\varepsilon}{2^n}}^k \supset D$$

și

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\frac{p\,\varepsilon}{2^n}} m\, E^k_{\frac{\varepsilon}{2^n}} < \sigma,$$

necesitatea teoremei este demonstrată.

*Suficiența.* Reciproc, presupunînd că pentru orice $\sigma > 0$ se poate determina o familie cel mult numerabilă de mulțimi măsurabile $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_n, \ldots$ astfel ca

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D \quad \text{iar} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m\, E_n < \sigma,$$

cum $E_\varepsilon \subset D$, familia de mulțimi $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ va acoperi cu atît mai mult mulțimea $E_\varepsilon$.

Or, mulțimea $E_\varepsilon$ este închisă. În adevăr, dacă $x_0$ este un punct de acumulare al mulțimii $E_\varepsilon$, oricare ar fi intervalul $I_{x_0}$ centrat în $x_0$, acest interval conține un punct $x \in E_\varepsilon$. Cum însă $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ avem cu atît mai mult $\omega_f(I_{x_0} \cap E) \geqslant \varepsilon$ astfel că și $\omega_f(x_0) \geqslant \varepsilon$, adică punctul $x_0$ este și un punct al lui $E_\varepsilon$. Deci $E_\varepsilon$ este o mulțime închisă.

Cum $E_\varepsilon \subset E$, mulțimea $E_\varepsilon$ este și mărginită.

În baza teoremei lui Borel ([1], vol. I, p. 220) mulțimea $E_\varepsilon$ fiind mărginită și închisă, din șirul de mulțimi $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ se poate extrage un număr finit de mulțimi care de asemenea să acopere mulțimea $E_\varepsilon$. Dacă $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots E_{n_p}$ sînt mulțimile extrase, avem

$$\bigcup_{k=1}^{p} E_{n_k} \supset E_\varepsilon$$

și cu atît mai mult

$$\sum_{k=1}^{p} m\, E_{n_k} < \sigma.$$

Considerînd mulțimile

$$E_{ij} = E_{n_i} \cap E_{n_j} \qquad (i \neq j),$$

aceste mulțimi $E_{ij}$ sînt măsurabile și disjuncte două cîte două. Mulțimile $E_{ij}$ acoperind de asemenea mulțimea $E_\varepsilon$ și fiind de măsură totală inferioară lui $\sigma$, conform teoremei 15 b, rezultă că $f(x)$ este integrabilă pe $E$.

Teorema este deci complet demonstrată.

*Observație.* În teorema precedentă mulțimile $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ce corespund numărului $\sigma > 0$ se pot presupune disjuncte două cîte două fără ca integrabilitatea funcției $f(x)$ pe $E$ să fie afectată cu ceva.

În adevăr, dacă $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sînt mulțimile ce corespund lui $\sigma > 0$ prin teorema precedentă, astfel ca

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m\, E_n < \sigma,$$

considerînd mulţimile evident măsurabile şi disjuncte două cîte două

$$E_{np} = E_n \cap E_p \qquad (n \neq p),$$

cum

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} E_{np} \supset D$$

şi cu atît mai mult

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} m\, E_{np} < \sigma,$$

afirmaţia noastră este demonstrată.

LEMA 6. *O condiţie necesară şi suficientă ca o mulţime* $M \subset E$ *să fie de măsură Lebesgue nulă este ca oricărui* $\sigma > 0$ *să-i corespundă o familie cel mult numerabilă de mulţimi măsurabile* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *ale lui* $E$ *care să acopere mulţimea* $M$ :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset M$$

*şi astfel ca*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, E_n < \sigma.$$

Dacă mulţimea $M$ este de măsură Lebesgue nulă, $\sigma > 0$ fiind dat există o familie cel mult numerabilă de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ care acoperă mulţimea $M$ :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset M$$

şi astfel ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, I_n \,| < \sigma.$$

Considerînd mulţimile evident măsurabile

$$E_n = I_n \cap E \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

aceste mulţimi de asemenea acoperă mulţimea $M$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset M$$

şi cum $E_n \subset I_n$ avînd $m\, E_n < |\, I_n \,|$ rezultă cu atît mai mult

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\, E_n < \sigma.$$

Reciproc, să presupunem că mulțimea $M$ are proprietatea că oricărui $\sigma > 0$ îi corespunde o familie cel mult numerabilă de mulțimi măsurabile $E_n \subset E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ pentru care

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset M \quad \text{iar} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m E_n < \frac{\sigma}{2}.$$

Cum mulțimile $E_n$ sînt măsurabile, există un șir de mulțimi deschise $G_n \supset E_n$ astfel încît

$$m E_n < m G_n < m E_n + \frac{\sigma}{2^n}.$$

Vizibil, mulțimile $G_n$ acoperă cu atît mai mult mulțimea $M$ iar cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} m E_n < \sum_{n=1}^{\infty} m G_n < \sum_{n=1}^{\infty} m E_n + \frac{\sigma}{2}$$

vom avea

$$\sum_{n=1}^{\infty} m G_n < \sigma.$$

Or, se știe că o mulțime deschisă este reuniunea unei mulțimi cel mult numerabile de intervale componente. Deci, putem scrie

$$G_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} I_n^p.$$

Familia intervalelor $I_n^p$ $(n = 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \ldots)$ constituie de asemenea o acoperire a mulțimii $M$ iar cum

$$\sum_{p=1}^{\infty} |I_n^p| = m G_n,$$

avînd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |I_n^p| < \sigma.$$

rezultă că mulțimea $M$ este de măsură Lebesgue nulă. Lema este deci demonstrată.

În virtutea acestei leme teorema precedentă capătă forma :

TEOREMA 16′. *Dacă $E$ este măsurabilă și mărginită, o condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca mulțimea punctelor de discontinuitate în sens generalizat ale funcției $f(x)$ să fie de măsură Lebesgue nulă.*

sau ceea ce este același lucru :

TEOREMA 16″. *Dacă $E$ este măsurabilă și mărginită, o condiție necesară și suficientă ca $f(x)$ să fie integrabilă pe $E$ este ca $f(x)$ să fie continuă în sens generalizat aproape peste tot pe $E$.*

Cum o funcţie $f(x)$ continuă în raport cu o funcţie $g(x)$ pe o mulţime $M$ este continuă şi în sens generalizat pe $M$, conform teoremei 8 şi pe baza ultimelor trei teoreme se regăseşte faptul cunoscut prin care $g$-integrabilitatea funcţiei $f(x)$ implică integrabilitatea acestei funcţii $f(x)$ în sensul definiţiei 2.

## § 6. ALTE CONSIDERAŢII

În paragraful precedent am văzut că considerarea în definiţia integrabilităţii unei funcţii $f(x)$ pe o mulţime măsurabilă $E$ a mulţimii $\mathfrak{M}$ a tuturor funcţiilor $g : E \to (b, B)$ măsurabile şi a tuturor diviziunilor $\Delta$ ale intervalului $(b, B)$, revine conform teoremei 14 la considerarea tuturor descompunerilor finite ale mulţimii $E$ în mulţimi măsurabile disjuncte două cîte două :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad (E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k).$$

Este natural deci a căuta să definim integrala unei funcţii $f(x)$ pe o mulţime $E$, pornind de data aceasta de la astfel de descompuneri finite ale mulţimii $E$.

Să considerăm atunci o descompunere finită a lui $E$

$$\mathcal{D} = (E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_n)$$

şi să asociem acestei descompuneri $\mathcal{D}$ sumele

$$s_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(E_i) \cdot m\, E_i,$$

$$S_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(E_i) \cdot m\, E_i.$$

Să notăm cu $\mathcal{D}'$ o altă descompunere finită a mulţimii $E$. Dacă mulţimile $E_j'$ ale lui $\mathcal{D}'$ se pot obţine din mulţimile $E_i$ ale lui $\mathcal{D}$ prin efectuarea asupra acestora din urmă a unor noi descompuneri finite, vom spune că descompunerea $\mathcal{D}'$ este mai fină decît descompunerea $\mathcal{D}$.

LEMA 7. *Dacă $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ sînt două descompuneri finite ale lui $E$ iar $\mathcal{D}'$ este mai fină decît $\mathcal{D}$, atunci*

$$s_{\mathcal{D}}(f) \leqslant s_{\mathcal{D}'}(f), \qquad S_{\mathcal{D}'}(f) \leqslant S_{\mathcal{D}}(f).$$

Să presupunem că $\mathcal{D}'$ s-a obţinut din $\mathcal{D}$ prin descompunerea mulţimilor $E_i$ ale lui $\mathcal{D}$ într-un număr finit de submulţimi măsurabile conform cu

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{p_i} E_i^k.$$

Cum $E_i^k \subset E_i$ avem

$$\inf f(E_i^k) \geqslant \inf f(E_i), \qquad \sup f(E_i^k) \leqslant \sup f(E_i)$$

iar cum

$$m E_i = \sum_{k=1}^{p_i} m E_i^k ,$$

rezultă

$$\sum_{k=1}^{p_i} \inf f(E_i^k) \cdot m E_i^k \geqslant \inf f(E_i) \cdot m E_i ,$$

$$\sum_{k=1}^{p_i} \sup f(E_i^k) \cdot m E_i^k \leqslant \sup f(E_i) \cdot m E_i ,$$

de unde inegalitățile din enunț sînt imediate.

În baza acestei leme urmează că oricare ar fi descompunerile finite $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ ale mulțimii $E$ avem

$$a \cdot m E \leqslant s_{\mathcal{D}_1}(f) \leqslant S_{\mathcal{D}_2}(f) \leqslant A \cdot m E.$$

Considerînd atunci mulțimea tuturor descompunerilor finite $\mathcal{D}$ ale lui $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două putem enunța

LEMA 8. *Avem egalitățile*

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\}, \qquad \overline{\int_E} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\}. \tag{17}$$

În adevăr, fie $g : E \to (b, B)$ o funcție măsurabilă arbitrară iar

$$\Delta = (b = g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_i < \ldots < g_n = B)$$

o diviziune de asemenea arbitrară a intervalului $(b, B)$. Considerînd mulțimile măsurabile $e_i = g^{-1}([g_{i-1}, g_i))$, aceste mulțimi constituie o descompunere finită a mulțimii $E$:

$$\mathcal{D}_\Delta = (e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n).$$

Avînd egalitățile

$$s_\Delta(f, g) = s_{\mathcal{D}_\Delta}(f), \qquad S_\Delta(f, g) = S_{\mathcal{D}_\Delta}(f),$$

și cum considerarea mulțimii tuturor diviziunilor $\Delta$ ale lui $(b, B)$ revine la considerarea tuturor descompunerilor finite $\mathcal{D}_\Delta$ ale lui $E$, în baza definiției $g$-integralelor inferioară și superioară ale lui $f(x)$ putem scrie

$$\underline{\int_E} f\,dg^{-1} = \sup_{\mathcal{D}_\Delta} \{s_{\mathcal{D}_\Delta}(f)\}, \qquad \overline{\int_E} f\,dg^{-1} = \inf_{\mathcal{D}_\Delta} \{S_{\mathcal{D}_\Delta}(f)\}.$$

Însă, mulțimea tuturor descompunerilor $\mathcal{D}_\Delta$ fiind conținută, ca o submulțime, în mulțimea tuturor descompunerilor $\mathcal{D}$ al lui $E$, avem

$$\sup_{\mathcal{D}_\Delta} \{s_{\mathcal{D}_\Delta}(f)\} \leqslant \sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\}, \qquad \inf_{\mathcal{D}_\Delta} \{S_{\mathcal{D}_\Delta}(f)\} \geqslant \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\},$$

astfel că obținem

$$\underline{\int_E} f\,dg^{-1} \leqslant \sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\}, \qquad \overline{\int_E} f\,dg^{-1} \geqslant \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\}.$$

Aceste inegalități fiind valabile oricare ar fi funcția $g(x)$ măsurabilă vom avea și

$$\sup_{g \in \mathfrak{M}} \underline{\int_E} f\,dg^{-1} \leqslant \sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\}, \qquad \inf_{g \in \mathfrak{M}} \overline{\int_E} f\,dg^{-1} \geqslant \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\},$$

ceea ce conform cu (11) se scrie

$$\dot{\int_E} f(x)\,dx \leqslant \sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\}, \qquad \dot{\int_E} f(x)\,dx \geqslant \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\}. \qquad (17')$$

Să demonstrăm acum inegalitățile inverse.

Fie în acest sens

$$\mathcal{D} = (E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_n)$$

o descompunere finită arbitrară a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două. Analog ca la teorema 14, construind o funcție $g(x)$ care să fie constantă pe fiecare mulțime $E_i$ :

$$g(x) = c_i \quad \text{pentru} \quad x \in E_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

oricare ar fi diviziunea $\Delta$ ce conține punctele $c_i$ printre punctele ei de diviziune, avem

$$s_{\mathcal{D}}(f) = s_\Delta(f, g), \qquad S_{\mathcal{D}}(f) = S_\Delta(f, g),$$

de unde

$$s_{\mathcal{D}}(f) = \underline{\int_E} f\,dg^{-1}, \qquad S_{\mathcal{D}}(f) = \overline{\int_E} f\,dg^{-1}$$

iar de aici

$$s_{\mathcal{D}}(f) \leqslant \sup_{g \in \mathfrak{M}} \underline{\int_E} f\,dg^{-1}, \qquad S_{\mathcal{D}}(f) \geqslant \inf_{g \in \mathfrak{M}} \overline{\int_E} f\,dg^{-1}.$$

Conform cu definițiile (11), aceste ultime inegalități se transcriu

$$s_{\mathcal{D}}(f) \leqslant \int_E f(x)\,dx, \qquad S_{\mathcal{D}}(f) \geqslant \int_E f(x)\,dx.$$

Cum însă acum descompunerea finită $\mathcal{D}$ este arbitrară, rezultă și

$$\sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\} \leqslant \int_E f(x)\,dx, \qquad \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\} \geqslant \int_E f(x)\,dx. \quad (17'')$$

În fine, egalitatea (17) din enunț rezultă din compararea inegalităților (17') și (17'').

Egalitățile (17) ale lemei 8 pot fi privite ca noi relații de definiție, echivalente cu relațiile (11), ale integralelor inferioară și superioară ale funcției $f(x)$ pe mulțimea $E$. În baza acestui fapt și conform definiției 2, vom avea integrabilitatea funcției $f(x)$ pe mulțimea $E$, dacă

$$\sup_{\mathcal{D}} \{s_{\mathcal{D}}(f)\} = \inf_{\mathcal{D}} \{S_{\mathcal{D}}(f)\}. \quad (18)$$

și numai în acest caz.

Pe baza acestor considerații, teorema 14 de la paragraful precedent apare ca o simplă consecință a egalității (18). În acest sens ea capătă următorul enunț:

TEOREMA 14'. *O condiție necesară și suficientă ca o funcție $f(x)$ să fie integrabilă pe o mulțime $E$ este ca oricărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă o descompunere finită $\mathcal{D}$ a mulțimii $E$ în mulțimi măsurabile disjuncte două cîte două, astfel ca*

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) < \varepsilon.$$

În paragraful precedent, pe baza teoremei 14, s-au dat o serie de teoreme care rezolvă complet problema integrabilității unei funcții $f(x)$ în sensul definiției 2. Relațiile (11) și (17) indică apoi două moduri diferite, dar echivalente, de calcul al integralei unei funcții $f(x)$ pe o mulțime $E$ în sensul acestei definiții 2.

În studiul nostru nu a fost însă de loc tranșată problema dacă generalizarea dată de noi integralelor Riemann și Lebesgue este o generalizare efectivă sau nu. Astfel, nu s-a dat nici un exemplu de funcție nemăsurabilă Lebesgue (deci neintegrabilă în sensul lui Lebesgue), dar care să fie integrabilă în sensul definiției 1. De asemenea, ceea ce este și mai greu, nu s-a dat nici un exemplu de funcție nemăsurabilă Lebesgue, integrabilă în sensul definiției 2, dar neintegrabilă în sensul definiției 1.

Problema dacă generalizările date de noi integralelor Riemann și Lebesgue sînt efective sau nu, este una din problemele mari pe care studiul nostru le lasă deschise. În diverse părți ale studiului nostru se pot găsi însă și alte probleme rămase de asemenea încă nerezolvate.

Dar chiar dacă integralele studiate de noi se vor dovedi echivalente cu integrala Lebesgue, ceea ce la prima vedere pare imposibil, studiul pe care l-am întreprins nu este zadarnic. Posibilitatea de a ajunge la integrala Lebesgue pornind de la cu totul alt punct de vedere decît cel obişnuit relevă bogăţia de aspecte pe care o prezintă această noţiune a cărei importanţă domină teoria funcţiilor reale.

Primită la redacţie la 8 octombrie 1961

## ДВА ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА И ЛЕБЕГА. II

### РЕЗЮМЕ

Даются два последовательных обобщения интегралов Римана и Лебега. Первое обобщение, это $g$-интеграл функции $f$ на множестве $E$ (определение 1) использует разбиения $\Delta$ на оси значений измеримой функции $g$. Если $g(x)\equiv x$, получается случай интеграла Римана, а если $g(x)\equiv f(x)$, получается случай интеграла Лебега. В §§ 1, 2, 3 изучаются некоторые свойства этого $g$-интеграла и задача о $g$-интегрируемости функции $f$ на множестве $E$ (теоремы 6, 7, 7′).

Второе обобщение — интеграл функции $f$ на множестве $E$ (определение 2) — получается на основании предложения 3, если рассматривать множество $\mathfrak{M}$ всех измеримых на $E$ функций $g(x)$. После изучения свойств этого интеграла и вопроса об интегрируемости функции $f$ на $E$ (теоремы 15 *а*, 15 *б*, 16, 16′, 16″), на основании теоремы 14, получается в § 6 новое определение, эквивалентное определению 2.

Не установлено, эффективны или нет эти обобщения. Этот вопрос решался бы положительно, если бы можно было найти неизмеримую по Лебегу функцию, неинтегрируемую в смысле определения 1, и неизмеримую по Лебегу функцию, неинтегрируемую в смысле определения 1, но интегрируемую в смысле определения 2.

Для нужд изучаемых задач определяются понятия о непрерывности относительно функции, мере относительно функции, непрерывность в обобщенном смысле и т.д.

## DEUX EXTENSIONS DES INTÉGRALES DE RIEMANN ET DE LEBESGUE. II

### RÉSUMÉ

L'auteur présente deux extensions successives des intégrales de Riemann et de Lebesgue, extensions permettant d'étudier la notion d'intégrale en partant d'un nouveau point de vue.

La première extension, ce que l'on appelle la $g$-intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (définition 1), suppose que les divisions $\Delta$ sont prises sur l'axe des valeurs de la fonction mesurable $g(x)$. Si l'on prend $g(x) \equiv x$ on obtient le cas de l'intégrale de Riemann ; mais si l'on prend $g(x) \equiv f(x)$ on arrive au cas de l'intégrale de Lebesgue. Les paragraphes 1, 2 et 3 concernent des propriétés de cette $g$-intégrale ainsi que la question de la $g$-intégrabilité d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (théorèmes 6, 7 et 7′).

La seconde extension, appelée comme d'habitude l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (définition 2), s'obtient en vertu de la proposition 3 et en prenant en considération l'ensemble $\mathfrak{M}$ de toutes les fonctions $g(x)$ mesurables sur $E$. Après avoir étudié les propriétés de cette nouvelle intégrale et traité la question de l'intégrabilité d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble $E$ (théorèmes 15 a, 15 b, 16, 16′ et 16″), l'auteur, se fondant sur le théorème 14, donne une nouvelle définition de cette intégrale (paragraphe 6), équivalente de la définition 2.

Son travail est déficitaire lorsqu'il s'agit de savoir si les généralisations appliquées aux intégrales de Riemann et de Lebesgue sont effectives ou non. Cette question pourrait être résolue par l'affirmative si l'on trouvait un exemple de fonction non mesurable de Lebesgue — c'est-à-dire non intégrable selon la méthode de Lebesgue mais intégrable au sens de la définition 1 — et un exemple de fonction de Lebesgue non-mesurable, non intégrable au sens de la définition 1, mais intégrable au sens de la définition 2.

Le long de son travail, l'auteur reprend une série de notions classiques qu'il transpose selon les nécessités imposées par les problèmes qu'il étudie, comme par exemple les notions de continuité par rapport à une fonction, la mesure par rapport à une fonction, la continuité dans un sens généralisé, etc.

BIBLIOGRAFIE

1. M. NICOLESCU, *Analiză matematică*, I, II, III. Edit. tehnică, Bucureşti, 1957, 1958, 1960.
2. I. P. NATANSON, *Teoria funcţiilor de variabilă reală*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. ION I. CRISTEA, *Un tip de integrală înrudită cu integrala Stieltjes*. Com. Acad. R.P.R., **XI**, *4*, 339–407 (1961).
4. — *Două extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue*. I. St. cerc. mat., **XIII**, *1*, 75–96 (1962).

# ASUPRA SPAȚIILOR CU CONEXIUNE CONSTANTĂ DE GEN DOI

DE

V. G. GORCIU

Utilizînd o teoremă a lui Eisenhart [4] V. Vagner a arătat [1] că o condiție necesară și suficientă pentru ca un spațiu riemannian $V_n$, cu formă metrică pozitiv definită, să fie cu conexiune afină constantă (să aibă simboli ai lui Christoffel de a doua speță constanți), este ca $V_n$ să fie produsul topologic al unui anumit număr $r$ ($r = 1, 2, \ldots$) de spații riemanniene, astfel încît tensorul metric al fiecărui factor să aibă componente de forma $e^{a_k x^k}$ unde $a_k$ și $c_{ij}$ sînt constante.

Acad. prof. G. Vrănceanu, într-o lucrare recentă [2], a arătat că un spațiu $V_3$ cu conexiune afină constantă, care nu este local euclidian și a cărui formă metrică nu este pozitiv definită, este cel mult de gen doi, că deci componentele $a_{ij}$ ale tensorului fundamental sînt de forma

$$a_{ij} = t\, c_{ij} + s\, d_{ij} \tag{1}$$

unde $t$ și $s$ sînt funcții de coordonatele $x$, $y$ și $z$ astfel încît raportul lor nu este o constantă, iar $c_{ij}$ și $d_{ij}$ sînt constante.

Pentru determinarea acestor spații, prof. Vrănceanu întrebuințează anumite reduceri la forma canonică a tensorului de curbură.

În nota de față, vrem să găsim spațiile $V_3$ cu conexiune constantă, de gen doi, pe o cale directă, plecînd de la formulele (1) și utilizînd ecuațiile lui Lagrange.

Pentru simplificare punem :

$$t = e^{2p},\ s = e^{2q}.$$

Presupunem deci că diferența $p - q$ nu este o constantă. Rezultă că tensorul metric este de forma :

$$e^{2p}\varphi\,(dx,\ dy,\ dz) + e^{2q}\,\psi\,(dx,\ dy,\ dz),$$

unde $\varphi$ și $\psi$ sînt două forme pătratice. Cînd $\varphi$ nu este definită putem scrie :

$$\varphi = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2.$$

În cazul acesta prof. Vrănceanu a arătat [3] că putem izola una din variabile. Dacă această variabilă este $y$, putem deci scrie :

$$\psi = A\,(dx)^2 + \rho\,(dy)^2 + B\,dx\,dz + C\,(dz)^2.$$

Schimbînd variabilele $p$ și $q$ putem presupune $\rho = 0$. De asemenea, luînd în loc de $x$, $z$ variabilele $x - z$ și $x + z$ putem scrie :

$$\varphi = 2\,dx\,dz + (dy)^2,\quad \psi = a\,(dx)^2 + 2b\,dx\,dz + c\,(dz)^2$$

și deci metrica se scrie :

$$ds^2 = e^{2p}\,[2\,dx\,dz + (dy)^2] + e^{2q}\,[a(dx)^2 + 2b\,dx\,dz + c\,(dz)^2]. \tag{2}$$

Energia cinetică corespunzătoare metricii (2) este :

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\,e^{2p}\,[2\,\dot{x}\dot{z} + \dot{y}^2] + \frac{1}{2}\,e^{2q}\,[a\dot{x}^2 + 2b\,\dot{x}\dot{z} + c\dot{z}^2],$$

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \dot{z} = \frac{dz}{dt}\right). \tag{3}$$

Ecuațiile lui Lagrange corespunzătoare sînt :

$$\ddot{y} = -2\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x}\,\dot{y} - \frac{\partial p}{\partial y}\dot{y}^2 + 2\frac{\partial p}{\partial y}\dot{x}\dot{z} - 2\frac{\partial p}{\partial z}\dot{y}\dot{z} + \tag{4}$$

$$+ e^{2(q-p)}\frac{\partial q}{\partial y}(a\dot{x}^2 + 2\,b\,\dot{x}\dot{z} + c\dot{z}^2),$$

$$\ddot{z} + e^{2(q-p)}\left(a\ddot{x} + a\frac{\partial q}{\partial x}\dot{x}^2 + b\ddot{z} - c\frac{\partial q}{\partial x}\dot{z}^2\right) = \tag{5}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x}\dot{y}^2 - 2\frac{\partial p}{\partial y}\dot{y}\dot{z} - 2\frac{\partial p}{\partial z}\dot{z}^2 - 2e^{2(q-p)}(a\dot{x} + b\dot{z})\left(\frac{\partial q}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z}\dot{z}\right),$$

$$\ddot{x} + e^{2(q-p)}\left(c\,\ddot{z} + c\frac{\partial q}{\partial z}\dot{z}^2 + b\ddot{x} - a\frac{\partial q}{\partial z}\dot{x}^2\right) = \tag{6}$$

$$= 2\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x}^2 + 2\frac{\partial p}{\partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\dot{y}^2 - 2\,e^{2(q-p)}(b\dot{x} + c\dot{z})\left(\frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y}\dot{y}\right).$$

Pentru ca toți coeficienții ecuației (4) să fie constanți este necesar să avem :

$$p\,(x, y, z) = kx + ly + mz + n, \tag{7}$$

$$e^{2(q-p)}\frac{\partial q}{\partial y} = \alpha, \tag{8}$$

unde $k$, $l$, $m$, $n$ și $\alpha$ sînt constante.

Ținînd seamă de (7) și (8), ecuația (4) devine:

$$\ddot{y} = \alpha a\ \dot{x}^2 - 2k\dot{x}\dot{y} - l\dot{y}^2 + 2(l + \alpha b)\dot{x}\dot{z} - 2m\dot{y}\dot{z} + \alpha c\dot{z}^2. \tag{4'}$$

De asemenea, ținînd seamă de (7), ecuațiile (5) și (6) devin:

$$\ddot{z} + e^{2(q-p)}\left(a\ddot{x} + a\frac{\partial q}{\partial x}\dot{x}^2 + b\ddot{z} - c\frac{\partial q}{\partial x}\dot{z}^2\right) = \tag{5'}$$
$$= k\dot{y}^2 - 2l\dot{y}\dot{z} - 2m\dot{z}^2 - 2e^{2(q-p)}(a\dot{x} + b\dot{z})\left(\frac{\partial q}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z}\dot{z}\right),$$

$$\ddot{x} + e^{2(q-p)}\left(c\ddot{z} + c\frac{\partial q}{\partial z}\dot{z}^2 + b\ddot{x} - a\frac{\partial q}{\partial z}\dot{x}^2\right) + 2k\dot{x}^2 + \tag{6'}$$
$$+ 2l\dot{x}\dot{y} - m\dot{y}^2 + e^{2(q-p)}(b\dot{x} + c\dot{z})\left(\frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y}\dot{y}\right) = 0.$$

Pentru ca ecuația (5') să aibă coeficienți constanți, este necesar să fie satisfăcută următoarea condiție:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \gamma, \tag{9}$$

unde $\gamma$ este o constantă.

Avem două cazuri:

*Cazul I*: $\gamma \neq 0$

În acest caz, pentru ca ecuația (5') să aibă coeficienți constanți, trebuie să fie satisfăcute și relațiile:

$$e^{2(q-p)}\frac{\partial q}{\partial z} = \beta,\ \beta \text{ constantă}, \tag{10}$$

$$\ddot{x} + \frac{\partial q}{\partial x}\dot{x}^2 = 0, \tag{11}$$

$$b\ddot{z} - c\frac{\partial q}{\partial x}\dot{z}^2 = 0. \tag{12}$$

Ecuația (5') devine

$$\ddot{z} = k\dot{y}^2 - 2\dot{z}(l\dot{y} + m\dot{z}) - 2\alpha(a\dot{x} + b\dot{z})\dot{y} - 2\beta(a\dot{x} + b\dot{z}). \tag{5''}$$

Trecînd la ecuația (6'), dacă considerăm ultimii ei termeni observăm că trebuie să avem $b = c = 0$, dacă vrem ca și această ecuație să fie cu coeficienți constanți.

Într-adevăr, nu putem lua, de exemplu, $e^{2(q-p)}\frac{\partial q}{\partial x} = \text{const.}$ fiindcă, ținînd seamă de (10) și (10'), ar rezulta $q - p = \text{const.}$

Ecuația (6') devine:

$$\ddot{x} - a\beta\dot{x}^2 + 2k\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{y} - m\dot{y}^2 = 0. \tag{6''}$$

Dar din (10) și (11) avem $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2$.
Deci

$$(2k - \gamma - a\beta)\,\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{y} - m\dot{y}^2 = 0. \qquad (6''')$$

Această relație, pătratică în $x$ și $y$, fiind o identitate, rezultă

$$\gamma + a\beta = 2k, \qquad (13)$$

$$l = m = 0. \qquad (14)$$

Funcția $q(x, y, z)$ satisface relațiile (8), (9) și (10).
Rezultă condițiile de integrabilitate:

$$\alpha(k - \gamma) = 0, \qquad (15)$$

$$\beta(k - \gamma) = 0. \qquad (16)$$

Avem deci următoarele două cazuri:

a) $k \neq \gamma$.

Atunci $\alpha = \beta = 0$ și din (13) urmează

$$\gamma = 2k. \qquad (17)$$

Din (18), (9) și (10) rezultă

$$q = 2kx. \qquad (18)$$

Deci, în acest caz, metrica spațiului $V_3$ este:

$$ds^2 = e^{2kx}[2dx\,dz + (dy)^2] + ae^{4kx}(dx)^2. \qquad (19)$$

b) În cazul acesta se obține metrica unui spațiu local euclidian, așa cum a arătat prof. Vrănceanu [2].

*Cazul II*: $\gamma = 0$. Deci

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \qquad (20)$$

Pentru ca ecuația (5′) să aibă coeficienții constanți este necesar să avem $a = b = 0$.
În acest caz, ecuația devine:

$$\ddot{z} = k\dot{y}^2 - 2l\dot{y}\dot{z} - 2m\dot{z}^2. \qquad (5''')$$

Trecînd la ecuația (6′) vedem că se impun condițiile:

$$\ddot{z} + \frac{\partial q}{\partial z}\dot{z}^2 = 0, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \lambda, \qquad (22)$$

unde $\lambda$ este o constantă.

Dacă în (5''') înlocuim pe $z$ cu valoarea scoasă din (20), obținem ecuația:

$$(\lambda - 2m)\,\dot{z}^2 + k\dot{y}^2 - 2\,l\dot{y}\dot{z} = 0.$$

Aceasta fiind o identitate, rezultă

$$\lambda = 2\,m,\quad k = l = 0. \tag{23}$$

Funcția $q(x, y, z)$ satisface, de data aceasta, ecuațiile (8), (20) și (22). Rezultă condițiile de integrabilitate:

$$\alpha k = 0, \tag{24}$$

$$\alpha(m - \lambda) = 0. \tag{25}$$

Dacă $m \neq \lambda$ rezultă $\alpha = 0$.

Din (8), (20) și (22) deducem că, în acest caz, metrica spațiului $V_3$ este

$$ds^2 = e^{2mz}[2\,dx\,dz + (dy)^2] + c\,e^{4mz}\,(dz)^2, \tag{26}$$

$c$ fiind o constantă.

Vedem că metrica (19) se transformă în metrica (26) dacă schimbăm între ele variabilele $x$ și $z$.

Deci orice spațiu $V_3$ cu conexiune constantă, de gen doi, are o metrică de forma (26).

Am regăsit astfel rezultatul acad. prof. Vrănceanu [2].

Primită la redacție la 8 februarie 1962

## О ПРОСТРАНСТВАХ С ПОСТОЯННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ РОДА 2

РЕЗЮМЕ

Определяются прямым путем пространства $V_3$ с постоянной связностью рода 2. Это делается, исходя из формул

$$a_{ij} = t\,c_{ij} + s\,d_{ij}$$

и используя уравнения Лагранжа.

## SUR LES ESPACES À CONNEXION CONSTANTE DU GENRE DEUX

RÉSUMÉ

L'auteur détermine directement les espaces $V_3$ à connexion constante du genre deux, en partant des formules

$$a_{ij} = t\;c_{ij} + s\,d_{ij}$$

et en utilisant les équations de Lagrange.

## BIBLIOGRAFIE

1. V. VAGNER, *Riemannian spaces with constant Christoffel symbols.* Abhandlungen d. Univ. Saratov, **i** (**XIV**), (1938).
2. G. VRĂNCEANU, *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă.* St. cerc. mat., **XIII**, *2* (1962).
3. — *Reducerea la forma canonică a două forme pătratice.* St. cerc. mat., **XII** (1961).
4. P. EISENHART, *Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero.* Trans. Amer. Math. Soc., **25** (1923).

# CIRCUITE CU TRANSISTORI CU DOUĂ NIVELE COMANDAȚI PE COLECTOR

DE

PAUL CONSTANTINESCU și VLADIMIR CLEJA

Vom considera transistori PNP și NPN cu comandă pe colector.

În [1] acad. Gr. C. Moisil a considerat montaje cu transistori PNP și NPN comandați pe bază sau emiter, cu un nivel, care realizează funcțiile de lucru :

$$w_{1'} = \top x_i,\ w_{2'} = \bigcup x_i,\ w_{3'} = \bot x_i,\ w_{4'} = \prod x_i,\ w_{5'} = \bigcup x_i$$

respectiv (1)

$$w_{1''} = \bot x_i,\ w_{2''} = \prod x_i,\ w_{3''} = \top x_i,\ w_{4''} = \bigcup x_i,\ w_{5''} = \prod x_i.$$

Fie montajul din figura 1 cu un transistor PNP comandat pe colector ; comanda se dă cu impulsuri negative. Fie $x$ variabila asociată comenzii.

Joncțiunea bază-emiter este polarizată în sens direct prin rezistența $R$, astfel încît transistorul este în stare permanentă de conducție ; rezistența $R$ și nivelele de tensiune ale impulsurilor aplicate pe colector sînt astfel alese încît polarizarea în sens direct a joncțiunii bază-colector cînd $x = 1$, nu scoate transistorul din regimul normal de funcționare.

Fie $w'$ variabila asociată ieșirii. Dacă $x = 0$ atunci $w' = 0$, iar dacă $x = 1$ atunci $w' = 1$. Într-adevăr, joncțiunea emiter-bază fiind polarizată direct potențialul emiterului este egal cu potențialul colectorului. Prin urmare, $w' = x$.

Fie montajul cu un nivel, cu transistori PNP comandați pe colector din figura 2. Dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ atunci $w_{6'} = 1$, iar dacă măcar pentru un $i$ $(i = 1,\ldots,n)$ avem $x_i = 0$ atunci $w_{6'} = 0$. Prin urmare

$$w_{6'} = \prod x_i.$$

Conform cu [2], în cazul circuitelor duale corespunzătoare (fig. 3, 4) realizate cu transistori NPN avem respectiv : $w'' = x$ și $w_{6''} = \bigcup x_i$. Prin urmare

$$w_{6'} = \prod x_i \qquad \text{și} \qquad w_{6''} = \bigcup x_i. \tag{2}$$

Se observă că funcţiile care sînt realizate de montaje cu transistori PNP şi NPN cu un nivel cu comandă pe bază, emiter sau colector, sînt cele din (1) la care se adaugă (2); ca atare, circuitele cu transistori PNP

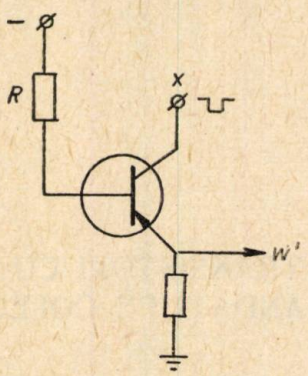



Fig. 1

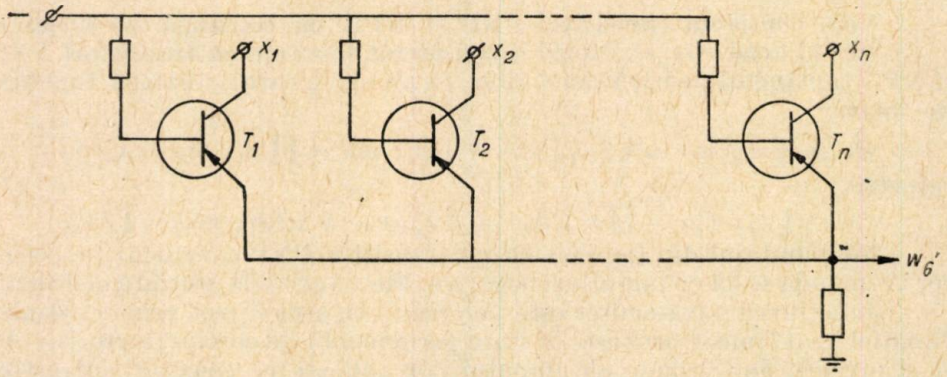



Fig. 2

cu un nivel realizează de două ori funcţiile $\Pi$ şi $\bigcup$ şi cîte o singură dată funcţiile lui Sheffer, iar circuitele duale la fel.

★

În [1] se consideră montaje cu transistori PNP şi NPN comandaţi pe bază sau emiter cu 2 nivele de tipul $p'q'$ şi $p''\ q''$ unde $p, q = 1, \ldots, 5$.

Vom considera, în cele ce urmează, montaje cu transistori PNP şi NPN comandaţi pe bază, emiter sau colector de tipul $p'\ 6'$ şi $6'\ q'$, respectiv $p''\ 6''$ şi $6''\ q''$.

Fie montajul din figura 5 de tipul $1'\ 6'$ (cu transistori PNP). Potenţialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de formula (2):

$$y_i = x_{i1}\, x_{i2} \ldots x_{im_i} = \prod_j x_{ij}$$

iar în $w$ este dat de formula (1′) din [1]:

$$w = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n = \bigsqcap_i y_i.$$

Deci,

$$w = \bigsqcap_i \bigsqcup_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 6 de tipul *2′ 6′*.

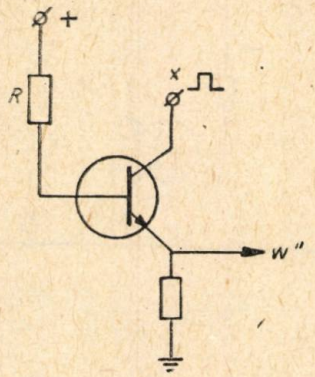



Fig. 3

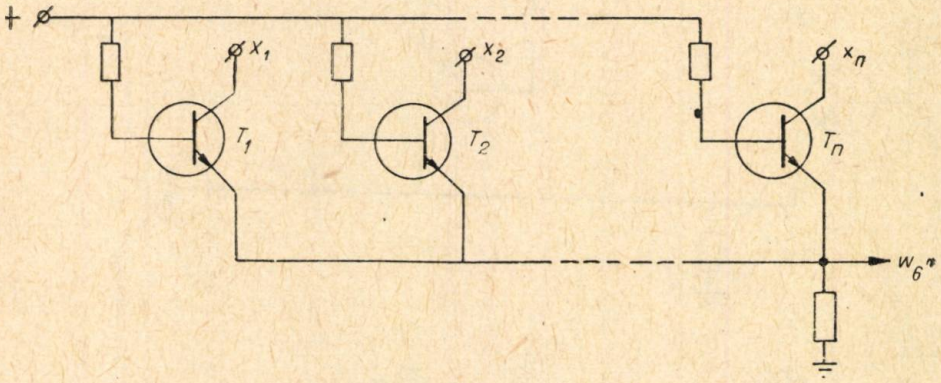



Fig. 4

Potențialele în $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt date de formula (2):

$$y_i = \bigsqcup_j x_{ij},$$

iar în $w$ este dat de formula (2′) din [1]:

$$w = \bigcup_i y_i.$$

Tip 1'6' $w = \sum_i \prod_j x_{ij}$

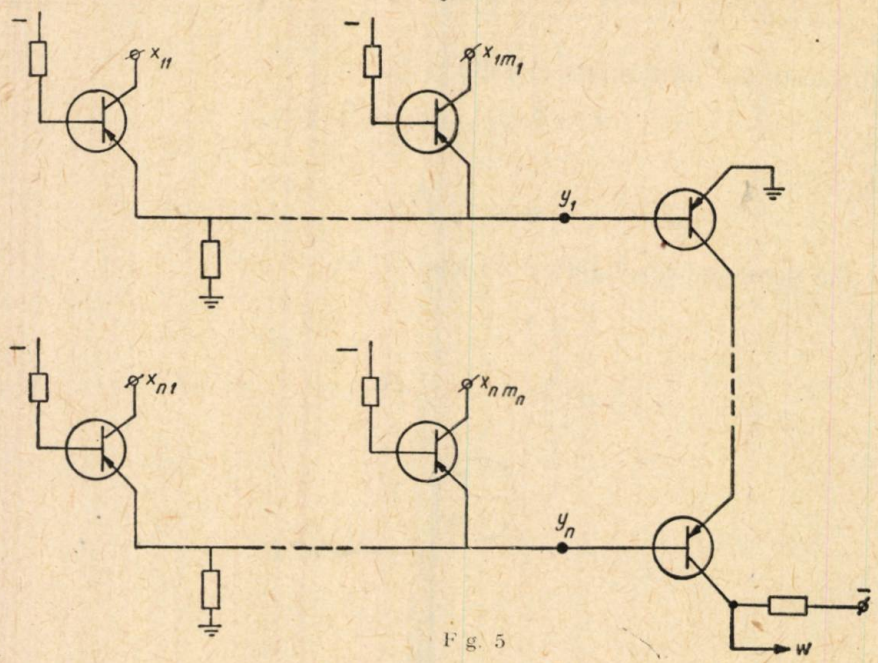



Fig. 5

Tip 2'6' $w = \prod_i \sum_j x_{ij}$

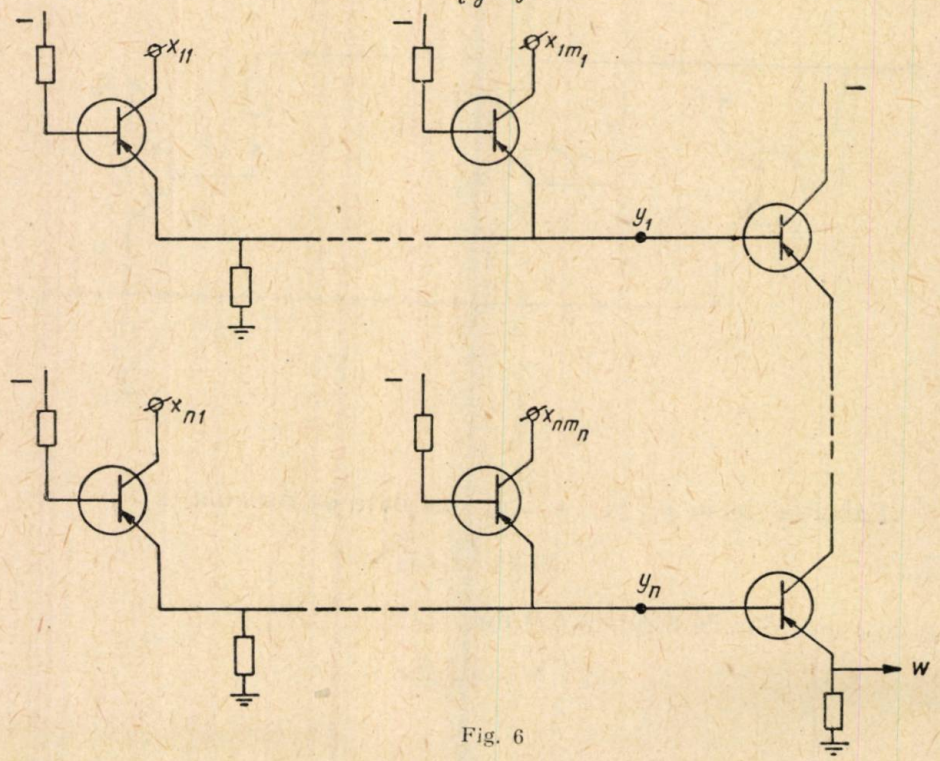



Fig. 6

Tip 3'6' $w = \sum_i \prod_j x_{ij}$

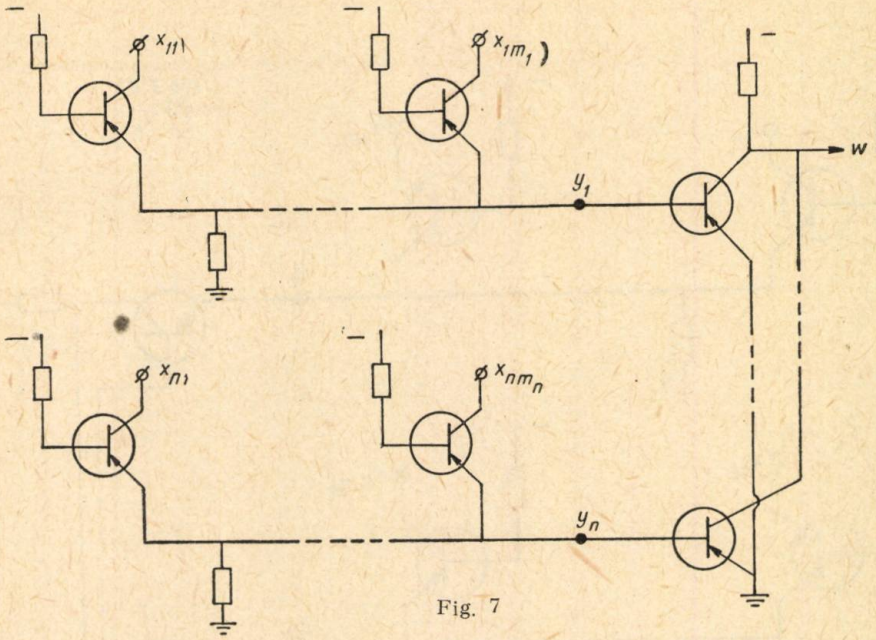



Fig. 7

Tip 4'6' $w = \prod_i \sum_j x_{ij}$

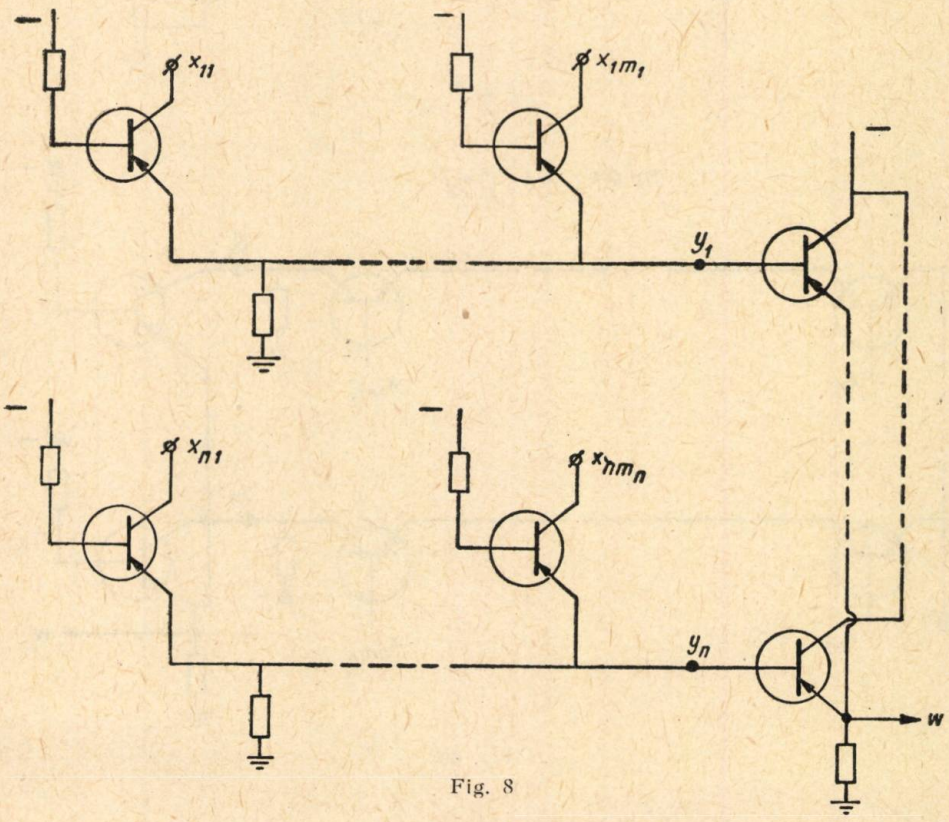



Fig. 8

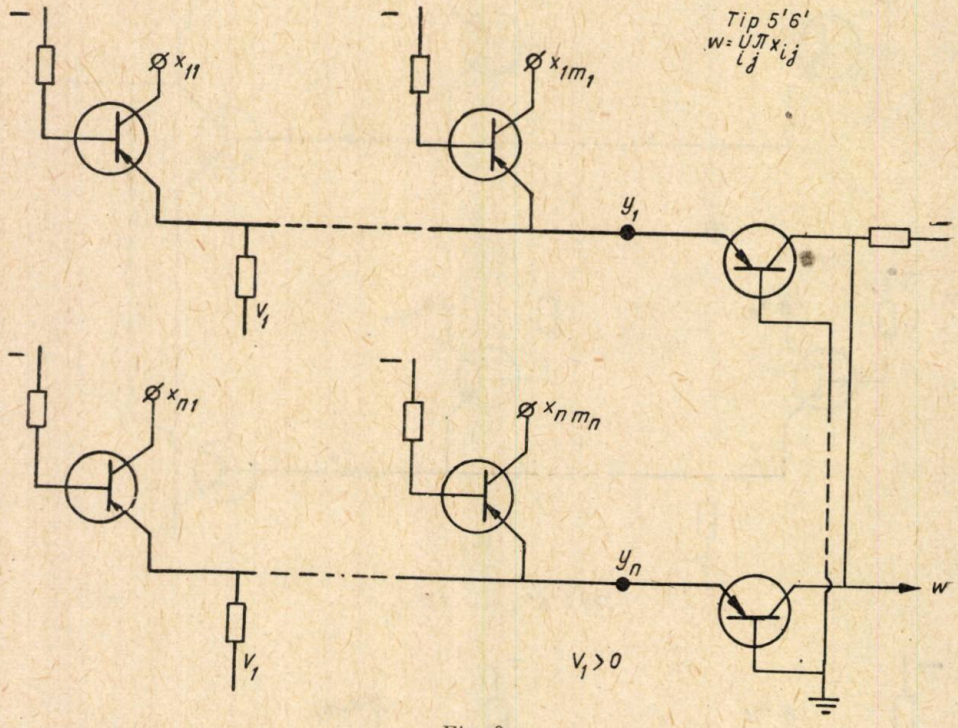

Tip 5'6'
$w = \bigcup_i \prod_j x_{ij}$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_1$
$V_1$
$x_{n1}$
$x_{nm_n}$
$y_n$
$w$
$V_1 > 0$

Fig. 9

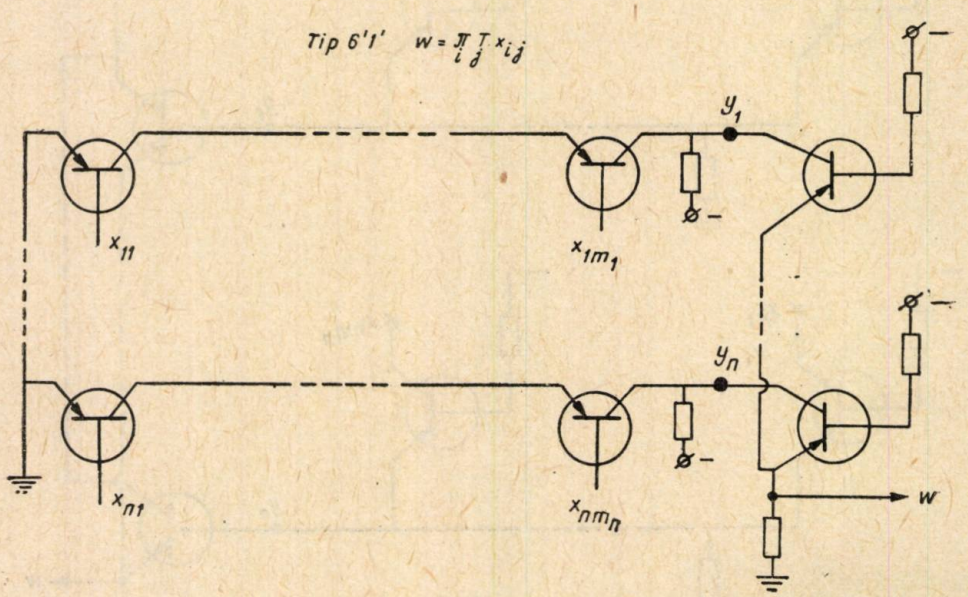

Tip 6'1'
$w = \prod_i \bigcup_j x_{ij}$
$y_1$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_n$
$x_{n1}$
$x_{nm_n}$
$w$

Fig. 10

Deci,

$$w = \bigcup_i \prod_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 7 de tipul *3′ 6′*.
Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de formula (2):

$$y_i = \prod_j x_{ij},$$

iar în $w$ este dat de formula (3′) din [1]:

$$w = \bigsqcup_i y_i.$$

Deci,

$$w = \bigsqcup_i \prod_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 8 de tipul *4′ 6′*.
Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de formula (2):

$$y_i = \prod_j x_{ij},$$

iar în $w$ este dat de formula (4′):

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \prod_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 9 de tipul *5′ 6′*.
Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de formula (2):

$$y_i = \prod_j x_{ij},$$

iar în $w$ este dat de formula (5′):

$$w = \bigcup_i y_i.$$

Deci,

$$w = \bigcup_i \prod_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 10 de tipul *6′ 1′*.
Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \bigsqcap_j x_{ij},$$

iar în $w$, potențialul este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

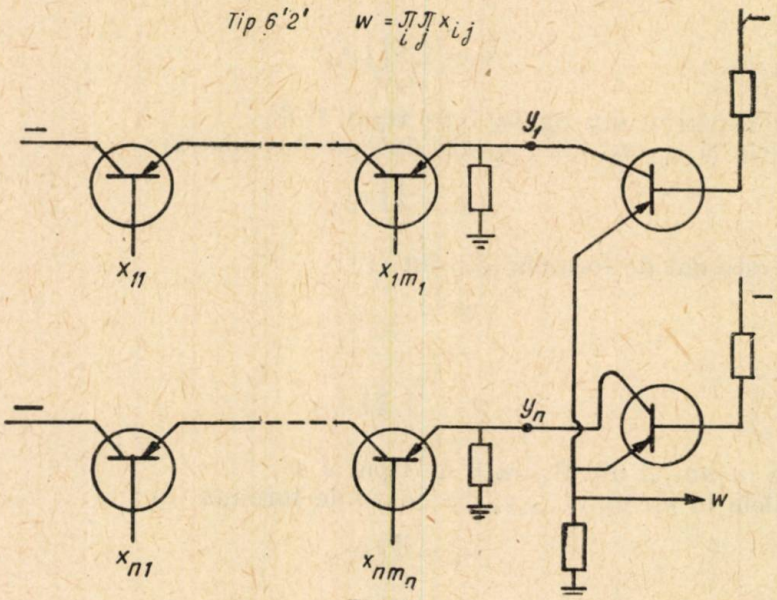

Tip 6'2' $w = \prod_i \prod_j x_{ij}$
$y_1$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_n$
$x_{n1}$
$x_{nm_n}$
w

Fig. 11

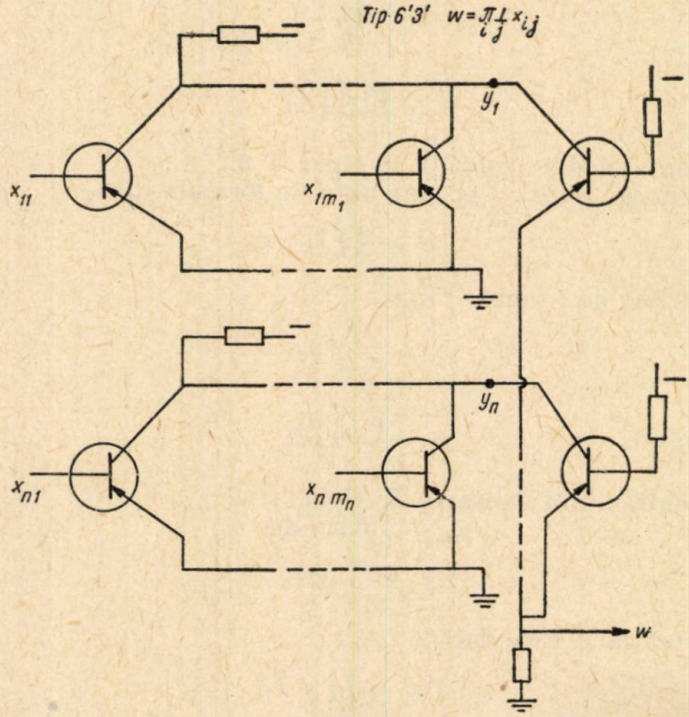

Tip 6'3' $w = \prod_i \coprod_j x_{ij}$
$y_1$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_n$
$x_{n1}$
$x_{nm_n}$
w

Fig. 12

Deci,

$$w = \prod_i \top_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 11 de tipul *6'2'*. Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \bigcup_j x_{ij},$$

iar potențialul în $w$ este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \bigcup_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 12 de tipul *6'3'*. Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \bot_j x_{ij},$$

iar potențialul în $w$ este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \bot_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 13 de tipul *6'4'*. Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \prod_j x_{ij},$$

iar potențialul în $w$ este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \prod_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 14 de tipul *6'5'*. Potențialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \bigcup_j x_{ij},$$

iar potențialul în $w$ este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \bigcup_j x_{ij}.$$

Fie montajul din figura 15 de tipul $6'6'$.
Potenţialele în $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt date de

$$y_i = \prod_j x_{ij},$$

Tip 6'4' $w = \prod_i \prod_j x_{ij}$

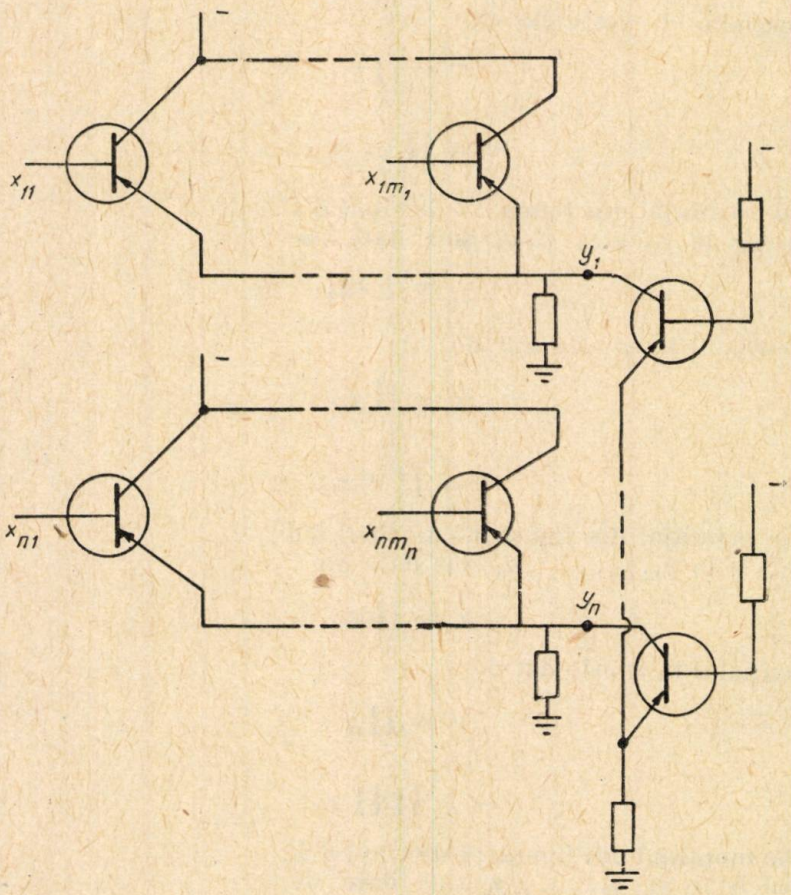



Fig. 13

iar potenţialul în $w$ este dat de

$$w = \prod_i y_i.$$

Deci,

$$w = \prod_i \prod_j x_{ij}.$$

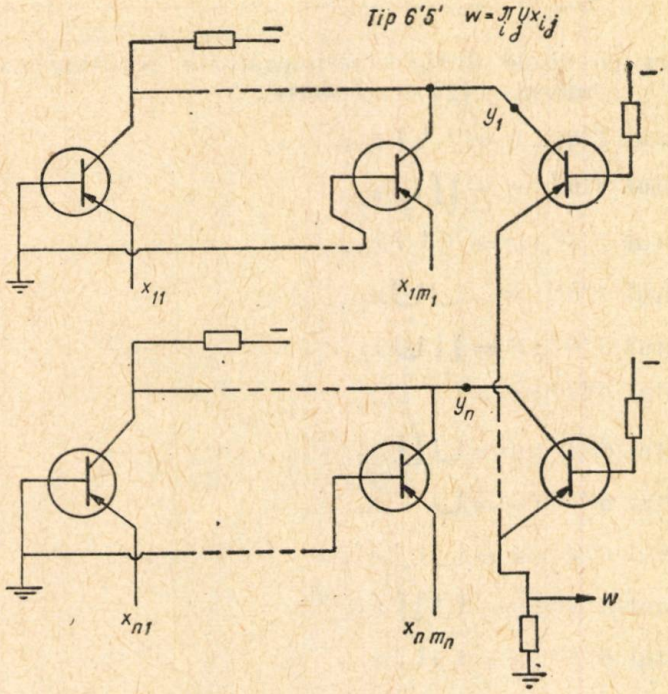

Tip 6'5' $w = \prod_i \prod_j x_{ij}$
$y_1$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_n$
$x_{n1}$
$x_{n m_n}$
w

Fig. 14

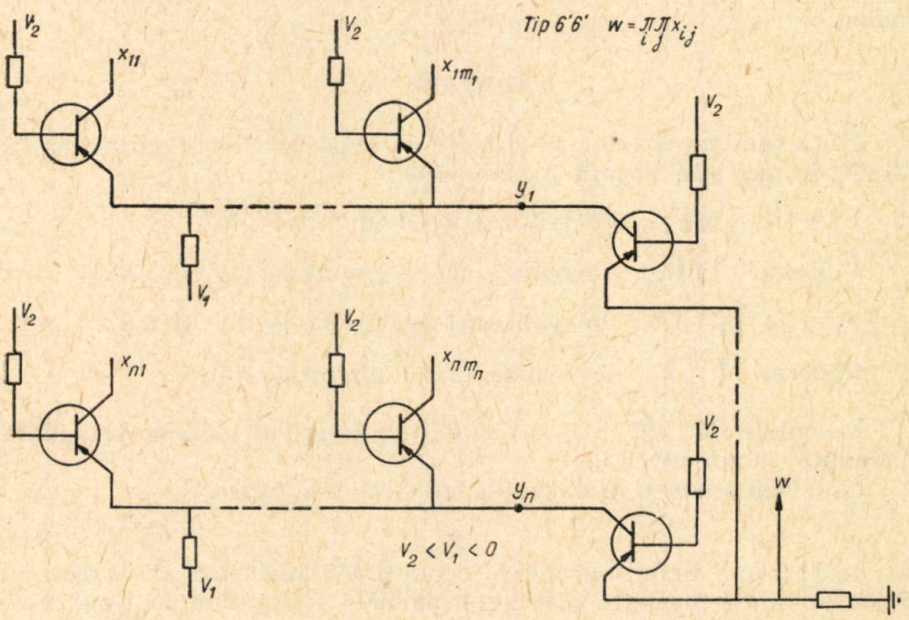

Tip 6'6' $w = \prod_i \prod_j x_{ij}$
$V_2$
$x_{11}$
$x_{1m_1}$
$y_1$
$V_1$
$x_{n1}$
$x_{n m_n}$
$y_n$
w
$V_2 < V_1 < 0$

Fig. 15

Pentru circuitele duale corespunzătoare realizate cu transistori NPN avem — conform cu [2] — respectiv :

circuitul $1''6'' : w = \bigsqcup_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $2''6'' : w = \prod_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $3''6'' : w = \bigsqcap_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $4''6'' : w = \bigcup_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $5''6'' : w = \prod_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $6''1'' : w = \bigcup_i \bigsqcup_j x_{ij}$,

circuitul $6''2'' : w = \bigcup_i \prod_j x_{ij}$,

circuitul $6''3'' : w = \bigcup_i \bigsqcap_j x_{ij}$,

circuitul $6''4'' : w = \bigcup_i \bigcup_j x_{ij}$,

circuitul $6''5'' : w = \bigcup_i \prod_j x_{ij}$,

circuitul $6''6'' : w = \bigcup_i \bigcup_j x_{ij}$.

Conform cu [2], circuitele duale $p''6''$ și $6''q''$ se obțin înlocuind în circuitele $p'6'$ și $6'q'$ transistorii PNP prin transistorii NPN și schimbînd corespunzător polaritățile surselor de alimentare și ale impulsurilor de comandă.

## CONCLUZII

Din examinarea celor 22 circuite cu două nivele cu transistori PNP și NPN de mai sus, rezultă următoarele :

Funcția $\bigsqcap_i \prod_j x_{ij}$ se realizează cu circuitul $1'6'$.

Funcția $\bigcup_i \prod_j x_{ij}$ se realizează cu circuitele $2'6'$ și $5'6'$.

Funcția $\prod_i \bigcup_j x_{ij}$ se realizează cu circuitele $6'2'$ și $6'5'$.

Funcția $\prod_i \bigsqcup_j x_{ij}$ se realizează cu circuitul $6'3'$.

Circuitele $3'6'$, $4'6'$, $6'1'$, $6'4'$ și $6'6'$ au funcții de lucru ce se realizează de circuite cu un nivel.

Concluzii analoge se obțin pentru circuitele duale.

★

În [1] s-au definit circuitele regulate cu transistori PNP (respectiv NPN), circuitele obținute prin suprapunerea circuitelor de tipul $1'-5'$, respectiv $1''-5''$.

Vom defini circuitele regulate astfel [1]:

1) Circuitele degenerate (circuitul neîntrerupt și circuitul întrerupt) sînt circuite regulate.

2) Dacă $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ sînt $n+1$ circuite regulate, circuitul $\Gamma_0(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ este un circuit regulat.

3′) Circuitele de tipul $1'-6'$ sînt regulate.

3″) Circuitele de tipul $1''-6''$ sînt regulate.

Circuitele regulate cu transistori PNP vor fi definite prin 1,2,3′, iar cele cu transistori NPN prin 1, 2, 3″.

Vom introduce următoarele notații pentru formulele de structură:

Pentru circuitul cu transistori PNP de tipul $1'$ : $\top'_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $2'$ : $\bigcup'_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $3'$ : $\bot'_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $4'$ : $\prod'_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $5'$ : $\bigcup^*_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $6'$ : $\prod^*_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $1''$ : $\bot''_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $2''$ : $\prod''_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $3''$ : $\top''_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $4''$ : $\bigcup''_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $5''$ : $\prod^{**}_i \Gamma_i$

„ „ „ „ „ „ „ $6''$ : $\bigcup^{**}_i \Gamma_i$.

Funcția de lucru $\bigcup_i \prod_j x_{ij} = \bot_i \bot_j x_{ij}$ este realizată de circuite care au formulele de structură: $\bigcup' \prod' x_{ij}$, $\bigcup' \prod^* x_{ij}$, $\bigcup^* \prod' x_{ij}$, $\bigcup'' \prod'' x_{ij}$, $\bigcup'' \prod^{**} x_{ij}$, $\bigcup^{**} \prod'' x_{ij}$, $\bot' \bot' x_{ij}$ și $\bot'' \bot'' x_{ij}$.

Funcția de lucru $\prod_i \bigcup_j x_{ij} = \top_i \top_j x_{ij}$ este realizată de circuite care au formulele de structură: $\prod' \bigcup' x_{ij}$, $\prod' \bigcup^* x_{ij}$, $\prod^* \bigcup' x_{ij}$, $\prod'' \bigcup'' x_{ij}$, $\prod'' \bigcup^{**} x_{ij}$, $\prod^{**} \bigcup'' x_{ij}$, $\top' \top' x_{ij}$, $\top'' \top'' x_{ij}$.

Funcția de lucru $\bigcup_i \top_j x_{ij} = \bot_i \bigcup_j x_{ij}$ este realizată de circuite care au formulele de structură: $\bigcup' \top' x_{ij}$, $\bigcup^* \top' x_{ij}$, $\bigcup'' \top'' x_{ij}$, $\bigcup^{**} \top'' x_{ij}$, $\bot' \bigcup' x_{ij}$, $\bot' \bigcup^* x_{ij}$, $\bot'' \bigcup'' x_{ij}$, $\bot'' \bigcup^{**} x_{ij}$.

Funcţia de lucru $\prod_i \bot_j x_{ij} = \top \prod_i \prod_j x_{ij}$ este realizată de circuite care au formulele de structură : $\prod' \bot' x_{ij}$, $\prod^* \bot' x_{ij}$, $\prod'' \bot'' x_{ij}$, $\prod^{**} \bot'' x_{ij}$, $\top' \prod' x_{ij}$, $\top' \prod^* x_{ij}$, $\top'' \prod'' x_{ij}$, $\top'' \prod^{**} x_{ij}$.

Conform cu [2] formulele de structură ale circuitelor duale se obţin schimbînd $\bot'$ în $\top''$, $\prod'$ în $\cup''$, $\top'$ în $\bot''$, $\cup'$ în $\prod''$, $\cup^*$ în $\prod^{**}$, $\prod^*$ în $\cup^{**}$ şi reciproc.

Primită la redacţie la 16 martie 1962

## ЦЕПИ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ С ТРАНЗИСТОРАМИ, УПРАВЛЯЕМЫМИ ЧЕРЕЗ КОЛЛЕКТОР

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются транзисторы типов ПНП и НПН, управляемые через базу, эмиттер или коллектор в цепях с двумя уровнями. Так как управляющие сигналы подаются и на коллектор, получаются новые типы цепей, по сравнению с [1].

## CIRCUITS À TRANSISTORS À DEUX NIVEAUX, COMMANDÉS SUR LE COLLECTEUR

RÉSUMÉ

Les auteurs considèrent les transistors *PNP* et *NPN* commandés sur la base, l'émetteur ou le collecteur, montés sur des circuits à 2 niveaux. Etant donné que la commande est également donnée sur le collecteur, on obtient de nouveaux types de circuits par rapport à ceux obtenus en [1].

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Circuite cu transistori*. I. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.
2. VLADIMIR CLEJA, PAUL CONSTANTINESCU, *O teoremă de dualitate pentru circuitele de comutaţie*. Com. Acad. R.P.R., **XII**, 2 (1962).

# ASUPRA UNOR SPAȚII FINSLER

DE

N. N. TEODORESCU

Considerăm spațiul Finsler cu $n > 2$ dimensiuni, în care metrica este definită prin relația :

$ds^2 = f(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$, funcția $f(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, fiind pozitiv omogenă de gradul doi în variabilele $y^1, \ldots, y^n$ ; putem presupune aceasta totdeauna fără a restrînge generalitatea, deoarece omogenitatea de alt grad se poate reduce la gradul doi.

Vom mai presupune de asemenea existența și continuitatea derivatelor :

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^i \partial x^j \partial y^k \partial y^l \partial y^m} \text{ precum și, } \det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \right\| \neq 0.$$

Impunînd următoarele condiții structurii spațiului :

1°. geodezicele (curbele de lungime minimă) coincid cu curbele autoparalele de lungime nenulă, iar parametrul afin $t$ este egal cu arcul $s$ al curbelor geodezice ;

2°. matricile $x_{hk} = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ (unde $\Gamma^i_{jhk}$ sînt componentele tensorului de curbură) formează un sistem ireductibil de transformări liniare ;

3°. tensorul $a_{ij} = \partial^2 f / \partial y^i \partial y^j$ este pozitiv definit, se poate arăta că acest spațiu Finsler este un spațiu Riemann de metrică

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i\, dx^j.$$

Demonstrație.

Geodezicele sînt curbele ce extremează integrala :

$$\int_{P_1 P_2} \sqrt{f(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)} = \int_{t_1}^{t_2} f(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt,$$

unde am notat $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ și $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$ (am aplicat relația lui Euler pentru funcții omogene).

Extremalele căutate se află cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange. Putem aplica aceste ecuații luînd integrantul pătrat, deoarece extremalele integralelor $\int L\,dt$ și $\int L^r dt$ (unde $r$ este un număr întreg) coincid dacă $L$ este pozitiv omogen în variabilele $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ și $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

În acest caz, ecuațiile Euler-Lagrange ne dau :

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right] = 0,$$

sau $$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\left(a_{ik}\dot{x}^i + a_{jk}\dot{x}^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial \dot{x}^k}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = 0.$$

Ținînd seama că $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial \dot{x}^i}$ și că $a_{kj}$ este o funcție omogenă de grad zero, avem :

$\frac{\partial a_{kj}}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i = 0$. Vom ține seama că $a_{kj}\dot{x}^j + a_{ik}\dot{x}^i = 2\,a_{pk}\dot{x}^p$.

În acest caz, ecuațiile lui Euler devin :

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - 2\,a_{pk}\ddot{x}^p - 2\frac{\partial a_{pk}}{\partial \dot{x}^s}\dot{x}^p\ddot{x}^s = 0.$$

Deoarece avem $\dot{x}^p\frac{\partial a_{kp}}{\partial \dot{x}^s} = \frac{\partial a_{sk}}{\partial \dot{x}^p}\dot{x}^p = 0$, ecuațiile geodezicelor se scriu :

$$a_{pk}\ddot{x}^p = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right]\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Introducînd notațiile :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right] \text{ și } \Gamma^p_{ij} = -a^{kp}\Gamma_{ijk},$$

ecuațiile geodezicelor se scriu (am notat cu $a^{kp}$ complementul algebric al lui $a_{pk}$) :

$$\frac{d^2x^p}{dt^2} = \Gamma^p_{ij}\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}.$$

Impunînd condiția 1° rezultă că ecuațiile curbelor autoparalele se scriu :

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} = \Gamma^p_{ij}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds},$$ iar $\Gamma^p_{ij}$ sînt funcții numai de $x^1, \ldots, x^n$.

Se observă că $\Gamma^p_{ij}$ formează componentele unei conexiuni simetrice. Simetria este evidentă $\Gamma^p_{ij} = \Gamma^p_{ji}$. Pentru a demonstra legea de schimbare a conexiunii este suficient să arătăm (vom pune de aici $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)}$ ceea ce este posibil deoarece $a_{ij}$ este omogenă de grad zero) că $a_{ij}$ se comportă la o schimbare de variabile ca un tensor dublu convariant (propriu-zis avem de-a face cu un tensor generalizat al spațiului fibrat tangent). Acest lucru este suficient deoarece în acest caz $\Gamma^k_{ij}$ se vor transforma la o schimbare de variabile ca și simbolii lui Cristoffel (cu semn schimbat) din spațiul riemannian.

Într-adevăr, la o schimbare de variabile $\bar{x}^i = \bar{x}^i\ (x^1, \ldots, x^n)$, avem : $f(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n) = f(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, d\bar{x}^1, \ldots, d\bar{x}^n)$, deoarece metrica este un invariant la o transformare de coordonate. Vom mai presupune transformarea reversibilă adică $\det \left\| \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right\| \neq 0$.

Să derivăm relația precedentă în raport cu $dx^i$. Vom avea :

$$\frac{\partial f}{\partial(dx^i)} = \frac{\partial f}{\partial(d\bar{x}^j)}\cdot\frac{\partial(d\bar{x}^j)}{\partial(dx^i)}$$

și deoarece $d\bar{x}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i$, avem :

$$\frac{\partial(d\bar{x}^j)}{\partial(dx^i)} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i},$$

de unde

$$\frac{\partial f}{\partial(dx^i)} = \frac{\partial f}{\partial(d\bar{x}^j)}\cdot\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$$

deci $\dfrac{\partial f}{\partial(dx^i)}$ se comportă ca un vector covariant. Dacă mai derivăm o dată, rezultă :

$a_{ij} = \bar{a}_{lt}\dfrac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\cdot\dfrac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j}$ ceea ce era de demonstrat.

Vom găsi acum niște relații, analoge unor relații din spațiul Riemann, și anume relații analoge identităților lui Ricci.

Avem evident :

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kii}, \tag{1}$$

relație din care se deduce :

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = -a_{rj}\,\Gamma^r_{ik} - a_{ri}\,\Gamma^r_{jk}. \tag{2}$$

Vom deduce acum o formulă pentru determinantul $A = \det \| a_{ij} \|$.

Dacă notăm cu $A^{ij}$ minorul lui $a_{ij}$, ținînd seama de regula de derivare a determinanților, rezultă :

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} A^{ij} \text{ și deoarece } A^{ij} = A a^{ij} \text{ și ținînd seama și de (2), avem :}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} = -2 A \Gamma^i_{ik}, \text{ de unde } \Gamma^i_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln A}{\partial x^k}.$$

Ecuațiile (2) reprezintă un sistem de ecuații cu derivate parțiale care ne dau pe $a_{ij}$ $(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$ dacă se dau $\Gamma^k_{ij}$ $(x^1, \ldots, x^n)$.

Condițiile de compatibilitate ne dau :

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} \text{ sau,}$$

$$-\frac{\partial a_{rj}}{\partial x^l} \Gamma^r_{ik} - a_{rj} \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial a_{ri}}{\partial x^l} \Gamma^r_{jk} - a_{ri} \frac{\partial \Gamma^r_{jk}}{\partial x^l} = -\frac{\partial a_{rj}}{\partial x^k} \Gamma^r_{il} - a_{rj} \frac{\partial \Gamma^r_{il}}{\partial x^k} -$$

$$-\frac{\partial a_{ri}}{\partial x^k} \Gamma^r_{jl} - a_{ri} \frac{\partial \Gamma^r_{jl}}{\partial x^k}.$$

Dacă înlocuim pe $\frac{\partial a_{rj}}{\partial x^h}$ prin $-a_{mj} \Gamma^m_{rh} - a_{mr} \Gamma^m_{jh}$ reducem termenii asemenea și grupăm, obținem :

$$a_{ri}\left(\frac{\partial \Gamma^r_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^r_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^r_{ml} \Gamma^m_{jk}\right) +$$

$$+ a_{rj}\left(\frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^r_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{mk} \Gamma^m_{il} - \Gamma^r_{ml} \Gamma^m_{ik}\right) = 0.$$

Dacă ținem seama că expresiile din paranteză sînt tocmai componentele tensorului de curbură, atunci condițiile de compatibilitate se scriu :

$$a_{ri} \Gamma^r_{jkl} + a_{rj} \Gamma^r_{ikl} = 0. \tag{3}$$

Dacă notăm cu $\Gamma_{ijkl} = a_{ri} \Gamma^r_{jkl}$ (se observă că $\Gamma_{ijkl}$ este un tensor generalizat ; el este un tensor de 4 ori covariant și este analogul asociatului covariant tensorului de curbură dintr-un spațiu Riemann) condițiile de integrabilitate se scriu :

$$\Gamma_{ijkl} + \Gamma_{jikl} = 0. \tag{4}$$

Vom arăta că totdeauna condițiile (4) sînt îndeplinite adică sistemul de ecuații (2) este complet integrabil în toate cazurile.

Într-adevăr, ținînd seama de relațiile $\Gamma^p_{ij} = -a^{kp}\,\Gamma_{ijk}$ precum și de relațiile (1) obținem relații analoge ca și în spațiul Riemann. Calculul este analog ca și în spațiul Riemann. Obținem :

$$\Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l}\right) + a^{rm}(\Gamma_{jkr}\,\Gamma_{ilm} - \Gamma_{jlr}\,\Gamma_{ikm}).$$

Se observă imediat că $\Gamma_{ijkl}$ sînt strîmb simetrici în primii doi indici, deci sistemul (2) este complet integrabil.

De asemenea, mai avem alte identități analoge celor din spațiul Riemann :

$$\Gamma_{ijkl} = \Gamma_{klij},$$

$$\Gamma_{ijkl} + \Gamma_{ijlk} = 0,$$

$$\Gamma_{ijkl} + \Gamma_{iklj} + \Gamma_{iljk} = 0.$$

Deoarece sistemul (2) este complet integrabil, rezultă că în afara soluției, dată de $a_{ij}(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$, mai există o soluție $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ (deoarece în sistemul (2) nu intervin explicit variabilele $dx^i$).

Ne vom folosi acum de următoarea teoremă de algebră liniară :

*Dacă matricile* $X_{hk} = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ *formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci sistemul liniar în variabilele* $g_{ij}$, $g_{ri}\,\Gamma^r_{jhk} + g_{rj}\,\Gamma^r_{ihk} = 0$, *are soluție unică abstracție făcînd de un factor de proporționalitate.*

Datorită condiției 2°, rezultă că ecuațiile (3) au soluție unică, abstracție făcînd de un factor.

Vom avea deci, $g_{ij} = e^{2\sigma} a_{ij}$ unde $\sigma$ este funcție de $x^1, \ldots, x^n$, $dx^1, \ldots, dx^n$.

Funcțiile $a_{ij}$ și $g_{ij}$ verifică ecuațiile (2), ecuații care sînt echivalente cu ecuațiile :

$$\Gamma^p_{ij} = -\frac{1}{2}\,a^{kp}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{5}$$

Dacă ținem seama că aceste ecuații sînt verificate de $a_{ij}(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$ și $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, avem :

$$\frac{1}{2}\,a^{kp}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\,g^{kp}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

și înlocuind $g_{ij} = e^{2\sigma} a_{ij}$, obținem :

$\delta^p_j\,\sigma_i + \delta^p_i\,\sigma_j - a_{ij}\,a^{pr}\sigma_r = 0$. Dacă luăm $i,\ j \neq p$, obținem :

$a^{pr}\sigma_r = 0$, de unde $\sigma_r = 0$ (am notat cu $\sigma_r$ pe $\dfrac{\partial \sigma}{\partial x^r}$).

Rezultă $a_{ij}(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n) = h(dx^1, \ldots, dx^n)\cdot g_{ij}(x^1 \ldots, x^n)$, unde $h(dx^1, \ldots, dx^n)$ este o funcție omogenă de grad zero.

Vom arăta acum că $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ formează componentele unui tensor dublu covariant.

Să considerăm transformarea

$$\overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{6}$$

Să scriem că $g_{ij}$ verifică ecuațiile (3) și totodată să trecem la noile variabile. Vom folosi următoarele notații:

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij}(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n); \quad \overline{\Gamma}^r_{jkl} = \Gamma^r_{jkl}(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n).$$

Vom avea deci:

$$\overline{g}_{ri}\,\overline{\Gamma}^r_{jkl} + \overline{g}_{rj}\,\overline{\Gamma}^r_{ikl} = 0.$$

Să ținem seama că $\overline{\Gamma}^r_{jkl}$ sînt componentele unui tensor o dată contravariant și de trei ori covariant. Vom avea:

$$\overline{g}_{ri}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^k}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l}\cdot\Gamma^m_{npt} + \overline{g}_{rj}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^k}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l}\cdot\Gamma^m_{spt} = 0.$$

Deoarece formulele (6) sînt reversibile, înmulțim relația precedentă cu

$$\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^\delta}$$ și sumînd obținem:

$$\overline{g}_{ri}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\gamma}\cdot\Gamma^m_{\delta\beta\alpha} + \overline{g}_{rj}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^\delta}\cdot\Gamma^m_{\gamma\beta\alpha} = 0.$$

Rezultă că $G_{lt} = \overline{g}_{ri}\dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\cdot\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^t}$ este o soluție a ecuației (3) și conform celor stabilite, vom avea $\overline{g}_{ri}\dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\cdot\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^t} = e^{2\Sigma}\,g_{lt}$ unde $\Sigma = \Sigma(x^1, \ldots, x^n)$.

Să dovedim că $G_{lt}$ este o soluție a ecuațiilor (2). De aici va rezulta $\Sigma$ = constant. Pentru aceasta vom scrie că $g_{ij}$ verifică ecuațiile (2) și totodată vom trece la noile variabile definite de relațiile (6).

Avem: $\dfrac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} = -\,\overline{g}_{ri}\,\overline{\Gamma}^r_{jk} - \overline{g}_{ri}\,\overline{\Gamma}^r_{ik}$.

Observăm că $\dfrac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} = \dfrac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^l}\cdot\dfrac{\partial x^l}{\partial x^k}$ și scriind legea de transformare pentru $\overline{\Gamma}^r_{jk}$ vom obține:

$$\frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} = -\,\overline{g}_{ri}\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^l\,\partial x^t}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} - \overline{g}_{ri}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\Gamma^p_{lt} -$$

$$-\,\overline{g}_{rj}\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^l\,\partial x^t}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} - \overline{g}_{rj}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^i}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\cdot\Gamma^n_{pt}.$$

Înmulțind cu $\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^v}$ și sumînd, obținem:

$$\frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^v} \cdot \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} = -\overline{g}_{ri} \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^s \partial x^v} \cdot \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} - \overline{g}_{rj} \frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^m \partial x^v} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} -$$

$$- \overline{g}_{ri} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \Gamma^p_{sv} - \overline{g}_{rj} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} \Gamma^p_{mv}.$$

De aici rezultă, cu o schimbare a indicilor de sumare:

$$\frac{\partial}{\partial x^v}\left(\overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s}\right) = -\overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \Gamma^p_{sv} - \overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} \Gamma^p_{mv}.$$

Conform celor stabilite, rezultă:

$\overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s} = C g_{ms}$, unde $C$ este o constantă. Luînd acum transformarea identică $\overline{x}^\alpha = x^\alpha$, rezultă $C = 1$. Deci $g_{ij}$ este un tensor dublu covariant. De aici rezultă că $h(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$ este invariant la o schimbare de coordonate. Mai mult chiar, pentru $n > 2$, rezultă că $h$ este o constantă, deci spațiul Finsler considerat este spațiu Riemann.

Într-adevăr, avem: $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)} = h g_{ij}$. (7)

Să derivăm în raport cu $dx^r$. Obținem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)\,\partial(dx^r)} = \frac{\partial h}{\partial(dx^r)} g_{ij}.$$

Observăm că

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)\,\partial(dx^r)} = \frac{\partial}{\partial(dx^i)}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial(dx^j)\,\partial(dx^r)}\right]$$

și ținînd seama și de (7) avem:

$\frac{\partial h}{\partial(dx^r)} g_{ij} = \frac{\partial h}{\partial(dx^i)} g_{jr}$. Înmulțind cu $g^{jt}$ și sumînd, obținem:

$\frac{\partial h}{\partial(dx^r)} \delta^t_i = \frac{\partial h}{\partial(dx^i)} \delta^t_r$ relații care nu pot fi valabile decît dacă $h =$ constant [4] [1]).

Înlocuind în (7) obținem $\frac{\partial^2 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)} = C g_{ij}$. Înmulțind cu $dx^i\,dx^j$ și sumînd obținem, ținînd seama și de formula lui Euler, $\frac{\partial^2 f}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^j)} dx^i dx^j = 2f$, $f = K g_{ij} dx^i\,dx^j$ unde $K$ este o constantă.

[1]) Vol. II, p. 26.

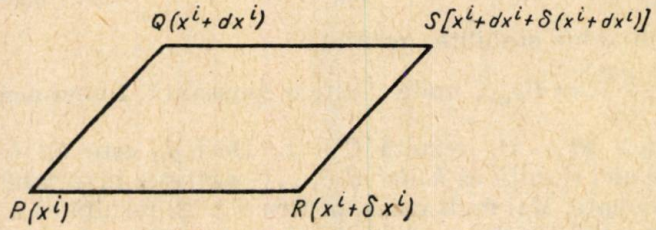
Spațiul Finsler considerat, este deci spațiul Riemann de metrică:

$$ds^2 = Kg_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

Vom arăta că se poate ajunge la același rezultat (mai precis la ecuațiile (2)), dacă în loc de condiția 1° impunem condiția ca transportul paralel să păstreze lungimile vectorilor infinitezimali, iar conexiunea afină să fie fără torsiune.

Vectorul infinitezimal $PQ$ este transportat prin paralelism în vectorul $RS$.

Avem $\overline{RS}^2 = f(x + \delta x,\ d(x + \delta x))$ (în cazul conexiunii simetrice operatorii $d$ și $\delta$ sînt permutabili, adică $d\,\delta x^i = \delta dx^i$).




Dacă ținem seama de identitatea lui Euler pentru funcții omogene, avem:

$$2\,\overline{RS}^2 = a_{ij}(x + \delta x,\ d(x + \delta x))\ (dx^i + \delta dx^i)\ (dx^j + \delta dx^j).$$

Să dezvoltăm pe $a_{ij}$ în serie Taylor după puterile lui $\delta x^i$ și să oprim dezvoltarea la prima putere a lui $\delta x^i$. Totodată să ținem seama și de transportul paralel definit prin relațiile:

$$\delta dx^i = \Gamma^i_{rk}\,dx^r\delta x^k.$$

Vom obține:

$$2\,\overline{RS}^2 = \left[a_{ij}(x,\ dx) + \frac{\partial a_{ij}(x,\ dx)}{\partial x^k}\ \delta x^k \cdot \frac{\partial a_{ij}(x,\ dx)}{\partial (dx^k)}\,\delta x^k\right](dx^i + \Gamma^i_{rk}\,dx^r\,\delta x^k)\ \cdot\ (dx^j + \Gamma^j_{rk}\,dx^r\delta x^k).$$

Dacă neglijăm infiniții mici de ordin superior lui 3 și observăm că termenii $\dfrac{\partial a_{ij}(x,\ dx)}{\partial (dx^k)}$ nu vor interveni din cauza simetriei lor în indicii $i, j, k$ și a identității lui Euler pentru funcții omogene, obținem:

$$2\,\overline{RS}^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\,dx^i\,dx^j\,\delta x^k + a_{ij}\,\Gamma^j_{rk}\,dx^r\,dx^i\,\delta x^k + a_{ij}\,\Gamma^i_{rk}\,dx^r\,dx^j\,\delta x^k$$

sau $2\overline{RS}^2 = 2\overline{PQ}^2 + a_{ij,\,k}\,dx^i\,dx^j\,\delta x^k$, unde am notat

$$a_{ij,\,k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{ri}\ \Gamma^r_{jk} + a_{rj}\ \Gamma^r_{ik}.$$

Pentru ca transportul paralel să păstreze lungimile vectorilor infiniți minimali, trebuie ca :

$$a_{ij,\,k}\,dx^i\,dx^j\,\delta x^k = 0.$$

Însă deoarece $\delta x^k$ sînt oarecare, independenți de $dx^k$, rezultă că avem $a_{ij,\,k}\,dx^i\,dx^j = 0$. Să derivăm aceste relații în raport cu $dx^1$. Obținem :

$$2a_{lj,\,k}\,dx^j + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k\,\partial\,(dx^l)}\,dx^i\,dx^j + \frac{\partial a_{ri}}{\partial\,(dx^l)}\,dx^i\,dx^j\,\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial\,(dx^l)}\,dx^j dx^i\,\Gamma^r_{ik} = 0.$$

Observînd că $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k\,\partial\,(dx^l)}\,dx^i = \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial(dx^l)}\right)dx^i = \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\dfrac{\partial a_{lj}}{\partial(dx^i)}\,dx^i\right) = 0,$

$$\frac{\partial a_{ri}}{\partial(dx^l)}\,dx^i = \frac{\partial a_{rl}}{\partial(dx^i)}\,dx^i = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^l)}\,dx^j = \frac{\partial a_{rl}}{\partial(dx^j)}\,dx^j = 0,$$

rezultă că avem :

$$a_{ij,\,k}\,dx^j = 0. \tag{8}$$

Să arătăm că relațiile (8) nu sînt valabile decît dacă $a_{ij,\,k} = 0$.

Să presupunem că $a_{ij,\,k} \neq 0$. În acest caz derivînd relațiile (8) în raport cu $dx^i$, vom obține :

$$a_{li\,,\,k} + \frac{\partial^2 a_{lj}}{\partial x^k\,\partial\,(dx^i)}\,dx^j + \frac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^i)}\,dx^j\,\Gamma^r_{lk} + \frac{\partial a_{rl}}{\partial(dx^i)}\,dx^j\,\Gamma^r_{jk} = 0.$$

De aici rezultă analog ca mai sus,

$$a_{ij,\,k} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^i)}\,\Gamma^r_{lk}\,dx^l = 0. \tag{9}$$

Se observă că $a_{ij,\,k} = \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{ri}\,\Gamma^r_{jk} + a_{rj}\,\Gamma^r_{ik}$ se comportă la o schimbare de variabile ca un tensor triplu covariant ($a_{ij,\,k}$ este analoga derivatei covariante, a unui tensor dublu covariant).

Rezultă deci că $\dfrac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^i)}\,\Gamma^r_{lk}\,dx^l \neq 0$ (dacă $a_{ij,\,k} \neq 0$) și se comportă ca un tensor triplu covariant, adică :

$$\frac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^i)}\,\Gamma^r_{lk}\,dx^l = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial \overline{a}_{r\beta}}{\partial(d\overline{x}^\alpha)}\cdot\overline{\Gamma}^r_{l\gamma}\,d\overline{x}^l. \tag{10}$$

Vom arăta însă că relațiile (10) nu sînt valabile decît dacă $a_{ij,\,k} = 0$ (caz în care $\dfrac{\partial a_{rj}}{\partial(dx^i)}\,\Gamma^r_{lk}\,dx^l = 0$, conform relațiilor (9) deci relațiile (10) se verifică identic).

Într-adevăr, $\bar{a}_{r\beta} = a_{ts}\dfrac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^r}\cdot\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta}$, de unde :

$$\frac{\partial \bar{a}_{r\beta}}{\partial(d\bar{x}^\alpha)} = \frac{\partial a_{ts}}{\partial(dx^p)}\cdot\frac{\partial(dx^p)}{\partial(d\bar{x}^\alpha)}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^r}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial a_{ts}}{\partial(dx^p)}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^\alpha}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^r}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta},$$

deoarece $\dfrac{\partial(dx^p)}{\partial(d\bar{x}^\alpha)} = \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^\alpha}$,

$$\bar{\Gamma}^r_{l\gamma} = \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^u \partial x^v}\cdot\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^l}\cdot\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^w}\cdot\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^l}\cdot\frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^\gamma}\,\Gamma^u_{vw} = -\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^\gamma}\cdot\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^h} +$$

$$+\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^u}\cdot\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^l}\cdot\frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^\gamma}\cdot\bar{\Gamma}^u_{vw};\quad d\bar{x}^l = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q}\cdot dx^q.$$

De aici obținem :

$$\frac{\partial \bar{a}_{r\beta}}{\partial \bar{x}^\alpha}\cdot\bar{\Gamma}^r_{l\gamma}\cdot d\bar{x}^l = \frac{\partial a_{us}}{\partial x^v}\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^\alpha}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^\gamma}\bar{\Gamma}^u_{vw}\,dx^v - \frac{\partial a_{ts}}{\partial(dx^p)}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^\alpha}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^\gamma}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial x^q}dx^q.$$

Ținînd seama acum de relațiile (10), obținem că :

$$\frac{\partial a_{ts}}{\partial(dx^p)}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^\alpha}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^\gamma}\cdot\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q}\cdot dx^q = 0$$

sau,

$$\frac{\partial a_{ts}}{\partial(dx^p)}\cdot\frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^\gamma}\cdot\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q}\cdot dx^q = 0.$$

relații diferite de zero în general. Aceste relații pot fi nule numai dacă $a_{ts}$ sînt funcții numai de $x^1, \ldots, x^n$, însă atunci sîntem în cazul spațiului lui Riemann și deci $a_{ij,k} = 0$. Am ajuns la o contradicție. Am presupus $a_{ij,k} \neq 0$ și a rezultat o absurditate, sau $a_{ij,k} = 0$.

Rezultă deci $a_{ij,k} = 0$ ; adică, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = -a_{ri}\,\Gamma^r_{jk} - a_{rj}\,\Gamma^r_{ik}$ adică ecuațiile (2).

Putem enunța deci următorul rezultat :

*Dacă într-un spațiu Finsler există un transport paralel ce închide paralelogramele infinitezimale și lasă invariante lungimile vectorilor și dacă matricele* $x_{hk} = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ *formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci spațiul Finsler este un spațiu Riemann.*

★

Utilizînd metodele lui Elie Cartan, în cercetarea spațiilor Finsler, Ludwig Berwald a pus problema să se găsească spațiile Finsler care nu sînt spații Riemann și care să îndeplinească una din următoarele condiții :

1°. geodezicele să coincidă cu curbele autoparalele de lungime nenulă, iar parametrul afin $t$ să coincidă cu arcul $s$ al geodezicelor,

sau

2°. transportul paralel să închidă paralelogramele infinitezimale presupunînd în ambele cazuri că transportul paralel este în sensul lui E. Cartan, deci că variația unui vector conține și variațiile diferențialelor $dx^i$.

Am văzut însă că în afara spațiilor Riemann nu mai există alte spații Finsler care să îndeplinească una din aceste condiții, dacă impunem condiția ca matricele $x_{hk} = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ să formeze un sistem ireductibil de transformări liniare, ($\Gamma^i_{jhk}$ sînt componentele tensorului de curbură), presupunînd însă că transportul paralel este dat de o conexiune afină.

Însă, așa după cum au arătat G. Vrănceanu și C. Teleman în lucrările asupra grupurilor de olonomie, spațiile în care matricile $x_{hk} = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ nu formează un sistem ireductibil de transformări liniare, nu sînt decît excepții.

În încheiere îmi exprim recunoștința și mulțumirile tov. acad. prof. G. Vrănceanu și tov. lector C. Teleman pentru sprijinul și prețioasele indicații pe care mi le-au dat.

Primită la redacție la 15 februarie 1962

## О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФИНСЛЕРА

РЕЗЮМЕ

Если в пространстве Финслера с положительно определенной метрикой, в котором матрицы $Xhk = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ (где $\Gamma^i_{jhk}$ — составляющие тензора кривизны) образуют неприводимую систему линейных преобразований, то выполнено одно из условий:

1°. геодезические совпадают с автопараллельными кривыми ненулевой длины, а дуга $s$ геодезической совпадает с аффинным параметром автопараллельной или

2°. параллельный перенос сохраняет длины и рассматриваемое пространство Финслера является пространством Римана.

Условие, чтобы матрицы $Xhk = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ образовали неприводимую систему линейных преобразований, вообще выполнено, как показали акад. Г. Врэнчану и К. Телеман.

## À PROPOS D'ESPACES DE FINSLER

RÉSUMÉ

L'auteur a établi le résultat suivant :

Si dans un espace de Finsler, de métrique définie positivement et dans lequel les matrices $Xhk = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ ($\Gamma^i_{jhk}$ étant les composantes du

tenseur de courbure) forment un système irréductible de transformations linéaires, l'une des deux conditions suivantes est remplie :

1° Les lignes géodésiques coïncident avec les courbes autoparallèles de longueur non-nulle, tandis que l'arc $s$ de la courbe géodésique coïncide avec le paramètre affine de la courbe autoparallèle, ou :

2° Le transport parallèle respecte les longueurs ; dans ce cas l'espace de Finsler considéré est un espace de Riemann.

La condition que les matrices $Xhk = \| \Gamma^i_{jhk} \|$ forment un système irréductible de transformations linéaires est généralement remplie, comme l'ont montré G. Vrănceanu et C. Teleman dans leurs travaux sur les groupes d'holonomie.

## BIBLIOGRAFIE

1. LUDWIG BERWALD, *Über Finslersche und verwandte Räume*. Comptes rendus du deuxième Congrès des pays slaves, Praga, 1934—1935.

2. К. ТЕЛЕМАН. *Об одной теореме Бореля — Лихнеовича*. Rev. Math. pures et appl. Acad. R.P.R., **III** (1958).

3. G. VRĂNCEANU, *Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie des espaces* $A_n$. Publicationes mathematicae, Debrecen, **7** (1960).

4. — *Lecţii de geometrie diferenţială*. I, II. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.

# RELAȚII DE DOMINAȚIE ÎN PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

DE

E. BALAȘ

## § 1. INTRODUCERE

În modelele de programare liniară care descriu probleme economice reale, numărul variabilelor (fie el $n$) depășește cu mult (uneori de cîteva ori) numărul inegalităților și ecuațiilor (fie el $m$). Pe de altă parte se știe că o soluție optimă conține valori pozitive pentru cel mult $m$ variabile. Articolul de față stabilește condiții suficiente pentru ca anumite variabile să nu poată intra cu valori pozitive în soluția optimă a unei probleme de programare liniară. Pe această bază devine uneori posibilă excluderea de la început a anumitor variabile, respectiv eliminarea vectorilor-coloană corespunzători din matricea coeficienților.

Pe de altă parte, se poate întîmpla ca sistemul de restricții al unei probleme de programare liniară să conțină inegalități care nu influențează soluțiile sistemului, ele fiind satisfăcute de orice soluție care satisface restul inegalităților și ecuațiilor. Articolul stabilește condiții suficiente și pentru astfel de cazuri. Pe această bază uneori anumite restricții pot fi excluse din problemă.

O astfel de reducere a dimensiunilor problemei simplifică efectuarea calculelor. Astfel, de exemplu, aplicarea metodei date în articol la problema tratată în [1], care are 17 ecuații și 49 variabile (dintre care 43 variabile propriu-zise și 6 artificiale) permite excluderea prin cîteva zeci de operații simple a 22 din cele 43 variabile propriu-zise.

## § 2. DEFINIȚII

$A$ și $B$ fiind doi vectori definiți într-un spațiu $m$-dimensional și avînd componentele $a_1, \ldots, a_m$, respectiv $b_1, \ldots, b_m$, vom scrie $A \geqq B$ dacă $a_i \geqq b_i$ pentru toți $i$, iar $A \geq B$ dacă $a_i \geqq b_i$ pentru toți $i$ și $a_i > b_i$ cel puțin pentru un $i$.

Problema de programare liniară primală (I) se definește astfel: Să se minimizeze expresia

$$CX, \tag{1}$$

vectorul $X = (x_1, \ldots, x_n)$ fiind supus condițiilor:

$$\mathbf{A}X \geqq B, \tag{2}$$

$$X \geq 0, \tag{3}$$

unde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ este o matrice de $m \times n$, $C = (c_1, \ldots, c_n)$ este un vector $n$-dimensional, iar $B = (b_1, \ldots, b_m)$ este un vector $m$-dimensional.

După cum se știe, problema duală (II) se definește în acest caz astfel: Să se maximizeze expresia

$$YB, \tag{4}$$

vectorul $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ fiind supus condițiilor:

$$Y\mathbf{A} \leqq C \tag{5}$$

$$Y \geq 0 \tag{6}$$

unde matricea $\mathbf{A}$ și vectorii $B$ și $C$ au aceeași semnificație ca în problema primală.

Notăm vectorii-coloană ai matricii $\mathbf{A}$ prin $A_1, \ldots, A_n$, iar vectorii-linie ai aceleiași matrici prin $A_1', \ldots, A_m'$. Notăm inegalitățile problemei primale, corespunzătoare vectorilor $A_1', \ldots, A_m'$, prin $(e_1), \ldots, (e_m)$, iar inegalitățile problemei duale, corespunzătoare vectorilor $A_1, \ldots, A_n$, prin $(e_1'), \ldots, (e_n')$.

Definim în spațiul $m + 1$ - dimensional vectorii-coloană:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \hline A_1 \end{pmatrix} = (-c_1, a_{11}, \ldots, a_{m1}),$$

. . . . . .

$$P_n = \begin{pmatrix} -c_n \\ \hline A_n \end{pmatrix} = (-c_n, a_{1n}, \ldots, a_{mn}),$$

iar în spațiul $n + 1$ - dimensional vectorii-linie:

$$R_1 = (b_1, -A_1') = (b_1, -a_{11}, \ldots, -a_{1n}),$$

. . . . . .

$$R_m = (b_m, -A_m') = (b_m, -a_{m1}, \ldots, -a_{mn}).$$

Pentru *vectorii-coloană* ai problemei primale definim următoarea relație de dominație:

*O combinație liniară pozitivă de vectori* $P_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, r;\ r < n)$ *domină o altă combinație liniară pozitivă de vectori* $P_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p;\ p < n)$, *dacă*

$$\sum_{s=1}^{r} k_s P_{i_s} \geq \sum_{q=1}^{p} h_q P_{j_q}, \tag{7}$$

*unde* $k_s,\ h_q > 0$ $(s = 1, \ldots, r;\ q = 1, \ldots, p)$.

Un important caz particular al relației (7) are loc cînd toți coeficienții $h_q$ sînt nuli afară de unul (fie el $h_j$, iar vectorul respectiv $P_j$). Atunci avem relația

$$\sum_{s=1}^{r} k'_s P_{i_s} \geq P_j, \tag{8}$$

unde $k'_s = \dfrac{k_s}{h_j}$, și vom spune că *vectorul* $P_j$ *este dominat de combinația liniară pozitivă de vectori* $P_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, r;\ r < n)$.

La rîndul ei relația (8) are drept caz particular relația

$$k'_i P_i \geq P_j, \tag{9}$$

cînd toți coeficienții $k'_s$ sînt nuli afară de $k'_i$, coeficientul vectorului $P_i$. În acest caz spunem că *vectorul* $P_i$ *domină vectorul* $P_j$.

Noțiunea de dominație definită mai sus este mai generală decît noțiunea similară din teoria jocurilor (a se vedea de exemplu [3]), care este definită ca o relație între un vector și o combinație liniară convexă de vectori.

În mod analog cu cele de mai sus, definim pentru *inegalitățile* problemei primale următoarea relație de dominație :

*Un sistem de inegalități* $(e_{i_1}), \ldots, (e_{i_r})$, $(r < m)$, *domină un alt sistem de inegalități* $(e_{j_1}), \ldots, (e_{j_p})$, $(p < m)$, *dacă*

$$\sum_{s=1}^{r} k_s R_{i_s} \geq \sum_{q=1}^{p} h_q R_{j_q}, \tag{10}$$

*unde* $k_s,\ h_q > 0$ $(s = 1, \ldots, r;\ q = 1, \ldots, p)$.

Ca și în cazul vectorilor-coloană, avem cele două cazuri particulare importante, unul dat de relația

$$\sum_{s=1}^{r} k'_s R_{i_s} \geq R_j, \quad \left(k'_s = \frac{k_s}{h_j}\right), \tag{11}$$

cînd *sistemul de inegalități* $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s})$ *domină inegalitatea* $(e_j)$, iar al doilea dat de relația

$$k'_i R_i \geq R_j, \tag{12}$$

cînd *inegalitatea* $(e_i)$ *domină inegalitatea* $(e_j)$.

## § 3. CONDIȚII SUFICIENTE PENTRU EXCLUDEREA UNOR VARIABILE SAU INEGALITĂȚI

TEOREMĂ. *Dacă în problema* I *o combinație liniară pozitivă de vectori* $P_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ *este dominată de o altă combinație liniară pozitivă de vectori* $P_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$, *atunci în orice soluție optimă* $\bar{X} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *a problemei, cel puțin una din componentele* $\bar{x}_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ *va fi nulă. Orice soluție optimă a problemei primale va avea deci componente pozitive identice cu acelea ale soluției optime a problemei* I′ *ce se obține din* I *prin excluderea coloanelor* $A_{j_q}$ *pentru care* $\bar{x}_{j_q} = 0$ *din* **A**, *precum și a componentelor respective* $c_{j_q}$ *din* $C$ *și* $x_{j_q}$ *din* $X$. *Orice soluție optimă a problemei duale va fi și o soluție optimă a problemei* II$^\star$ *ce se obține din* II *prin excluderea inegalităților* $(e'_{j_q})$ *pentru care* $\bar{x}_{j_q} = 0$ *din sistemul de restricții* (5), *și invers, orice soluție optimă a problemei* II$^\star$ *va fi și o soluție optimă a problemei* II.

Demonstrație.

Să presupunem că, contrar afirmației din teoremă, în soluția optimă a problemei I avem toți $\bar{x}_{j_q} > 0$ $(q = 1, \ldots, p)$. Atunci relațiile $j_1, \ldots, j_p$ din sistemul de restricții (5) al problemei duale devin egalități (a se vedea de exemplu [2]), adică

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij_q}\, y_i = c_{j_q}, \quad (q = 1, \ldots, p).$$

Notînd

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline Y \end{pmatrix} = (1, y_1, \ldots, y_m),$$

avem așadar

$$Q\ P_{j_q} = 0, \ (q = 1, \ldots, p),$$

și deci

$$\sum_{q=1}^{p} t_q\ Q P_{j_q} = Q\left(\sum_{q=1}^{p} t_q\ P_{j_q}\right) = 0,$$

pentru orice constante $t_q$.

Dar, deoarece o combinație liniară pozitivă a vectorilor $P_{j_q}$ $(q=1,\ldots,p)$ este dominată de o combinație liniară pozitivă a vectorilor $P_{i_s}$ $(s=1,\ldots,r)$ și dat fiind că $Q \geq 0$, din cele de mai sus rezultă, pe baza relației (7), că

$$\sum_{s=1}^{r} k_s\ Q P_{i_s} = Q\left(\sum_{s=1}^{r} k_s\ P_{i_s}\right) \geq Q\left(\sum_{q=1}^{p} h_q\ P_{j_q}\right) = 0.$$

De aici însă rezultă că cel puțin pentru un $i_s = u$ vom avea

$$Q\ P_u > 0,$$

adică

$$\sum_{i=1}^{m} a_{iu}\, y_i > c_u,$$

ceea ce contrazice restricțiile (5) ale problemei duale.

În consecință cel puțin un $\bar{x}_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ este nul.

Ultima afirmație a teoremei rezultă din faptul că problema II* este duala problemei I′. Notînd cu $\bar{X}'$ soluția optimă a problemei I′, cu $\bar{Y}$ soluția optimă a problemei II și cu $C'$ vectorul ce se obține din $C$ prin excluderea componentelor $c_{j_q}$ pentru care $\bar{x}_{j_q} = 0$, avem, conform teoremei dualității [2] și pe baza primei părți a teoremei noastre,

$$\bar{Y}B = C\bar{X} = C'\,\bar{X}'.$$

Așadar, $\bar{Y}$ este o soluție optimă a dualei problemei I′, adică a problemei II*.

Pe de altă parte, notînd cu $\bar{Y}^*$ soluția optimă a problemei II*, avem

$$\bar{Y}^* B = C'\,\bar{X}' = C\bar{X},$$

și deci $\bar{Y}^*$ este și o soluție optimă a dualei problemei I, adică a problemei II.

*Observație.* Dacă în problema I combinația liniară pozitivă de vectori $P_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ dominată se reduce la un singur vector $P_j$, avem de-a face cu un important caz particular al teoremei enunțate. În acest caz, pentru orice soluție optimă $\bar{X} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ a problemei vom avea $\bar{x}_j = 0$. Cu alte cuvinte, orice soluție optimă a problemei primale va avea componente identice cu acelea ale soluției optime a problemei I′ ce se obține din I prin excluderea coloanei $A_j$ din **A**, respectiv a componentelor $c_j$ din $C$ și $x_j$ din $X$. Orice soluție optimă a problemei duale va fi totodată o soluție optimă a problemei II* ce se obține din II prin excluderea inegalității $(e_j)$ din sistemul (5).

Dacă avem mai mulți vectori $P_{j_q}$, identificarea vectorului (vectorilor) care poate fi eliminat este adesea posibilă prin examinarea restricțiilor în care vectorii $P_{j_q}$ au coeficienți nenuli. Aceste posibilități se vor ilustra în parte în exemplul din § 4.

Din teorema enunțată decurge următorul

COROLAR. *Dacă în problema* I *un sistem de inegalități* $(e_{j_1}), \ldots, (e_{j_p})$ *este dominat de un alt sistem de inegalități* $(e_{i_1}), \ldots (e_{i_r})$, *atunci în orice soluție optimă* $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ *a problemei duale, cel puțin una din componentele* $\bar{y}_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ *va fi nulă. Orice soluție optimă a problemei duale va avea deci componentele pozitive identice cu acelea ale soluției optime a problemei* II′ *ce se obține din* II *prin excluderea liniilor* $A_{j_q}$ *pentru care* $\bar{y}_{j_q} = 0$ *din* **A** *și a componentelor respective* $b_{j_q}$ *din* $B$ *și* $y_{j_q}$ *din* $Y$. *Orice soluție optimă a problemei primale va fi și o soluție optimă a problemei* I* *ce se obține din* I *prin excluderea inegalităților* $(e_{j_q})$ *pentru care* $\bar{y}_{j_q} = 0$ *din sistemul de restricții* (2), *și invers, orice soluție optimă a problemei* I* *va fi și o soluție optimă a problemei* I.

Pentru a demonstra acest corolar, este suficient să transformăm problema II într-o problemă primală, schimbînd semnul tuturor coeficienților. Obținem problema :

Să se minimizeze expresia

$$-YB,$$

vectorul $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ fiind supus condițiilor

$$-YA \geqq -C,$$
$$Y \geq 0.$$

Aplicînd la această problemă teorema noastră, obținem corolarul de mai sus.

Bineînțeles, pentru cazul particular cînd sistemul de inegalități dominat se reduce la o singură inegalitate, este valabilă o observație analogă cu cea făcută la teoremă.

Teorema și corolarul se referă la probleme de programare liniară cu restricții sub formă de inegalități. În cazul cînd restricțiile, sau o parte din ele, sînt date sub formă de ecuații, acestea trebuie transformate în inegalități, în conformitate cu sensul economic al relațiilor pe care le exprimă. Cînd o anumită ecuație exprimă o relație de mărginire inferioară (un anumit rezultat trebuie să atingă o margine inferioară dată), ea se va transforma într-o inegalitate de tipul $\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i$. Cînd ecuația exprimă o relație de mărginire superioară (utilizarea anumitor resurse nu poate depăși o margine superioară dată), ea se va transforma într-o inegalitate de tipul $\sum_j a_{ij} x_j \leqq b_i$, care se va scrie sub forma $-\sum_j a_{ij} x_j \geqq -b_i$. Numai în cazurile cînd sensul economic al ecuației este o relație de proporționalitate ce trebuie respectată întocmai, ea se va înlocui cu perechea de inegalități :

$$\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i,$$
$$-\sum_j a_{ij} x_j \geqq -b_i.$$

Observăm că existența unei relații de dominație între două combinații liniare pozitive de vectori $P_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$ și $P_{j_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ cere ca pentru orice ecuație $(e_v)$ care se transformă în *două* inegalități, să avem :

$$\sum_{s=1}^{r} k_s a_{vi_s} = \sum_{q=1}^{p} h_q a_{vj_q}.$$

## § 4. EXEMPLU

Să considerăm următoarea problemă de programare liniară (A) :

Să se minimizeze expresia :

$$7x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 - 6x_5 + 8x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 2x_9 - 11x_{10},$$

necunoscutele $x_1, \ldots, x_{10}$ fiind supuse următoarelor restricții:

$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 - 2{,}5x_3 - x_4 + x_6 + x_{10} &\geqq -100,\\
-0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}2x_6 - x_7 - x_8 - 0{,}8x_{10} &\geqq 20,\\
1{,}2x_1 - x_9 &= 0,\\
x_2 + x_3 - x_5 - 1{,}5x_6 + 0{,}8x_7 + 0{,}5x_9 - x_{10} &\geqq 40,\\
-0{,}9x_2 - 0{,}5x_6 + 0{,}6x_8 &\geqq 10,\\
-0{,}3x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}5x_8 + 0{,}3x_9 &\geqq -30.
\end{aligned}$$

Avem următoarea matrice formată din vectorii-coloană $P_1, \ldots, P_{10}$:

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | $P_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −7 | −10 | −9 | −4 | 6 | −8 | −4 | −5 | −2 | 11 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| −1 | −2 | −2,5 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| −0,5 | 0,2 | 1,2 | 0,8 | 0 | 0,2 | −1 | −1 | 0 | −0,8 |
| 1,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | −1 | −1,5 | 0,8 | 0 | 0,5 | −1 |
| 0 | −0,9 | 0 | 0 | 0 | −0,5 | 0 | 0,6 | 0 | 0 |
| −0,3 | 0 | 0,5 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | −0,5 | 0,3 | 0 |

Pe baza teoremei noastre se pot stabili următoarele relații de dominație:

a) $P_4 + P_{10} \geqq P_5$,

deci vectorul $P_5$, respectiv variabila $x_5$ se poate exclude.

b) $\frac{1}{2} P_3 + \frac{5}{8} P_7 \geqq \frac{5}{3} P_1 + 2 P_9$,

deci ori variabila $x_1$, ori variabila $x_9$ nu va apărea în soluția optimă cu valori pozitive. Dar ajunge să aruncăm o privire asupra ecuației a treia

pentru a ne convinge că dacă una din aceste variabile este nulă și cealaltă trebuie să fie nulă; altfel ecuația nu poate fi satisfăcută. În consecință se elimină atît $x_1$ (respectiv $P_1$), cît și $x_9$ ($P_9$).

$$c)\ \frac{1}{2}P_3 + \frac{5}{8}P_7 \geqq P_2 + \frac{3}{2}P_8,$$

așadar una din variabilele $x_2$ și $x_8$ nu va apărea cu valori pozitive în soluția optimă. Examinînd inegalitatea $(e_5)$, observăm că ea nu poate fi satisfăcută dacă se exclude variabila $x_8$, aceasta fiind singura cu coeficient pozitiv în inegalitatea respectivă. În consecință, vom exclude variabila $x_2$ (respectiv vectorul $P_2$).

Au rămas deci variabilele $x_3$, $x_4$, $x_6$, $x_7$, $x_8$, $x_{10}$.

Pentru a examina acum relațiile de dominație între inegalități vom scrie matricea formată din vectorii-linie corespunzători variabilelor rămase, cu semnul schimbat, și completată cu coloana termenilor liberi ai inegalităților:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(e_1)$ | 2,5 | 1 | −1 | 0 | 0 | −1 | −100 |
| $(e_2)$ | −1,2 | −0,8 | −0,2 | 1 | 1 | 0,8 | 20 |
| $(e_4)$ | −1 | 0 | 1,5 | −0,8 | 0 | 1 | 40 |
| $(e_5)$ | 0 | 0 | 0,5 | 0 | −0,6 | 0 | 10 |
| $(e_6)$ | −0,5 | −0,2 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | −30 |

Observăm că ecuația a treia a dispărut, dat fiind că au dispărut vectorii care aveau coeficienți nenuli în ea. Pentru inegalitățile rămase, avem relația de dominație

$$\frac{1}{4}(e_1) + \frac{1}{2}(e_2) + \frac{1}{2}(e_4) \geqq (e_6),$$

care face posibilă excluderea inegalității $(e_6)$.

Am redus deci problema inițială (A), cu 6 restricții și 10 variabile, la următoarea problemă (B), cu 4 restricții și 6 variabile:

Să se minimizeze expresia:

$$9x_3 + 4x_4 + 8x_6 + 4x_7 + 5x_8 - 11\ x_{10},$$

variabilele fiind supuse condițiilor:

$$\begin{aligned} -2{,}5x_3 - x_4 + x_6 + x_{10} &\geqq -100 \\ 1{,}2x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}2x_6 - x_7 - x_8 - 0{,}8x_{10} &\geqq 20 \\ x_3 - 1{,}5x_6 + 0{,}8x_7 - x_{10} &\geqq 40 \\ -0{,}5x_6 + 0{,}6x_8 &\geqq 10 \end{aligned}$$

Conform teoremei și corolarului, orice soluție optimă a problemei reduse (B), completată cu valori nule pentru variabilele care au fost excluse, este o soluție optimă a problemei inițiale (A).

Primită la redacție la 10 martie 1962

## ОТНОШЕНИЯ ДОМИНИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ


### РЕЗЮМЕ

Отношением (7), соотв. (10), определяется для задач линейного программирования понятие доминирования, более общее, чем аналогичное понятие теории игр. Доказана теорема, устанавливающая достаточные условия для указания переменных, которые не могут иметь положительных значений в оптимальном решении задачи линейного программирования. Следствие из этой теоремы устанавливает достаточные условия для указания неравенств, которые не влияют на решение задачи, так как удовлетворяются всеми решениями, удовлетворяющими остальным неравенствам. Таким образом, становится возможным исключение с самого начала части переменных, соответственно неравенств.


## DOMINATION RELATIONS IN PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING


### ABSTRACT

Relations (7) and (10) define for linear programming problems a concept of domination, more general than the similar concept in the theory of games. The theorem stated in the article establishes conditions sufficient to exclude for certain variables the possibility of taking positive values in the optimal solution of a linear programming problem. The corollary to the theorem establishes conditions sufficient to exclude for certain restraints the possibility of influencing the solutions of the problem, these restraints being satisfied by any solution for which the rest of the system holds. Thus it becomes possible to exclude from the beginning, part of the variables and (or) of the restraints.


### BIBLIOGRAFIE


1. E. BALAS, L. P. HAMMER (P. IVĂNESCU), *Optimizarea planului de dezvoltare a unei ramuri de producție*. Probleme de automatizare, **III** (1960).
2. . * . *Linear Inequalities and Related Systems* (ed. H. W. Kuhn & A. W. Tucker). Princeton, 1956.
3. J. C. C. MC KINSEY, *Introduction to the Theory of Games*. New York, 1952.


ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1863

## LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,25 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcții aproape periodice**, 191 p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 223 p., 8,85 lei.

O. ONICESCU, **Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.

DRAGOȘ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 180 p., 7,85 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie — Iași, 2—5 iunie, 1958**, 264 p., 9,75 lei.

Din

**STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE**

au apărut :

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei) ;
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei) ;
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei) ;
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei) ;
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei) ;
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei) ;
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble : nr. 1—2, 5 lei ; nr. 3—4, 8 lei) ;
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei) ;
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei) ;
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei) ;
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei) ;
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei) ;
anul XIII, 1962, primele 2 n-re (nr. 1, 10 lei ; nr. 2, 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare la

LIBRĂRIA ACADEMIEI R.P.R.

Bucureşti, Calea Victoriei nr. 27,
sau la orice librărie ştiinţifică din ţară.

Se pot comanda şi prin poştă la secţia „Cartea prin poştă"
de pe lîngă Librăria Academiei R.P.R., sau la librăria

CARTEA PRIN POŞTĂ

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerţ exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. 2 — c. 2035

**Lei 7.—**

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

4

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XIII, nr. 4 1962

## SUMAR

Pag.

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Funcţii continue fără derivată . . . . . 527

SOLOMON MARCUS, Aspectul logic al opoziţiilor lingvistice. II. Opoziţii ordonate, paradigme, morfeme şi cvasimorfeme . . . . . 539

CONSTANTIN P. POPOVICI, Utilizarea grafurilor pentru obţinerea schemei cu un număr minim de relee . . . . . 553

MARIUS I. STOKA, Asupra subgrupurilor grupului de mişcări al unui spaţiu riemannian $V_3$ cu curbura constantă negativă . . . . . 565

SILVIU GUIAŞU, Operatorul perturbaţie în transmiterea informaţiei . . . . 583

V. BOŢOACĂ, Comportarea asimptotică a soluţiilor unor ecuaţii cu diferenţe finite . . . . . 599

RADU IORDĂNESCU, Structura grupului simplu excepţional $G_2$ . . . . . 627

SORIN GOGONEA, Asupra extinderii metodei aproximative a lui Ciaplîghin la mişcările subsonice cu circulaţie . . . . . 643

ION D. ION, Asupra unei clase de relaţii de echivalenţă bistabile ale unui semigrup . . . . . 653

*RECENZII* . . . . . 661

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XIII, n° 4 1962

## SOMMAIRE

Page

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Fonctions continues sans dérivée . . . . . 527

SOLOMON MARCUS, Aspect logique des oppositions linguistiques. II. Oppositions ordonnées, paradigmes, morphèmes et quasi-morphèmes . . . . . 539

CONSTANTIN P. POPOVICI, Utilisation des graphes pour obtenir le schéma à nombre minimum de relais . . . . . 553

MARIUS I. STOKA, Au sujet des sous-groupes du groupe de mouvements d'un espace riemannien $V_3$ à courbure constante négative . . . . . 565

SILVIU GUIAŞU, L'opérateur perturbation dans la transmission de l'information . . . . . 583

V. BOŢOACĂ, Sur le comportement asymptotique des solutions de quelques équations aux différences finies . . . . . 599

RADU IORDĂNESCU, Structure du groupe simple exceptionnel $G_2$ . . . . . 627

SORIN GOGONEA, Sur l'extension de la méthode approximative de Tchaplyguine aux mouvements sous-soniques à circulation . . . . . 643

ION D. ION, Sur une classe de relations d'équivalence régulières définies sur un demi-groupe . . . . . 653

*COMPTES RENDUS* . . . . . 661

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XIII, № 4 1962

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, Непрерывные функции без производной . . 527

СОЛОМОН МАРКУС, Логический аспект лингвистических оппозиций. II. Упорядоченные оппозиции, парадигмы, морфемы и квазиморфемы . . . . . 539

КОНСТАНТИН П. ПОПОВИЧ, Применение графов для получения схемы с минимальным числом реле . . . . . 553

МАРИУС И. СТОКА, О подгруппах группы движений риманового пространства $V_3$ с постоянной отрицательной кривизной . . . . 565

СИЛЬВИУ ГУЯШУ, Оператор возмущения в передаче информации . . . 583

В. БОЦОАКЭ, Асимптотическое поведение решений некоторых конечно-разностных уравнений . . . . . 599

РАДУ ИОРДЭНЕСКУ, Структура простой исключительной группы $G_2$ . 627

СОРИН ГОГОНЯ, Об обобщении приближенного метода Чаплыгина на дозвуковые движения с циркуляцией . . . . . 643

ИОН Д. ИОН, О классе двусторонне стабильных эквивалентностей, определенных на полугруппе . . . . . 653

*РЕЦЕНЗИИ* . . . . . 661

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# FUNCȚII CONTINUE FĂRĂ DERIVATĂ

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

În nota de față ne propunem să construim clase de funcții continue fără derivată, fiecare clasă fiind consemnată într-o teoremă. Vom da mai întîi cîteva elemente ce vor interveni în enunț. Fie $\mathfrak{M}$ o mulțime de puncte, peste tot densă pe intervalul $[0,1]$, $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ submulțimi finite ale lui $\mathfrak{M}$ astfel că $0$ și $1 \in M_1$ și

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots, \tag{1}$$

$$\bigcup M_k = \mathfrak{M}, \tag{2}$$

și pentru orice $\xi_k', \xi_k'' \in \bigcup_1^k M_k$

$$|\xi_k' - \xi_k''| \geqslant \alpha^k, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

Enunțăm acum

TEOREMA 1. *Fie*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

*un șir de funcții continue pe intervalul* $[0,1]$ *care îndeplinesc următoarele condiții*:

$a_1$) *pentru orice* $x \in [0,1]$ *și orice* $k = 1, 2, \ldots$

$$|f_k(x)| < A\alpha^k, \qquad A > 0, \qquad 0 < \alpha < 1;$$

$b_1$) *fiecare funcție* $f_k(x)$ *este derivabilă pe* $[0,1]$ *în afară de o mulțime finită de puncte* $M_k$ *care îndeplinește numai condiția* (2) *și*

$$\beta < |f_k'(x)| < \beta\gamma_k, \qquad \beta > 0, \ \gamma_k \geqslant 1$$

*cu*

$$\sum_1^\infty (\gamma_k - 1) = \gamma < 1$$

*(dacă în $x$, $f_k'$ nu este definită se va considera derivata la dreapta cît şi derivata la stînga).*

*În aceste situaţii, funcţia $f(x)$ definită pe $[0,1]$ ca suma seriei*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{4}$$

*este continuă pe $[0,1]$ însă nu este derivabilă în nici un punct al intervalului $[0,1]$ dacă*

$c_1$) $$\beta > \frac{8A}{(1-\gamma)(1-\alpha)}.$$

Demonstraţie. Funcţia $f(x)$ definită de (4) este continuă pe $[0,1]$ deoarece seria care o reprezintă este uniform convergentă pe $[0,1]$. În adevăr, conform condiţiei $a_1$

$$|f_k(x)| < A(\alpha + \alpha^2 + \ldots)$$

iar seria din partea a doua este convergentă deoarece $0 < \alpha < 1$.

Fie acum $x_0 \in [0,1]$ şi $x'$, $x''$ două puncte date de

$$x' = x_0 \pm h_m, \qquad x'' = x_0 \pm h_{m+1}$$

cu

$$\frac{1}{2}\alpha^{m+1} < h_m < \frac{1}{2}\alpha^m, \qquad \frac{1}{2}\alpha^{m+2} < h_{m+1} < \frac{1}{2}\alpha^{m+1}$$

(se ia plus sau minus astfel ca $x'$ să fie punct de definiţie pentru $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, iar $x''$ punct de definiţie pentru $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m+1$).

Avem

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} - \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = S_m + R_m, \tag{5}$$

cu

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{f_k(x') - f_k(x_0)}{x' - x_0} - \frac{f_k(x'') - f_k(x_0)}{x'' - x_0} \right] - \frac{f_{m+1}(x'') - f_{m+1}(x_0)}{x'' - x_0}$$

şi

$$R_m = \frac{f_{m+1}(x') - f_{m+1}(x_0)}{x' - x_0} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \left[ \frac{f_k(x') - f_k(x_0)}{x' - x_0} - \frac{f_k(x'') - f_k(x_0)}{x'' - x_0} \right];$$

conform condiţiei $a_1$

$$|R_m| < \frac{2A}{|h_m|}\alpha^{m+1}(1 + \alpha + \alpha^2 \ldots) + \frac{2A}{|h_{m+1}|}\alpha^{m+2}(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots)$$

deci

$$|R_m| < \frac{8A}{1-\alpha}.$$

Cît privește pe $S_m$ observăm că

$$\left|\frac{f_{m+1}(x'') - f_{m+1}(x_0)}{h_{m+1}}\right| > \beta$$

iar

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{f_k(x') - f_k(x_0)}{x' - x_0} - \frac{f_k(x'') - f_k(x_0)}{x'' - x_0}\right)\right| < \beta\sum_{k=1}^{m}(\gamma_k - 1),$$

deci

$$|S_m| > \beta - \beta\gamma = \beta(1-\gamma),$$

prin urmare

$$\left|\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} - \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}\right| > \beta(1-\gamma) - \frac{8A}{1-\alpha},$$

iar dacă condiția $c_1$ este îndeplinită

$$\beta > \frac{8A}{(1-\alpha)(1-\gamma)}.$$

Urmează că funcția $f(x)$ nu este derivabilă în nici un punct al intervalului [0,1], deoarece diferența (5) rămîne superioară unui număr fix, oricare ar fi $m$.

Condiția $\gamma < 1$ poate fi înlăturată deoarece convergența seriei

$$\sum_{1}^{\infty}(\gamma_k - 1)$$

este suficientă. Este necesar în această situație ca să înlăturăm din seria (3), care dă pe $f(x)$, un număr suficient de termeni pentru ca

$$\sum_{p}^{\infty}(\gamma_k - 1) < 1.$$

TEOREMA 2. *Fie*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

*un șir de funcții continue pe intervalul* [0,1] *care îndeplinesc următoarele condiții*:

$a_2$) *pentru orice* $x \in [0,1]$ *și orice* $k = 1, 2, \ldots$

$$|f_k(x)| < A\alpha^k, \qquad A > 0,\ 0 < \alpha < 1;$$

$b_2$) *fiecare funcție* $f_k(x)$ *este derivabilă pe* [0,1] *în afară de o mulțime finită* $M_k$, *care îndeplinește condițiile* (1) *și* (2), *și*

$$\beta < |f_k'(x)| < \beta\gamma_k,$$

*cu*

$$\beta > 0,\ \gamma_k > 1$$

*și*

$$\sum_{1}^{\infty} (\gamma_k - 1) = \gamma < 1$$

*(dacă în $x$, $f'_k$ nu este definită se va considera derivata la dreapta cît și derivata la stînga);*

$c_2$) *pentru orice $\xi'_k$, $\xi''_k \in M_k$ și orice $p \geqslant 1$ și întreg*

$$f_{k+p}(\xi'_k) = f_{k+p}(\xi''_k), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

*În aceste situații, funcția $f(x)$ definită ca suma seriei*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{6}$$

*este continuă pe $[0,1]$ însă nu este derivabilă în nici un punct al intervalului $[0,1]$.*

Demonstrație. Din cauza condiției $a_2$ funcția $f(x)$ dată de (6) este o funcție continuă pe $[0,1]$.

Reuniunea mulțimilor $M_k$ formînd o mulțime densă pe intervalul $[0,1]$, pentru orice punct $x_0 \in [0,1]$ putem găsi două șiruri

$$x'_1, \; x'_2, \ldots, \; x'_n, \ldots$$

$$x''_1, \; x''_2, \ldots, \; x''_n, \ldots$$

cu $x'_n$, $x''_n \in M_n$, convergente către $x_0$, încît pentru orice $x \in [x'_n, \; x''_n]$, $f'_n(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt definite.

Avem

$$\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f(x'_{n+1}) - f(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{f_k(x'_n) - f_k(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f_k(x'_{n+1}) - f_k(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} \right);$$

însă, conform condiției $c_2$ obținem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x'_n) - f_k(x''_n)}{x'_n - x''_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x'_n) - f_k(x''_n)}{x'_n - x''_n}$$

și

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x'_{n+1}) - f(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k(x'_{n+1}) - f_k(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}}.$$

Avem deci

$$\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f(x'_{n+1}) - f(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} = \frac{f_{n+1}(x'_{n+1}) - f_{n+1}(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{f_k(x'_n) - f_k(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f_k(x'_{n+1}) - f_k(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} \right);$$

însă conform condiției $b_2$

$$\left| \frac{f_{n+1}(x'_{n+1}) - f_{n+1}(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} \right| > \beta$$

și tot astfel conform aceleiași condiții avem și

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f_k(x'_n) - f_k(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f_k(x'_{n+1}) - f_k(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} \right| < \beta\gamma$$

de unde rezultă imediat că

$$\left| \frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} - \frac{f(x'_{n+1}) - f(x''_{n+1})}{x'_{n+1} - x''_{n+1}} \right| > \beta(1 - \gamma)$$

și dacă $\gamma < 1$ funcția $f(x)$ definită ca suma seriei (6) nu este derivabilă în nici un punct $x \in [0,1]$. Se observă că în această teoremă nu se cere nici o legătură între $\alpha$, $\beta$ și $\gamma$.

TEOREMA 3. *Fie $g(x)$ o funcție definită pe $[0,\infty)$ care îndeplinește următoarele condiții :*

$a_3$) $\qquad |g(x)| < A, \qquad x \in [0,\infty).$

*Derivata $g'(x)$ există pentru orice $x \in [0,\infty)$ și*

$b_3$) $\qquad |g'(x)| < \alpha$

*cu $g'(x) = 0$ pentru o mulțime discretă de puncte $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ astfel ca*

$$\xi_{i+1} - \xi_i = l, \qquad \xi_1 = 0$$

*și*

$$g'(\xi_i + \varepsilon)\, g'(\xi_i - \varepsilon) < 0;$$

$c_3$) $g(\xi_i) - g(\xi_{i+2p+1}) > \beta, \quad \beta > 0, \quad (g'(\xi - \varepsilon) > 0), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$

*În aceste condiții, funcția $G(x)$ definită pe $[0,\infty)$ ca suma seriei*

$$G(x) = g_0(x) + bg_1(x) + \ldots + b^n g_n(x) + \ldots, \quad 0 < b < 1, \qquad (7)$$

*unde*

$$g_n(x) = g(a^n x), \qquad a = \text{natural impar},$$

*este continuă pe $[0,\infty)$ însă nu este derivabilă în nici un punct $x \in [0,\infty)$ dacă*

d) $\qquad ab > 1 + \dfrac{\alpha l}{\beta}.$

Demonstrație. Din enunț rezultă că funcțiile $g_n(x)$ au următoarele proprietăți :

$a'_3$) $\quad |g_n(x)| < A,$

$b'_3$) $\quad |g'_n(x)| < a^n \alpha.$

Dacă notăm cu $E_n$ mulțimea punctelor $\xi_{i,n}$ pentru care $g_n'(\xi_{i,n}) = 0$, cu $g_n'(\xi_{i,n} - \varepsilon)\, g_n'(\xi_{i,n} + \varepsilon) < 0$, atunci

$$\xi_{i+1,n} - \xi_{i,n} = \frac{l}{a^n}, \quad \xi_{i+1,n},\ \xi_{i,n} \in E_n,$$

iar dacă considerăm reuniunea

$$\mathcal{E} = \bigcup_1^\infty E_k$$

mulțimea $\mathcal{E}$ este peste tot densă pe semiaxa $[0,\infty)$.

Să observăm că dacă

$$g_n'(\xi - 0) < 0 \qquad (\text{sau} > 0),\ \xi \in E_n$$
$$g_n'(\xi + 0) > 0 \qquad (\text{sau} < 0)$$

atunci și

$$g_{n+k}'(\xi - \varepsilon) < 0 \qquad (\text{sau} > 0),$$
$$g_{n+k}'(\xi + 0) > 0 \qquad (\text{sau} < 0), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iar

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$$

În sfîrșit, proprietatea $c_3$ se păstrează:

$c_3'$) $\quad g_n(\xi_{i,n}) - g(\xi_{i+2p+1,n}) > \beta, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$

Fie acum un punct $x_0 \in [0,\infty)$ și

$$\xi_0', \xi_1', \ldots, \xi_n', \ldots$$
$$\xi_0'', \xi_1'' \ldots, \xi_n'', \ldots \qquad (\xi_n', \xi_n'' \in E_n \text{ și consecutive})$$

două șiruri convergente către $x_0$. Să formăm diferența

$$\frac{G(\xi_n') - G(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''} = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{g_k(\xi_n') - g_k(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''} = S_n + R_n,$$

$$S_n = \sum_0^{n-1} b^k \frac{g_k(\xi_n') - g_k(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''};$$

aplicînd formula mediei și ținînd seamă de $b'_3$

$$|S_n| < \alpha \sum_0^{n-1} a^k b^k = \alpha \frac{b^n a^n - 1}{ab - 1}$$

și pentru că $ab > 1$ obținem

$$|S_n| < \frac{b^n a^n \alpha}{ab - 1}; \qquad (8)$$

pentru

$$R_n = \sum_n^{\infty} b^k \frac{g_k(\xi_n') - g_k(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''}$$

din cauză că $\xi_n'$, $\xi_n''$ sînt puncte (consecutive) de extremum pentru $g_n(x)$ vom avea conform condiției d :

$$-\beta > g_n(\xi_n') - g_n(\xi_n'') > +\beta,$$

luîndu-se + sau − după cum $\xi_n'$ este un punct de maxim sau minim. Aceeași inegalitate avem și pentru $g_{n+k}(x)$ :

$$-\beta > g_{n+k}(\xi_n') - g_{n+k}(\xi_n'') > +\beta$$

deci

$$|R_n| = \frac{\beta}{|\xi_n' - \xi_n''|}(b^n + b^{n+1} + \dots)$$

sau

$$|R_n| > \frac{\beta a^n b^n}{l}, \tag{9}$$

încît combinînd pe (6) și (7) obținem

$$\left|\frac{G(\xi_n') - G(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''}\right| > a^n b^n \left(\frac{\beta}{l} - \frac{\alpha}{ab-1}\right)$$

și dacă

$$ab > 1 + \frac{\alpha l}{\beta},$$

atunci funcția $G(x)$ continuă pe $[0,\infty)$ nu este derivabilă în nici un punct $x \in [0,\infty)$.

TEOREMA 4. *Fie*

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$$

*un șir de funcții mărginite, continue și derivabile pe* $[0,1]$ *care îndeplinesc următoarele condiții* :

$a_4$) $$|f_k'(x)| < \frac{B}{\alpha^k}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad B > 0,$$

*iar*

$$f_k'(\xi) = 0, \quad f_k'(\xi - \varepsilon) f'(\xi + \varepsilon) < 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ cu } \xi \in M_k,$$

*mulțimile finite* $M_k$ *îndeplinind condițiile* (1), (2) *și* (3) ;

$b_4$) $$\pm [f_{k+p}(\xi_k) - f_{k+p}(\xi_{k+1})] > +A, \quad A > 0,$$

*cu*

$$\xi_k, \xi_{k+1} \in M_k \quad \text{și} \quad (\xi_k, \xi_{k+1}) \cap M_k = \emptyset$$

(*în* $b_4$ *se ia plus sau minus după cum diferența este pozitivă sau negativă*).

*În aceste situații, funcția* $f(x)$ *definită pe* $[0,1]$ *de*

$$f(x) = f_0(x) + \beta f_1(x) + \ldots + \beta^n f_n(x) + \ldots, \quad 0 < \beta < 1 \qquad (10)$$

*este continuă pe* $[0,1]$ *însă nu este derivabilă în nici un punct* $x \in [0,1]$ *dacă*

$c_4)$ $$\frac{\beta}{\alpha} > 1 + \frac{B}{A}.$$

Demonstrație. Funcția $f(x)$ definită de (1) este continuă deoarece este suma unei serii uniform convergente în $[0,1]$. Fie acum $x_0 \in [0,1]$ și

$$\xi_0', \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n', \ldots$$

$$\xi_0'', \xi_1'', \xi_2'', \ldots, \xi_n'', \ldots$$

două șiruri convergente către $x_0$ cu $\xi_n', \xi_n'' \in M_n$ și $M_n \cap (\xi_n', \xi_n'') = \emptyset$.

Punem

$$\frac{f(\xi_n') - f(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''} = S_n + R_n,$$

cu

$$S_n = \frac{1}{\xi_n' - \xi_n''} \sum_0^{n-1} \beta^k [f_k(\xi_n') - f_k(\xi_n'')]$$

încît

$$|S_n| < B\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\right) = B\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} < B\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\frac{\beta}{\alpha} - 1}.$$

Pentru $R_n$ avem

$$R_n = \frac{1}{\xi_n' - \xi_n''} \sum_n^{\infty} \beta^k [f_k(\xi_n') - f_k(\xi_n'')],$$

deci

$$|R_n| > \frac{A}{|\xi_n' - \xi_n''|} [\beta^n + \beta^{n+1} + \ldots]$$

sau

$$|R_n| > A\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n,$$

de unde rezultă imediat că

$$\left|\frac{f(\xi_n') - f(\xi_n'')}{\xi_n' - \xi_n''}\right| > \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left[A - \frac{\alpha B}{\beta - \alpha}\right],$$

deci dacă

$$\frac{\beta}{\alpha} > 1 + \frac{B}{A}$$

atunci $f(x)$ definită de (10) nu este derivabilă în nici un punct al intervalului $[0,1]$.

Clasele de funcții fără derivată definite de teoremele 1 și 2 conțin exemplele lui Van der Waerden [3] și G. de Rham [2], iar teorema 3 sau 4 conține exemplul lui Weierstrass [1]. Deoarece în exemplul lui Weierstrass funcțiile ce intervin în seria lui $f(x)$ sînt derivabile în fiecare punct al domeniului de definiție, pe cînd în celelalte exemple nu, s-ar părea că nu putem găsi o clasă generală de funcții care să conțină atît exemplele lui Van der Waerden și G. de Rham cît și exemplul lui Weierstrass. Teorema următoare, obținută din teorema 4 printr-o modificare simplă a enunțului, realizează acest fapt.

TEOREMA 5. *Fie*

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

*un șir de funcții mărginite și continue pe* $[0,1]$ *care îndeplinesc următoarele condiții*:

$$a_5) \qquad |f_k'(x)| < \frac{B}{\alpha^k}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad B > 0,$$

*graficul funcției* $f_k(x)$ *este format dintr-un număr finit de arce strict monotone, iar punctele în care derivata schimbă de semn formează o mulțime finită* $M_k$ *care îndeplinește condițiile* (1), (2) *și* (3) (*în* $a_5$ *dacă în* $x$, $f_k'$ *nu este definită se ia derivata la dreapta cît și derivata la stînga*);

$$b_5) \qquad \pm [f_{k+p}(\xi_k) - f_{k+p}(\xi_{k+1})] > +A, \quad A > 0,$$

*cu*

$$\xi_k, \xi_{k+1} \in M_k \quad \text{și} \quad (\xi_k, \xi_{k+1}) \cap M_k = \emptyset$$

(*în* $b_5$ *se ia plus sau minus după cum diferența este pozitivă sau negativă*).

*În aceste situații, funcția* $f(x)$ *definită pe* $[0,1]$ *de*

$$f(x) = f_0(x) + \beta f_1(x) + \ldots + \beta^n f_n(x) + \ldots, \quad 0 < \beta < 1, \qquad (11)$$

*este continuă pe* $[0,1]$ *însă nu este derivabilă în nici un punct* $x \in [0,1]$ *dacă*

$$c_5) \qquad \frac{\beta}{\alpha} > 1 + \frac{B}{A}.$$

În adevăr, dacă $\xi_k$ sînt puncte de existență pentru $f_k'(x)$ atunci $\xi_k$ sînt puncte de extremum și sîntem în cazul exemplului lui Weierstrass.

Dacă $f_k'(x)$ nu există în punctele $\xi_k$, sîntem în cazul claselor de funcții care generează exemplele lui Van der Waerden sau G. de Rham. Demonstrația teoremei 5 este aceeași cu demonstrația teoremei 4.

Primită la redacție la 30 martie 1962

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ БЕЗ ПРОИЗВОДНОЙ


## РЕЗЮМЕ

В настоящей заметке строится несколько классов непрерывных функций без производной, охватываемых пятью теоремами. Для примера приводим 5-ую теорему.

Пусть

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

последовательность ограниченных и непрерывных на сегменте [0,1] функций, удовлетворяющих следующим условиям

$$a) \qquad |f_k'(x)| < \frac{B}{\alpha^k}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad B > 0$$

(если в точке $x$, $f_k'$ не определена, рассматриваются левая и правая производные).

$$b) \quad \pm [f_{k+p}(\xi_k) - f_{k+p}(\xi_{k+1})] > A, \quad A > 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где $\xi_k, \xi_{k+1} \in M_k$, $(\xi_k, \xi_{k+1}) \cap M_k = \emptyset$, причем конечные множества $M_k$ удовлетворяют условиям 1, 2 и 3. Производные $f_k'(x)$ могут не существовать только в точках $\xi_k \in M_k$. (В $b$ берется знак + или — смотря по тому, положительна или отрицательна разность, а знак не зависит от $p$).

В этих условиях функция $f(x)$, определенная на [0,1] выражением:

$$f(x) = f_0(x) + \beta f_1(x) + \ldots + \beta^n f_n(x) + \ldots \quad 0 < \beta < 1,$$

непрерывна на [0,1], но не дифференцируема ни в одной точке $x \in [0,1]$, если

$$c) \qquad \frac{\beta}{\alpha} > 1 + \frac{B}{A}.$$


# FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉE


## RÉSUMÉ

L'auteur a construit dans cette note plusieures classes de fonctions continues sans dérivée, comprises en 5 théorèmes. Voici, à titre d'exemple, le cinquième théorème.

Soit

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

une suite de fonctions bornées et continues sur l'intervalle [0,1], qui remplissent les conditions suivantes :

$$a) \qquad |f_k'(x)| < \frac{\beta}{\alpha^k}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad B > 0$$

(si $f_k'$ n'est pas définie en $x$, on prend la dérivée à droite et la dérivée à gauche).

$$b) \quad \pm [f_{k+p}(\xi_k) - f_{k+p}(\xi_{k+1})] > A, \quad A > 0, \quad p = 0, 1, \ldots$$

avec $\xi_k$, $\xi_{k+1} \in M_k$, $(\xi_k, \xi_{k+1}) \cap M_k = \emptyset$, les ensembles finis $M_k$ remplissant les conditions 1, 2 et 3. Les dérivées $f_k'(x)$ n'existent pas dans les points $\xi_k \in M_k$ (dans $b$ on prend $+$ ou $-$ selon que la différence est positive ou négative, le signe étant indépendant de $p$).

Dans ces situations, la fonction $f(x)$, définie sur [0,1] par

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \quad 0 < \beta < 1,$$

est continue sur [0,1], mais elle n'est dérivable en aucun point $x \in [0,1]$ si

$$c) \qquad \frac{\beta}{\alpha} > 1 + \frac{B}{A}.$$

## BIBLIOGRAFIE

1. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*. I. Paris, 1933.
2. MIRON NICOLESCU, *Analiză matematică*. I. Ed. tehnică, București, 1957.
3. CAIUS IACOB, *Curs de matematici superioare*. Ed. tehnică, București, 1957.

# ASPECTUL LOGIC AL OPOZIȚIILOR LINGVISTICE

## II. OPOZIȚII ORDONATE, PARADIGME, MORFEME ȘI CVASIMORFEME

DE

SOLOMON MARCUS

### 1. INTRODUCERE

Teoria opozițiilor lingvistice, dezvoltată de Trubetzkoy și Cantineau, privește opozițiile între mulțimi de elemente lingvistice. O astfel de teorie este adecvată pentru a studia, de exemplu, opozițiile între foneme, concepute ca mulțimi de trăsături diferențiale, sau opozițiile între mulțimi de morfeme în sensul lui Hjelmslev. Dar dacă vrem să studiem opoziția între cuvinte, concepute ca mulțimi de sunete generale (în sensul din [24] sau [25]), obținem: cuvintele UN și NU sînt în opoziție zero, căci fiecare din ele revine la mulțimea {U, N}. În mod intuitiv, nu putem accepta aceasta, dar teoria opozițiilor lingvistice n-a tras încă explicit consecința care se impune: necesitatea de a defini exact și de a studia opozițiile între mulțimi *ordonate* de elemente lingvistice. În [16] am studiat aspectul logic al opozițiilor între mulțimi neordonate; acum ne ocupăm, fără a intra în multe amănunte, de opozițiile între mulțimi ordonate. Cu ajutorul acestui studiu obținem un model logic al noțiunii de *paradigmă* și, pe baza acesteia, obținem noțiunea de *morfem*.

### 2. LANȚURI ȘI OPOZIȚII ORDONATE

Fie $E$ o mulțime de elemente de natură nespecificată. Orice șir finit de elemente ale lui $E$ (un același element putînd apărea de mai multe ori în șir) va fi numit un *lanț*. Considerăm de asemenea lanțul vid, care nu conține nici un element. Dacă $x, y, z, \ldots$ sînt elemente ale lui $E$, atunci $xyz$, $xyx$, $yxx$, $zzz$ sînt lanțuri diferite două cîte două. Există lanțuri care diferă prin natura însăși a elementelor (astfel sînt, de exemplu, $xyz$ și $yxx$) în timp ce altele diferă doar prin ordinea elementelor (de exemplu $xyx$ și $yxx$). Un lanț este deci o mulțime finită și ordonată de elemente ale lui $E$.

O submulțime $\beta$ a unui lanț $\alpha$ este un *sublanț* al lui $\alpha$ dacă elementele lui $\beta$ sînt considerate în ordinea lor din $\alpha$ și dacă două elemente ale lui $\beta$ sînt vecine în $\beta$ atunci și numai atunci cînd sînt vecine în $\alpha$. De exemplu, *xy* și *yz* sînt sublanțuri ale lui *xyz*, dar *xz* nu este un sublanț al lui *xyz*, deoarece *x* și *z* nu sînt vecini în *xyz*.

În fiecare lanț distingem *elementul inițial* și *elementul final* al lanțului. Un sublanț al lui $\alpha$ care are același element inițial ca și $\alpha$ se numește un *sublanț inițial* al lui $\alpha$; un sublanț al lui $\alpha$ care are același element final ca și $\alpha$ se numește un *sublanț final* al lui $\alpha$. Un sublanț care nu este nici inițial nici final se numește *un sublanț median*.

O *opoziție ordonată* este o pereche ordonată de lanțuri. Să considerăm două lanțuri $\lambda$ și $\mu$. Opoziția între $\lambda$ și $\mu$ va fi notată prin $(\lambda, \mu)$. Sublanțul inițial maximal, comun lui $\lambda$ și $\mu$, se numește *baza inițială* a opoziției $(\lambda, \mu)$. Pentru a specifica că se consideră opoziția $(\lambda, \mu)$ în raport cu baza sa inițială, vom spune că opoziția $(\lambda, \mu)$ este o *opoziție inițială* și vom scrie $(\lambda, \mu)_i$. Putem considera de asemenea opoziții finale. Sublanțul final maximal, comun lui $\lambda$ și $\mu$, se numește *baza finală* a opoziției $(\lambda, \mu)$. Pentru a specifica că se consideră opoziția $(\lambda, \mu)$ în raport cu baza sa finală, vom spune că opoziția $(\lambda, \mu)$ este o *opoziție finală* și vom scrie $(\lambda, \mu)_f$.

Putem considera de asemenea *opoziții mediane*, dar în cele ce urmează considerăm numai opoziții inițiale sau finale. Tratăm în mod explicit opozițiile inițiale; considerațiile se transpun, prin simetrie, la opoziții finale. Opozițiile ordonate finale sau inițiale vor fi desemnate prin *opoziții extremale*.

### 3. CLASIFICAREA OPOZIȚIILOR INIȚIALE

Definim o operație de compunere a lanțurilor. Fiind date două lanțuri $\lambda$ și $\mu$, operația de compunere conduce la lanțul $\lambda\mu$, obținut juxtapunînd lanțul $\mu$ la dreapta lui $\lambda$. Operația de compunere este asociativă, dar nu comutativă (este evident că putem defini această operație pentru un număr finit oarecare de lanțuri). Exemplu: dacă $\lambda = xyz$ și $\mu = acb$, atunci $\lambda\mu = xyzacb$.

Să considerăm o opoziție inițială $(\lambda, \mu)_i$ și fie $\nu$ baza inițială corespunzătoare. Există două lanțuri $\lambda'$ și $\mu'$, unic determinate, astfel încît $\lambda = \nu\lambda'$ și $\mu = \nu\mu'$. Lanțurile $\lambda'$ și $\mu'$ se numesc *sublanțurile diferențiale* ale opoziției $(\lambda, \mu)_i$.

Opoziția $(\lambda, \mu)_i$ se va numi *opoziție zero* dacă $\lambda = \mu$, adică dacă lanțurile diferențiale sînt vide.

Opoziția $(\lambda, \mu)_i$ se va numi *privativă la stînga* sau *privativă în favoarea lui* $\mu$ dacă $\lambda'$ este lanțul vid, în timp ce $\mu'$ nu este vid. Opoziția $(\lambda, \mu)_i$ se va numi *privativă la dreapta* sau *privativă în favoarea lui* $\lambda$ dacă

$\mu'$ este lanțul vid, în timp ce $\lambda'$ nu este vid. O opoziție $(\lambda, \mu)_i$ care este privativă la stînga sau la dreapta se numește *opoziție privativă*. Exemple: dacă $\lambda$ = PLAN, $\mu$ = PLANĂ, opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este privativă la stînga. Dacă $\lambda$ = PLANĂ, $\mu$ = PLAN, opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este privativă la dreapta.

Opoziția $(\lambda, \mu)_i$ se va numi *disjunctivă* dacă baza inițială corespunzătoare este lanțul vid. De exemplu, dacă $\lambda$ = город și $\mu$ = книга opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este disjunctivă; dacă $\lambda$ = до, $\mu$ = то, opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este de asemenea disjunctivă.

Opoziția $(\lambda, \mu)_i$ se va numi *echipolentă* dacă nu este nici zero, nici privativă, nici disjunctivă. De exemplu, dacă $\lambda$ = стола, $\mu$ = столу, opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este echipolentă, deoarece avem $\nu$ = стол, $\lambda'$ = А, $\mu'$ = У; dacă $\lambda$ = бумага, $\mu$ = быть, opoziția $(\lambda, \mu)_i$ este de asemenea echipolentă, deoarece avem $\nu$ = ', $\lambda'$ = умага, $\mu'$ = ыть.

## 4. RELAȚII ÎNTRE OPOZIȚIILE INIȚIALE

Două opoziții inițiale $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$ se vor spune *omogene* dacă au aceeași bază inițială, adică dacă desemnînd prin $\nu_1$ baza inițială a lui $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și prin $\nu_2$ baza inițială a lui $(\lambda_2, \mu_2)_i$, avem $\nu_1 = \nu_2$. De exemplu, dacă $\lambda_1$ = стол = $\lambda_2$, $\mu_1$ = стола, $\mu_2$ = столу, atunci avem $\nu_1$ = стол = $\nu_2$, deci opozițiile $(\lambda_1 \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sînt omogene.

Este ușor de văzut că relația de omogenitate între opoziții inițiale este o relație de echivalență. Este de asemenea ușor de demonstrat că, fiind date două opoziții omogene $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$, dacă $(\lambda_1, \mu_1)_i$ este disjunctivă, atunci $(\lambda_2, \mu_2)_i$ este de asemenea disjunctivă.

Dacă nu există nici o opoziție inițială care să fie omogenă cu opoziția $(\lambda, \mu)_i$, atunci vom spune că $(\lambda, \mu)_i$ este o opoziție *singulară*.

Două opoziții inițiale $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$ se vor numi *proporționale* dacă au aceleași sublanțuri diferențiale, adică dacă notînd prin $\lambda_1'$, $\mu_1'$ sublanțurile diferențiale ale lui $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și prin $\lambda_2'$, $\mu_2'$ sublanțurile diferențiale ale lui $(\lambda_2, \mu_2)_i$, avem $\lambda_1' = \lambda_2'$ și $\mu_1' = \mu_2'$. De exemplu, dacă $\lambda_1$ = дуг, $\lambda_2$ = луг, $\mu_1$ = дуга, $\mu_2$ = луга, atunci avem $\lambda_1' = \lambda_2'$ = lanțul vid, $\mu_1' = \mu_2'$ = А, deci $(\lambda_1 \mu_1)_i$ este proporțională cu $(\lambda_2, \mu_2)_i$.

Este ușor de văzut că relația de proporționalitate între opoziții inițiale este o relație de echivalență. Este de asemenea ușor de demonstrat că, fiind date două opoziții proporționale $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$, atunci: dacă $(\lambda_1, \mu_1)_i$ este o opoziție zero, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ este de asemenea o opoziție zero; dacă $(\lambda_1, \mu_1)_i$ este o opoziție privativă la stînga, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ este de asemenea privativă la stînga; dacă $(\lambda_1, \mu_1)_i$ este privativă la dreapta, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ este de asemenea privativă la dreapta; dacă $(\lambda_1, \mu_1)_i$ este echipolentă sau disjunctivă, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ este de asemenea echipolentă sau disjunctivă. Dar se poate întîmpla ca $(\lambda_1, \mu_1)_i$ să fie echipolentă fără ca $(\lambda_2, \mu_2)_i$ să fie echipolentă, sau ca $(\lambda_1, \mu_1)_i$ să fie disjunctivă fără ca $(\lambda_2, \mu_2)_i$ să fie disjunctivă. Demonstrațiile acestor fapte sînt asemănătoare demonstrațiilor date teoremelor corespunzătoare din [16].

## 5. OPOZIŢII FINALE

Să considerăm două lanţuri $\lambda$ şi $\mu$ şi fie $\omega$ sublanţul final maximal, comun lui $\lambda$ şi $\mu$. Considerată în raport cu $\omega$, opoziţia $(\lambda, \mu)$ va fi, prin definiţie, o *opoziţie finală* şi va fi notată prin $(\lambda, \mu)_f$. Lanţurile $\lambda''$ şi $\mu''$ — unic determinate — astfel încît $\lambda = \lambda''\omega$ şi $\mu = \mu''\omega$, sînt *sublanţurile diferenţiale* ale opoziţiei $(\lambda, \mu)_f$. Opoziţia $(\lambda, \mu)_f$ este: *zero*, dacă $\lambda = \mu$; *privativă la stînga*, dacă $\lambda'' = 0$ şi $\mu'' \neq 0$; *privativă la dreapta*, dacă $\mu'' = 0$ şi $\lambda'' \neq 0$; *privativă*, dacă este privativă la stînga sau la dreapta; *disjunctivă*, dacă $\omega = 0$; *echipolentă*, dacă nu este nici privativă, nici zero, nici disjunctivă. Exemple: dacă $\lambda =$ от şi $\mu =$ тот, atunci $(\lambda, \mu)_f$ este privativă la stînga, în timp ce $(\mu, \lambda)_f$ este privativă la dreapta. În adevăr, avem, în ambele cazuri, $\omega =$ от, $\lambda'' =$ lanţul vid, $\mu'' =$ т. Dacă $\lambda =$ $=$ мужчины şi $\mu =$ столы, atunci $(\lambda, \mu)_f$ este echipolentă, căci $\omega =$ ы, deci $(\lambda, \mu)_f$ nu este disjunctivă, $\lambda'' =$ мужчин, $\mu'' =$ стол, deci $(\lambda, \mu)_f$ nu este nici zero, nici privativă.

## 6. RELAŢII ÎNTRE OPOZIŢIILE FINALE

Două opoziţii finale $(\lambda_1, \mu_1)_f$ şi $(\lambda_2, \mu_2)_f$ se zic *omogene* dacă posedă aceeaşi bază finală. De exemplu, $\lambda_1 =$ но, $\mu_1 = \lambda_2 =$ то, $\mu_2 =$ до, atunci $(\lambda_1, \mu_1)_f$ şi $(\lambda_2, \mu_2)_f$ au aceeaşi bază finală: О.

Relaţia de omogenitate între opoziţii finale este o relaţie de echivalenţă. Dacă două opoziţii finale sînt omogene şi dacă una din ele este disjunctivă, atunci cealaltă este şi ea disjunctivă. Dacă nu există nici o opoziţie finală care să fie omogenă cu opoziţia $(\lambda, \mu)_f$, atunci vom spune că $(\lambda, \mu)_f$ este o opoziţie *singulară*.

Două opoziţii finale se vor numi proporţionale, dacă au aceleaşi sublanţuri diferenţiale. De exemplu, dacă $\lambda_1 =$ но, $\lambda_2 =$ на, $\mu_1 =$ до, $\mu_2 =$ да, atunci opoziţiile $(\lambda_1, \mu_1)_f$ şi $(\lambda_2, \mu_2)_f$ sînt proporţionale, căci avem $\lambda_1'' = \lambda_2'' =$ Н, $\mu_1'' = \mu_2'' =$ Д.

Relaţia de proporţionalitate între opoziţiile finale este o relaţie de echivalenţă. Se demonstrează, pentru această relaţie, că ea păstrează toate proprietăţile conservate de relaţia de proporţionalitate între opoziţiile iniţiale (a se vedea ultima parte a paragrafului 4).

## 7. MORFOLOGIE REGULATĂ ŞI MORFOLOGIE PARADIGMATICĂ

Să considerăm o mulţime $E$ şi să formăm lanţurile ale căror elemente aparţin lui $E$. Fie $\mathfrak{S}$ o anume mulţime de lanţuri de acest fel. Elementele lui $\mathfrak{S}$ sînt, prin definiţie, *cuvinte permise*.

Să considerăm o partiţie $\pi$ a lui $\mathfrak{S}$,

$$\mathfrak{S} = \bigcup_j \mathfrak{S}_j,$$

și fie $\mathfrak{F}$ o anume mulțime de lanțuri ale căror elemente aparțin lui $\mathfrak{E}$. Triada $\{\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F}\}$ este, prin definiție, o *limbă*; elementele lui $\mathfrak{F}$ sînt, prin definiție, *frazele permise*.

Un termen $\mathfrak{E}_j$ al partiției $\pi$ este *regulat* dacă are următoarea proprietate:

Dacă $\lambda_1 \in \mathfrak{E}_j$, $\lambda_2 \in \mathfrak{E}_j$, $\mu_1 \in \mathfrak{E}_j$, $\mu_2 \in \mathfrak{E}_j$, atunci opozițiile $(\lambda_1, \mu_1)_i$ și $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sînt omogene.

De exemplu, dacă $\mathfrak{E}_j$ este totalitatea formelor la singular ale substantivului rus завод, atunci $\mathfrak{E}_j$ este regulat. În adevăr, avem $\mathfrak{E}_j =$ $=$ {завод, завода, заводу, заводом, заводе} și este ușor de văzut că fiecare opoziție inițială între două elemente ale lui $\mathfrak{E}_j$ are aceeași bază: завод.

Dacă, într-o limbă $\mathfrak{L}$, fiecare mulțime $\mathfrak{E}_j$ este regulată, atunci vom spune că $\mathfrak{L}$ are o *morfologie regulată*.

Fie două cuvinte permise, $\lambda$ și $\mu$, bucurîndu-se de următoarea proprietate: nu există nici o frază permisă, conținînd cuvîntul $\lambda$, și astfel ca, înlocuind pe $\lambda$ prin $\mu$, fraza obținută să mai fie încă permisă. În acest caz, se zice că $\lambda$ și $\mu$ sînt în *distribuție complementară*.

Să considerăm o limbă $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F}\}$, presupusă cu morfologie regulată. Vom spune că o mulțime $\mathfrak{E}_j$ din partiția $\pi$ este o *paradigmă* a limbii $\mathfrak{L}$ dacă pentru $\lambda \in \mathfrak{E}_j$, $\mu \in \mathfrak{E}_j$, cuvintele $\lambda$ și $\mu$ sînt în distribuție complementară. Dacă fiecare mulțime $\mathfrak{E}_i$ este o paradigmă a lui $\mathfrak{L}$, atunci vom spune că $\mathfrak{L}$ are o *morfologie paradigmatică*. Rezultă că fiecare limbă care posedă o morfologie paradigmatică are o morfologie regulată; dar reciproca nu este adevărată.

Fie $\mathfrak{L}$ o limbă oarecare. Vom spune că două mulțimi $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ ale partiției $\pi$ sînt *omologe* dacă putem stabili între $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ o corespondență biunivocă, astfel încît dacă $\lambda_m \in \mathfrak{E}_m$, $\mu_m \in \mathfrak{E}_m$, $\lambda_n \in \mathfrak{E}_n$, $\mu_n \in \mathfrak{E}_n$, $\lambda_n$ corespunde lui $\lambda_m$ și $\mu_n$ corespunde lui $\mu_m$, atunci opozițiile $(\lambda_m, \mu_m)_i$ și $(\lambda_n, \mu_n)_i$ sînt proporționale. Este ușor de văzut că relația de omologie este o relație de echivalență.

Clasele de echivalență astfel obținute vor fi *clasele de omologie*. În particular, într-o limbă care posedă o morfologie paradigmatică, paradigmele se repartizează în clase de omologie.

Fie $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ două paradigme omologe ale unei limbi cu morfologie paradigmatică. Dacă $\lambda \in \mathfrak{E}_m$, $\mu \in \mathfrak{E}_m$, $\lambda' \in \mathfrak{E}_n$, $\mu' \in \mathfrak{E}_n$ și dacă $\lambda'$ corespunde lui $\lambda$ și $\mu'$ corespunde lui $\mu$, atunci opozițiile finale $(\lambda, \lambda')_f$ și $(\mu, \mu')_f$ sînt proporționale. Această proprietate este o consecință imediată a definițiilor date mai sus.

Pentru a da un exemplu, să presupunem că $\mathfrak{E}$ este lexicul limbii ruse și, pentru fiecare $\lambda \in \mathfrak{E}$, mulțimea $\mathfrak{E}_j$ conținînd pe $\lambda$ este definită ca mulțimea formelor flexionare ale lui $\lambda$. În acest caz, dacă $\mathfrak{E}_m$ este mulțimea formelor flexionare ale lui завод și $\mathfrak{E}_n$ este mulțimea formelor flexionare ale lui народ, avem omologie între $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$. În adevăr, $\mathfrak{E}_m =$ {завод, завода, заводу, заводом, заводе, заводы, заводов, заводам, заводами, заводах}, $\mathfrak{E}_n =$ {народ, народа, народу, народом, народе, народы, народов, народам, народами, народах}. Dacă punem în cores-

pondență elementele de același rang ale celor două mulțimi, atunci condiția de proporționalitate este evident satisfăcută. De exemplu, (народа, народу)$_i$ este proporțională cu (завода, заводу)$_i$, (народами, народах)$_i$ este proporțională cu (заводами, заводах)$_i$ etc.

### 8. MORFEME ȘI CVASIMORFEME

Fie $\pounds$ o limbă care are o morfologie paradigmatică și fie $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n$ paradigmele lui $\pounds$. Un lanț $\lambda$ este, prin definiție, un *morfem al lui* $\pounds$ *în raport cu* $\mathfrak{E}_j$ dacă $\lambda$ este bază sau lanț diferențial într-o opoziție inițială între doi termeni ai lui $\mathfrak{E}_j$. Dacă $\lambda$ este bază, atunci $\lambda$ este un *morfem-bază în raport cu* $\mathfrak{E}_j$; dacă $\lambda$ este lanț diferențial, atunci $\lambda$ este un *morfem diferențial în raport cu* $\mathfrak{E}_j$. Este clar deci că noțiunea de morfem se definește *în raport cu o anume paradigmă.*

În virtutea definițiilor puse mai sus, se deduce :

**1.** Într-o limbă care are o morfologie paradigmatică, există, în raport cu o anume paradigmă, un singur morfem-bază.

**2.** Dacă două paradigme sînt omologe, atunci ele au aceleași lanțuri diferențiale.

Noțiunea de morfem a fost definită numai pentru limbile care au o morfologie paradigmatică. Dar limbile naturale nu îndeplinesc, în general, această condiție. Se poate defini, pentru limbile oarecare, o noțiune de cvasimorfem, noțiune care, în cazul particular al limbilor cu morfologie paradigmatică, se reduce la noțiunea de morfem. Fie, pentru aceasta, o limbă $\pounds = \{\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F}\}$ și fie $\mathfrak{E}_j$ o mulțime a partiției $\pi$. Fiecare lanț care este bază sau lanț diferențial al unei opoziții inițiale între elemente ale lui $\mathfrak{E}_j$ va fi, prin definiție, un *cvasimorfem în raport cu* $\mathfrak{E}_j$. Avem deci *cvasimorfeme-baze în raport cu* $\mathfrak{E}_j$ și *cvasimorfeme diferențiale în raport cu* $\mathfrak{E}_j$. Să luăm un exemplu din limba rusă. Dacă $\mathfrak{E}_j$ este totalitatea formelor flexionare ale cuvîntului завод, atunci $\mathfrak{E}_j$ nu este regulată, căci opoziția (завода, заводу)$_i$ nu este omogenă cu opoziția (заводом, заводов)$_i$. Nu se pot deci defini morfeme în raport cu $\mathfrak{E}_j$. Dar putem defini cvasimorfemele în raport cu $\mathfrak{E}_j$. Există cvasimorfeme-baze, ca завод, завода, заводо, заводам și cvasimorfeme diferențiale, ca а, у, ом, е, ам, ы, ах, ами, ми, и, в, х, м.

Un cvasimorfem-bază în raport cu $\mathfrak{E}_j$ care nu conține nici un alt cvasimorfem-bază în raport cu $\mathfrak{E}_j$ se numește un *cvasimorfem-bază ireductibil* sau, pe scurt, o *bază ireductibilă*. În exemplul de mai sus, завод este o bază ireductibilă.

Un cvasimorfem-bază care nu este ireductibil este, prin definiție, un *cvasimorfem-bază reductibil* sau, pe scurt, o *bază reductibilă*. În exemplul de mai sus, завода, заводо și заводам sînt baze reductibile.

Cvasimorfemele diferențiale în raport cu $\mathfrak{E}_j$ pot fi clasificate în : *cvasimorfeme diferențiale ireductibile*, care nu conțin alte cvasimorfeme diferențiale în raport cu $\mathfrak{E}_j$ și *cvasimorfeme diferențiale reductibile.* Ca cvasimorfeme diferențiale ireductibile avem, în exemplul de mai sus,

cvasimorfemele а, у, е, м, ы, х, и, в, pe cînd ом, ах și ами sînt reductibile.

Este ușor să verificăm următoarele propoziții:

Dacă $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ sînt două mulțimi omologe ale partiției $\pi$, atunci:

$\alpha$) fiecare cvasimorfem diferențial în raport cu $\mathfrak{E}_m$ este de asemenea un cvasimorfem diferențial în raport cu $\mathfrak{E}_n$ și reciproc;

$\beta$) un cvasimorfem diferențial ireductibil în raport cu $\mathfrak{E}_m$ este de asemenea ireductibil în raport cu $\mathfrak{E}_n$ și reciproc;

$\gamma$) numărul de cvasimorfeme baze în raport cu $\mathfrak{E}_m$ este egal cu numărul de cvasimorfeme baze în raport cu $\mathfrak{E}_n$.

Fie $x$ și $y$ două cvasimorfeme în raport cu o anume mulțime $\mathfrak{E}_j$ a partiției $\pi$. Vom spune că $x$ și $y$ sînt *compatibile* dacă există un cuvînt al lui $\mathfrak{E}_j$ care conține lanțul $xy$. În exemplul de mai sus, заводам și и sînt compatibile, în timp ce завод și и sînt incompatibile.

Este clar că putem avea compatibilitate între $x$ și $y$, dar incompatibilitate între $y$ și $x$.

Vom spune că *$x$ domină pe $y$ la stînga în raport cu $\mathfrak{E}_j$* și vom scrie $(\mathfrak{E}_j)\ x \rightarrow y$, dacă $x$ este compatibil cu $y$ în raport cu $\mathfrak{E}_j$ și dacă în fiecare cuvînt din $\mathfrak{E}_j$ conținînd sublanțul $xy$ înlocuirea lui $xy$ prin $x$ conduce la un cuvînt aparținînd de asemenea lui $\mathfrak{E}_j$.

Vom spune că *$x$ domină pe $y$ la dreapta în raport cu $\mathfrak{E}_j$* și vom scrie $x \rightarrow y\ (\mathfrak{E}_j)$, dacă $y$ este compatibil cu $x$ în raport cu $\mathfrak{E}_j$ și dacă în fiecare cuvînt din $\mathfrak{E}_j$ conținînd sublanțul $yx$ înlocuirea lui $yx$ prin $x$ conduce la un cuvînt aparținînd de asemenea lui $\mathfrak{E}_j$.

Ca exemplu, să considerăm pentru $\mathfrak{E}_j$ totalitatea formelor flexionare ale lui завод. Avem atunci: $(\mathfrak{E}_j)$ завод → а, $(\mathfrak{E}_j)$ завод → у, $(\mathfrak{E}_j)$ завод → е, $(\mathfrak{E}_j)$ завод → ы, $(\mathfrak{E}_j)$ завод → ов, $(\mathfrak{E}_j)$ ам → и, $(\mathfrak{E}_j)$ а → х, $(\mathfrak{E}_j)$ завода → ми etc.

Este ușor de văzut că două mulțimi omologe $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ sînt izomorfe în raport cu relația de dominare la stînga. Aceasta înseamnă că între mulțimea cvasimorfemelor în raport cu $\mathfrak{E}_m$ și mulțimea cvasimorfemelor în raport cu $\mathfrak{E}_n$ putem stabili o corespondență biunivocă care păstrează relația de dominare la stînga. De exemplu, dacă $\mathfrak{E}_m$ este totalitatea formelor flexionare ale lui завод iar $\mathfrak{E}_n$ este totalitatea formelor flexionare ale lui народ, atunci, după cum știm, $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ sînt omologe și avem izomorfism între $\mathfrak{E}_m$ și $\mathfrak{E}_n$ în raport cu relația de dominare la stînga: завод corespunde lui народ, заводами corespunde lui народами, avem $(\mathfrak{E}_m)$ завод → ами, $(\mathfrak{E}_n)$ народ → ами etc.

Fie $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F}\}$ o limbă oarecare, $\lambda \in \mathfrak{E}$, $\mu \in \mathfrak{E}$. Vom spune că $\lambda$ și $\mu$ sînt în *distribuție contrastantă* dacă există o frază a lui $\mathfrak{F}$ conținînd cuvîntul $\lambda$, unde înlocuirea lui $\lambda$ prin $\mu$ conduce la o frază care nu mai aparține lui $\mathfrak{F}$, și există o frază a lui $\mathfrak{F}$ conținînd cuvîntul $\mu$, unde înlocuirea lui $\mu$ prin $\lambda$ conduce la o frază care nu mai aparține lui $\mathfrak{F}$.

Vom spune că limba $\mathfrak{L}$ are o *morfologie cvasiparadigmatică* dacă pentru o mulțime oarecare $\mathfrak{E}_m$ a partiției $\pi$ și pentru $\lambda \in \mathfrak{E}_m$, $\mu \in \mathfrak{E}_n$, $\lambda$ și $\mu$ sînt în distribuție contrastantă.

## OBSERVAȚII FINALE

Există o anumită corespondență între morfemele baze și cvasimorfemele baze pe de o parte, semantemele lui Vendryes [27] și *pleremele* lui Hjelmslev [11], pe de altă parte. De asemenea, există o anumită corespondență între morfemele diferențiale și cvasimorfemele diferențiale pe de o parte, morfemele lui Vendryes pe de altă parte. Dar noțiunile noastre de morfem și de cvasimorfem sînt în primul rînd elucidarea concepției celei mai răspîndite privind morfemul, concepție care își are originea la J. Baudouin de Courtenay [1] și care, cu anumite modificări, aparține și lingvisticii descriptive. Este vorba de concepția potrivit căreia morfemul este un segment sonor minimal, dotat cu semnificație lexicală sau gramaticală. Examenul critic al acestei definiții și efortul de a explicita ceea ce ni s-a părut doar implicit conținut în ea, ne-a condus, în mare măsură, la definițiile date în prezenta lucrare. Pentru partea lingvistică concretă a lucrurilor, vom mai reveni. Ar fi interesantă și o confruntare cu noțiuni ca morf, monem (a se vedea, de exemplu, [23], [30], [31]) și cu noțiunile și procedeele din [2], [4], [5], [12], [13], [15], [17], [20], [22], [28], [29].

Relația de dominare folosită în lucrarea de față a fost folosită și de S. K. Șaumian în lucrarea sa încă nepublicată [1]). Există și o legătură simplă între această relație de dominare și relația de subordonare considerată în [14]. Trebuie să mai spunem că așa-zisele *steme*, foarte numeroase în cartea [27] a lui Lucien Tesnières, sînt o ilustrare — deși neexplicită — a relațiilor de dominare în sintaxă.

Se poate discuta de asemenea neconcordanța dintre modelele de paradigmă și cvasiparadigmă propuse mai sus și paradigmele limbilor naturale. Pentru a da un singur exemplu, modelul de mai sus nu ia în considerație posibilitatea alternanțelor vocalice sau consonantice, alternanțe atît de frecvente în multe din limbile naturale și care complică sensibil problema descompunerii unui cuvînt în părțile sale constitutive (a se vedea [6] și [9]).

În ceea ce privește clasele de omologie, ele constituie un instrument foarte util în lingvistica aplicată (a se vedea, de exemplu, [17], [18] și [15]) și în lingvistica structurală (a se vedea de exemplu [3]).

O problemă foarte importantă și care necesită cercetări ulterioare, este aceea a clasificării morfemelor și a cvasimorfemelor, astfel ca să obținem corespondentul formal al desinențelor, al sufixelor, al prefixelor și al infixelor. Sugestii interesante pentru o astfel de cercetare sînt date în [19].

În concluzie, vrem să atragem atenția asupra izomorfismului care există între noțiunea de *paradigmă*, așa cum a fost definită mai sus, și noțiunea de *sunet general* în sensul lui S. K. Șaumian [24], [25]. Ajungem la noțiunea de sunet general în felul următor : Se consideră mulțimea $\mathfrak{S}$ de sunete individuale, în sensul din [24]. Se definește în $\mathfrak{S}$ o relație de echivalență $R$, astfel încît două sunete individuale sînt în relație $R$ dacă și numai dacă ele diferă numai prin poziția lor. Dacă considerăm un sunet

[1]) С. К. Шаумян, *Трансформационная грамматика и теория классов слов.*

individual ca o mulțime de trăsături fizice, atunci fiind date patru sunete individuale $R$-echivalente $s_1$, $s_2$, $s_3$ și $s_4$, opozițiile ($s_1$, $s_2$) și ($s_3$, $s_4$) sînt omogene (adică ele au aceeași bază). În adevăr, baza comună este dată de mulțimea trăsăturilor fizice care definește un sunet general, adică de mulțimea trăsăturilor fizice comune sunetelor individuale $R$-echivalente; este tocmai mulțimea trăsăturilor fizice ale sunetelor individuale $R$-echivalente, obținută făcînd abstracție de poziția acestor sunete. Putem deci spune că un sunet general este o mulțime regulată, în sensul dat acestui termen în lucrarea de față. În plus, din faptul că două sunete individuale diferite și $R$-echivalente sînt, prin însuși acest fapt, incompatibile pe aceeași poziție, deducem că două sunete individuale $R$-echivalente sînt în distribuție complementară. Deci, *sunetul general și paradigma admit același model logic.*

Primită la redacție la 26 iunie 1962

## ЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ОППОЗИЦИЙ.

### II. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ОППОЗИЦИИ, ПАРАДИГМЫ, МОРФЕМЫ И КВАЗИМОРФЕМЫ


РЕЗЮМЕ

Пусть $E$ множество. Любая конечная последовательность элементов $E$ (некоторые элементы могут повторяться) называется *цепью*. Подмножество $\beta$ цепи $\alpha$ является *подцепью* $\alpha$, если элементы подмножества $\beta$ расположены в том же порядке, что и в цепи $\alpha$ и если два элемента $\beta$ являются смежными в $\beta$ тогда и только тогда, когда они являются смежными и в $\alpha$. Подцепь цепи $\alpha$, имеющая тот же самый начальный (конечный) элемент, что и $\alpha$, называется *начальной* (*конечной*) *подцепью цепи* $\alpha$. Упорядоченная оппозиция — это упорядоченная пара ($\lambda$, $\mu$) цепей. Максимальная начальная (конечная) подцепь, общая для $\lambda$ и $\mu$, называется *начальным* (*конечным*) *базисом* оппозиции ($\lambda$, $\mu$). Оппозиция, рассматриваемая в соотношении со своим начальным (конечным) базисом, записывается $(\lambda, \mu)_i$ ($(\lambda, \mu)_f$). Между цепями определяется композиционная операция. Пусть $\nu$ базис оппозиции $(\lambda, \mu)_i$. Цепи $\lambda'$ и $\mu'$, со свойством $\lambda = \nu\lambda'$, $\mu = \nu\mu'$, называются дифференциальными подцепями оппозиции $(\lambda, \mu)_i$. Оппозиция $(\lambda, \mu)_i$ является: *нулевой*, если $\lambda = \mu$; *привативной*, если $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ или $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$; *дизъюнктивной*, если $\nu = 0$; *эквиполентной* — во всех остальных случаях. Две оппозиции $(\lambda_1, \mu_1)_i$ и $(\lambda_2, \mu_2)_i$ суть: *омогенные*, если они имеют тот же базис; *пропорциональные* если они имеют те же самые дифференциальные подцепи. Подобные понятия вводятся и для конечных оппозиций. Если $(\lambda_1, \mu_1)_i$ и $(\lambda_2, \mu_2)_i$ омогенны, а последняя из них дизъюнктивная, то и $(\lambda_1, \mu_1)_i$ является дизъюнктивной. Если $(\lambda_1, \mu_1)_i$ пропорциональна оппозиции $(\lambda_2, \mu_2)_i$, а $(\lambda_2, \mu_2)_i$ является нулевой (соот. привативной), то и $(\lambda_1, \mu_1)_i$ является тоже нулевой

(соот. привативной); если $(\lambda_2, \mu_2)_i$ является эквиполентной или дизъюнктивной, то и $(\lambda_1, \mu_1)_i$ является эквиполентной или дизъюнктивной. Подобные результаты получаются и для конечных оппозиций.

Пусть определенное подмножество подцепей, образованных из элементов множества $E$. Пусть $\pi$ разбиение множества $\mathfrak{E}$ и пусть $\mathfrak{F}$ множество цепей, образованных из элементов множества $\mathfrak{E}$. Элементы $\mathfrak{F}$ называются *отмеченными фразами*. Триада $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F}\}$ называется *языком*. Член $\mathfrak{E}_j$ разбиения $\pi$ является *регулярным*, если для $\lambda_1 \in \mathfrak{E}_j$, $\lambda_2 \in \mathfrak{E}_j$, $\mu_1 \in \mathfrak{E}_j$, $\mu_2 \in \mathfrak{E}_j$ оппозиции $(\lambda_1, \mu_1)_i$ и $(\lambda_2, \mu_2)_i$ омогенны. Если каждый элемент разбиения $\pi$ регулярен, тогда язык $\mathfrak{L}$ обладает *регулярной морфологией*. Два элемента $\lambda$ и $\mu$ множества $\mathfrak{E}$ находятся в *дополнительной дистрибуции*, если в любой отмеченной фразе, содержащей элемент $\lambda$ (соот. $\mu$), замена $\lambda$ (соот. $\mu$) элементом $\mu$ (соот. $\lambda$) ведет тоже к отмеченной фразе. Регулярное множество $\mathfrak{E}_j$ разбиения $\pi$ является *парадигмой*, если для $\lambda \in \mathfrak{E}_j$, $\mu \in \mathfrak{E}_j$, $\lambda$ и $\mu$ находятся в дополнительной дистрибуции. Если любой член разбиения $\pi$ — это парадигма, тогда $\mathfrak{L}$ является языком с *парадигматической морфологией*.

Два множества $\mathfrak{E}_m$ и $\mathfrak{E}_n$ разбиения $\pi$ являются *гомологичными*, если между ними существует *взаимнооднозначное* соответствие, так что: если $\lambda_m \in \mathfrak{E}_m$, $\mu_m \in \mathfrak{E}_m$, $\lambda_n \in \mathfrak{E}_n$, $\mu_n \in \mathfrak{E}_n$, причем $\lambda_n$ соответствует $\lambda_m$, а $\mu_n$ $\mu_m$, то оппозиции $(\lambda_m, \mu_m)_i$ и $(\lambda_n, \mu_n)_i$ пропорциональны. Омология — это отношение эквивалентности; множества $\pi$ разделяются на *классы омологии*.

Пусть $\mathfrak{L}$ язык. Цепь $\lambda$ является *квазиморфемой языка $\mathfrak{L}$ по отношению к множеству* $\mathfrak{E}_j$ разбиения $\pi$, если $\lambda$ является базисом или дифференциальной цепью начальной оппозиции двух элементов множества $\mathfrak{E}_j$. Имеются, следовательно, *квазиморфемы-базисы* и *дифференциальные квазиморфемы*. В языке с парадигматической морфологией квазиморфемы называются *морфемами*. По отношению к определенной парадигме, существует одна единственная морфема-базис. Если две парадигмы гомологичны, то они имеют те же самые дифференциальные цепи. Квазиморфема-базис по отношению к $\mathfrak{E}_j$, не содержащая никакой другой квазиморфемы-базиса по отношению к $\mathfrak{E}_j$, называется *несократимой*. Подобным образом определяются и дифференциальные несократимые квазиморфемы.

Если $\mathfrak{E}_m$ и $\mathfrak{E}_n$ гомологичные множества разбиения $\pi$, то: $\alpha$) каждая дифференциальная квазиморфема по отношению к $\mathfrak{E}_m$ является дифференциальной квазиморфемой и по отношению к $\mathfrak{E}_n$ и обратно; $\beta$) дифференциальная несократимая квазиморфема по отношению к $\mathfrak{E}_m$ является несократимой и по отношению к $\mathfrak{E}_n$ и обратно; $\gamma$) число квазиморфем-базисов по отношению к $\mathfrak{E}_m$ равно числу квазиморфем-базисов по отношению к $\mathfrak{E}_n$.

Пусть $x$ и $y$ две квазиморфемы по отношению к множеству $\mathfrak{E}_j$ разбиения $\pi$. Мы скажем, что $x$ и $y$ *совместимы*, если существует элемент множества $\mathfrak{E}_j$, содержащий цепь $xy$. Мы скажем, что $x$ *доминирует на* $y$ *слева по отношению к* $\mathfrak{E}_j$ и напишем $(\mathfrak{E}_j)$ $x \to y$, если $x$ совместим с $y$ по отношению к $\mathfrak{E}_j$ и если в каждом элементе из $\mathfrak{E}_j$, содержащем подцепь $xy$, замена $xy$ элементом $x$ ведет к элементу множества $\mathfrak{E}_j$. Два

гомологичных множества являются изоморфными по отношению к доминации слева. Подобные определения и результаты получаются и для доминации справа.

Пусть $\mathfrak{L}$. язык Пусть $\lambda \in \mathfrak{E}$, $\mu \in \mathfrak{E}$. $\lambda$ и $\mu$ находятся в *контрастирующей дистрибуции*, если существует фраза из $\mathfrak{F}$, содержащая $\lambda$, где заменяя $\lambda$ элементом $\mu$, получается фраза, не входящая в $\mathfrak{F}$ и если имеется и симметричное свойство, полученное заменой $\lambda$ элементом $\mu$ и $\mu$ элементом $\lambda$. Мы скажем, что язык $\mathfrak{L}$ обладает *квазипарадигматической морфологией*, если для произвольного множества $\mathfrak{E}_m$ разбиения $\pi$ и для $\lambda \in \mathfrak{E}_m$, $\mu \in \mathfrak{E}_m$, $\lambda$ и $\mu$ находятся в контрастирующей дистрибуции.

В заключение даются некоторые указания касательно специальной литературы и описывается изоморфизм, существующий между *парадигмой* и *общим звуком*, в значении [24].

## ASPECT LOGIQUE DES OPPOSITIONS LINGUISTIQUES

### II. OPPOSITIONS ORDONNÉES, PARADIGMES, MORPHÈMES ET QUASI-MORPHÈMES

RÉSUMÉ

Soit $E$ un ensemble. Toute suite finie d'éléments de $E$ (certains éléments pouvant se répéter) est une *chaîne*. Un sous-ensemble $\beta$ d'une chaîne $\alpha$ est une *sous-chaîne* de $\alpha$ si les éléments de $\beta$ sont considérés dans leur ordre dans $\alpha$ et si deux éléments de $\beta$ sont voisins dans $\beta$ lorsque et seulement lorsqu'ils sont voisins dans $\alpha$. Une sous-chaîne de $\alpha$, qui a le même élément initial (final) que $\alpha$, est une *sous-chaîne initiale* (*finale*) de $\alpha$. Une *opposition ordonnée* est une paire ordonnée $(\lambda, \mu)$ de chaînes. La sous-chaîne initiale (finale) maximale, commune à $\lambda$ et $\mu$, est la *base initiale* (*finale*) de l'opposition $(\lambda, \mu)$. Une opposition considérée par rapport à sa base initiale (finale) sera notée $(\lambda, \mu)_i$ ($(\lambda, \mu)_f$). On définit une opération de composition entre chaînes. Soit $\nu$ la base de l'opposition $(\lambda, \mu)_i$. Les chaînes $\lambda'$ et $\mu'$, qui ont la propriété $\lambda = \nu\lambda'$, $\mu = \nu\mu'$, sont les *sous-chaînes différentielles* de l'opposition $(\lambda, \mu)_i$. L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est : *zéro*, si $\lambda = \mu$ ; *privative*, si $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ ; *disjonctive*, si $\nu = 0$ ; *équipollente*, dans tous les autres cas. Deux oppositions $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sont : *homogènes* si elles ont la même base ; *proportionnelles* si elles ont les mêmes sous-chaînes différentielles. On introduit des notions similaires pour les oppositions finales. Si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est homogène par rapport à $(\lambda_2, \mu_2)_i$ et cette dernière est disjonctive, alors $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est aussi disjonctive. Si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est proportionnelle à $(\lambda_2, \mu_2)_i$ et si $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est zéro (respectivement privative), alors $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est également zéro (respectivement privative) ; si $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est équipollente ou disjonctive, alors $(\lambda_1 \mu_1)_i$ est aussi équipollente ou disjonctive. Résultats semblables pour les oppositions finales.

Soit $\mathfrak{S}$ un certain ensemble de chaînes formées d'éléments de $E$. Soit $\pi$ une partition de $\mathfrak{S}$ et soit $\mathfrak{F}$ un ensemble de chaînes formées avec des éléments de $\mathfrak{S}$. Les éléments de $\mathfrak{F}$ sont des *phrases marquées*. La triade $\{\mathfrak{S}, \pi, \mathfrak{F}\}$ est une *langue*. Un terme $\mathfrak{S}_j$ de la partition $\pi$ est *régulier* si pour $\lambda_1 \in \mathfrak{S}_j$, $\lambda_2 \in \mathfrak{S}_j$, $\mu_1 \in \mathfrak{S}_j$, $\mu_2 \in \mathfrak{S}_j$ les oppositions $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sont homogènes. Si chaque terme de $\pi$ est régulier, on dit que la langue $\mathfrak{L}$ possède une *morphologie régulière*. Deux éléments $\lambda$ et $\mu$ de $\mathfrak{S}$ sont en *distribution complémentaire* si dans toute phrase marquée contenant $\lambda$ (resp. $\mu$) le remplacement de $\lambda$ (resp. $\mu$) par $\mu$ (resp. $\lambda$) conduit à une phrase également marquée. Un ensemble régulier $\mathfrak{S}_j$ de la partition $\pi$ est un *paradigme* si, pour $\lambda \in \mathfrak{S}_j$, $\mu \in \mathfrak{S}_j$, $\lambda$ et $\mu$ sont en distribution complémentaire. Si tout terme de $\pi$ est un paradigme, alors $\mathfrak{L}$ est une langue à *morphologie paradigmatique*.

Deux ensembles $\mathfrak{S}_m$ et $\mathfrak{S}_n$ de $\pi$ sont *homologues* s'il existe entre eux une correspondance biunivoque, telle que pour $\lambda_m \in \mathfrak{S}_m$, $\mu_m \in \mathfrak{S}_m$, $\lambda_n \in \mathfrak{S}_n$, $\mu_n \in \mathfrak{S}_n$ ($\lambda_n$ correspondant à $\lambda_m$ et $\mu_n$ à $\mu_m$), les oppositions $(\lambda_m, \mu_m)_i$ et $(\lambda_n, \mu_n)_i$ soient proportionnelles. L'homologie est une relation d'équivalence, par rapport à laquelle les ensembles de $\pi$ sont classifiés en *classes d'homologie*.

Soit $\mathfrak{L}$ une langue quelconque. Une chaîne $\lambda$ est un *quasi-morphème* de $\mathfrak{L}$ *par rapport à l'ensemble* $\mathfrak{S}_j$ de $\pi$ si $\lambda$ est une base ou une chaîne différentielle d'une opposition initiale entre deux éléments de $\mathfrak{S}_j$. Nous avons donc des *quasi-morphèmes bases* et des *quasi-morphèmes différentiels*. Dans une langue à morphologie paradigmatique, les quasi-morphèmes sont, par définition, des *morphèmes*. Il existe, par rapport à un paradigme donné, un seul morphème base. Si deux paradigmes sont homologues, ils ont les mêmes chaînes différentielles. Un quasi-morphème base par rapport à $\mathfrak{S}_j$, qui ne contient aucun autre quasi-morphème base par rapport à $\mathfrak{S}_j$, est *irréductible* par rapport à $\mathfrak{S}_j$. On définit d'une manière analogue les quasi-morphèmes différentiels irréductibles.

Si $\mathfrak{S}_m$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des ensembles homologues de la partition $\pi$, alors : $\alpha$) chaque quasi-morphème différentiel par rapport à $\mathfrak{S}_m$ est aussi quasi-morphème différentiel par rapport à $\mathfrak{S}_n$ et réciproquement ; $\beta$) un quasi-morphème différentiel irréductible par rapport à $\mathfrak{S}_m$ est également irréductible par rapport à $\mathfrak{S}_n$, et réciproquement ; $\gamma$) le nombre de quasi-morphèmes bases par rapport à $\mathfrak{S}_m$ est égal au nombre de quasi-morphèmes bases par rapport à $\mathfrak{S}_n$.

Soient $x$ et $y$ deux quasi-morphèmes par rapport à l'ensemble $\mathfrak{S}_j$ de la partition $\pi$. Nous dirons que $x$ et $y$ sont *compatibles* s'il existe un mot de $\mathfrak{S}_j$ qui contient la chaîne $xy$. Nous dirons que $x$ *domine* $y$ *à gauche par rapport à* $\mathfrak{S}_j$ et nous écrirons $(\mathfrak{S}_j)$ $x \to y$, si $x$ est compatible avec $y$ par rapport à $\mathfrak{S}_j$ et si dans chaque mot de $\mathfrak{S}_j$, qui contient la sous-chaîne $xy$, le remplacement de $xy$ par $x$ conduit à un mot de $\mathfrak{S}_j$. Deux ensembles homologues sont isomorphes par rapport à la domination à gauche. Définitions et résultats similaires pour la domination à droite.

Soit $\mathfrak{L}$ une langue quelconque, $\lambda \in \mathfrak{S}$, $\mu \in \mathfrak{S}$. $\lambda$ et $\mu$ seront en *distribution contrastante* s'il existe une phrase de $\mathfrak{F}$ contenant $\lambda$, où en remplaçant $\lambda$ par $\mu$ on obtient une phrase qui ne se trouve plus dans $\mathfrak{F}$, et si on a

aussi la propriété symétrique, obtenue en remplaçant $\lambda$ par $\mu$ et $\mu$ par $\lambda$. Nous dirons que la langue $\mathfrak{L}$ a une *morphologie quasi-paradigmatique* si pour un ensemble quelconque $\mathfrak{E}_m$ de la partition $\pi$ et pour $\lambda \in \mathfrak{E}_m$, $\mu \in \mathfrak{E}_m$, $\lambda$ et $\mu$ sont en distribution contrastante.

A la fin, l'auteur indique certaines relations avec d'autres travaux concernant ce sujet et il décrit l'isomorphisme entre le *paradigme* et le *son général* au sens de [24].

## BIBLIOGRAFIE


1. И. А. Бодуэн де Куртене, *Введение в языковедение* (5-е изд.). 1917, 197—198.
2. D. Bolinger, *On defining the morpheme*. Word, *4* (1948).
3. Paula Diaconescu, *Un mod de descriere a flexiunii nominale, cu aplicație la limba română contemporană*. St. cerc. lingv., **XII**, *2*, 163—192 (1961).
4. — *Pe marginea unor lucrări despre morfem*. St. cerc. lingv., *4* (1952).
5. J. Greenberg, *Essays in linguistics*. New York, 1957.
6. Z. Harris, *Structural Linguistics* (Fifth Impression). Chicago, 1961.
7. — *From Phoneme to Morpheme*. Language, **31** (1955).
8. — *Distributional structure*, în „Linguistics today". New York, 1954.
9. — *Discontinuous morphemes*. Language, **21** (1945).
10. L. Hjelmslev, *Prolegomena to a Theory of Language*. Baltimore, 1953.
11. — *Principes de grammaire générale*. Kobenhavn, 1928, 98.
12. — *Essai d'une théorie des morphèmes*. Actes du IVe Congrès international des linguistes, Copenhague, 1938, 140—151.
13. Ch. Hockett, *Problems of morphemic analysis*. Language, **23** (1947).
14. О. С. Кулагина, *Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств*. Проблемы кибернетики, **1** (1958.)
15. — *Об использовании машины при составлении алгоритмов анализа текста*. Проблемы кибернетики, **7**, 209—223 (1962).
16. S. Marcus, *Aspectul logic al opozițiilor lingvistice*. I. Problemî structurnoi lingvistiche (va apărea).
17. И. А. Мельчук, *Морфологический анализ при машинном переводе (преимущественно на материале русского языка)*. Проблемы кибернетики, **6**, 207—276 (1961).
18. Gr. C. Moisil, *Probleme puse de traducerea automată. Conjugarea verbelor în limba română scrisă*. St. cerc. lingv., *1* (1960).
19. Wolfgang Motsch, *Zur Stellung der Wortbildung in einem formalen Sprachmodell. Thesen über die theoretischen Grundlagen einer wissenschaftliche Grammatik*. Deutsche Akademie der Wissenschafts, Berlin, 1961.
20. E. Nida, *Morphology : the descriptive anatysis of words*. Ann Arbor, 1946 .
21. И. И. Ревзин, *Модели языка*. Изд. АН СССР, Москва, 1962.
22. — *О логической форме лингвистических определений (на примере определения, морфемы)*, în „Применение логики в науке и технике", Москва, 1960, 140—148.
23. S. Saporta, *Morph, morpheme, archimorpheme*. Word, **12** (1956).
24. С. К. Шаумян, *Логический анализ понятия фонемы*, în „Логические исследования". Изд. АН СССР, Москва, 1959, 159—177.
25. — *Проблемы теоретической фонологии*. Изд. АН СССР, Москва, 1962.
26. J. Vendryes, *Le langage*. Paris, 1921.
27. Lucien Tesnière, *Eléments de syntaxe structurale*. C. Klincksieck, Paris, 1959.
28. С. Я. Фитиалов, *О построении формальной морфологии в связи с машинным переводом*. Доклады на Конференции по обработке информации, машинному переводу и автоматическому чтению текста, выпуск № 2, Москва, 1961.
29. Rulon S. Wells, *De Saussure's system of linguistics*. Word, **3**, 1—31 (1947).
30. A. Martinet, *Eléments de linguistique générale*. Paris, 1960, 20.
31. H. Frei, *Critères de délimitation*, Word. **10**, *2—3* (1954).

# UTILIZAREA GRAFURILOR PENTRU OBȚINEREA SCHEMEI CU UN NUMĂR MINIM DE RELEE

DE

CONSTANTIN P. POPOVICI

**§ 1.** În această lucrare presupunem cunoscută metoda de sinteză a schemelor cu condiții de lucru date pentru elementele executive, metodă elaborată de acad. Gr. C. Moisil [1], exemplificată și completată cu condiții de bună funcționare a schemei atît de acad. Gr. C. Moisil [2] cît și de Gh. Ioanin [2], [3]. Vom presupune cunoscută această metodă de sinteză sub forma în care ea este expusă în partea a IV-a a cărții acad. Gr. C. Moisil „Teoria algebrică a mecanismelor automate" [4].

Din expunerea cunoscută a acestei metode, se constată că unele probleme de sinteză atunci cînd sînt date condițiile de lucru pentru elementele executive devin compatibile cu utilizarea unui număr finit de relee intermediare. Dacă releele utilizate sînt ordinare, numărul releelor care fac compatibilă o problemă de sinteză a unei scheme cu condiții de lucru date pentru elementele executive poate fi luat egal cu orice număr natural $n$ care verifică inegalitatea $s \leqslant 2^n$, unde $s$ este numărul de poziții ale contactelor de relee utilizate pentru a face compatibilă problema de sinteză considerată, o poziție a contactelor de relee fiind o valoare a sistemului de variabile $x, y, \ldots, z$ asociate releelor $X, Y, \ldots, Z$.

În problemele de sinteză în care sînt date condițiile de lucru pentru elementele executive nu este necesar ca cele $s$ poziții ale contactelor de relee care fac compatibilă o problemă de sinteză să fie diferite două cîte două. Cînd se pune însă problema realizării schemei respective, trebuie ca cele $s$ poziții ale contactelor de relee să fie diferite două cîte două. Dacă $s$ este numărul minim de poziții ale contactelor de relee diferite două cîte două care fac compatibilă o problemă de sinteză a unei scheme cu condiții de lucru date pentru elementele executive, atunci numărul minim $n$ de relee intermediare ordinare care trebuie utilizate pentru realizarea schemei considerate verifică, pentru $s \neq 1$, inegalitățile $2^{n-1} < s \leqslant 2^n$. În cazul cînd $s = 1$ nu este nevoie de nici un releu intermediar.

Numărul minim de poziții ale contactelor de relee diferite două cîte două, care fac compatibilă o problemă de sinteză a unei scheme cu condiții de lucru date pentru elementele executive, depinde de metoda de rezolvare. Astfel, dacă impunem condiția tehnică de bună funcționare referitoare la acționarea și dezacționarea a cîte unui singur releu oricare ar fi poziția precedentă a contactelor de relee, atunci numărul minim, de care este vorba, de poziții ale contactelor de relee poate fi mai mare decît în cazul cînd nu impunem această condiție tehnică de bună funcționare. Din contră, dacă impunem condiția de stabilizare din [5], atunci, conform celor arătate în [5], obținem același număr minim de poziții ale contactelor de relee ca și în cazul cînd nu impunem condiția de stabilizare de care este vorba în [5].

Adoptînd metoda de sinteză din [4] a schemelor cu condiții de lucru date pentru elementele executive, numărul minim de poziții ale contactelor de relee care fac compatibilă o problemă de sinteză poate fi obținut în felul următor : se determină, mai întîi, $s$ poziții ale contactelor de relee care fac compatibilă problema de sinteză considerată. Pozițiile din oricare pereche de poziții din aceste $s$ poziții sînt distincte între ele datorită notațiilor adoptate pentru ele, fiecare poziție fiind notată, de exemplu, cu $P_i$, unde $1 \leqslant i \leqslant s$. Pozițiile din oricare pereche de poziții distincte nu sînt, însă, neapărat diferite. Din cauză că cele $s$ poziții fac compatibilă problema de sinteză considerată, rezultă că unele perechi de astfel de poziții sînt formate din poziții diferite. Dacă vom face identice pozițiile distincte care nu sînt diferite, astfel încît să obținem o mulțime de poziții diferite două cîte două, și dacă pozițiile distincte care nu sînt diferite le vom face identice într-un mod convenabil, vom obține și numărul minim de poziții ale contactelor de relee diferite două cîte două care fac compatibilă problema de sinteză considerată.

În această lucrare vom da cîteva procedee care se încadrează în modul convenabil, de care este vorba mai sus, de a face identice pozițiile distincte care nu sînt diferite. În acest scop vom utiliza o metodă grafică care înlesnește rezolvarea următoarei probleme.

P r o b l e m ă. *Fiind dat un număr finit de poziții ale contactelor de relee, unele perechi din aceste poziții fiind formate din poziții diferite, să se obțină numărul minim de poziții diferite două cîte două făcînd identice acele poziții care nu sînt diferite.*

**§ 2.** Reprezentarea grafică utilizată este următoarea :

Fiecărei poziții a contactelor de relee facem să-i corespundă un punct în spațiu, la două poziții distincte ale contactelor de relee corespunzînd două puncte distincte.

Fiecărei perechi de poziții ale contactelor de relee diferite între ele facem să-i corespundă un segment care unește cele două puncte care corespund la cele două poziții ale contactelor de relee considerate.

Figura geometrică obținută în modul arătat mai sus o vom numi, ca de obicei, *graf*.

Punctele din care este format un graf le vom numi *puncte*, *vîrfuri* sau *noduri*.

Un graf va fi numit *graf complet* dacă vîrfurile din oricare pereche de vîrfuri din graful considerat sînt unite prin cîte un segment.

Operația prin care două poziții ale contactelor de relee care nu sînt diferite sînt făcute identice o vom exprima prin contopirea într-un singur punct a celor două puncte care le corespund și care deci nu sînt legate prin nici un segment, contopind în același timp într-un segment și segmentele care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte. Vom numi această operație *operația de contopire a nodurilor.*

Operația inversă operației de contopire a nodurilor o vom numi *operația de dezlipire a nodurilor*, în care o dată cu separarea a două noduri care au fost contopite împreună se separă și segmentele care au fost contopite într-un singur segment, atunci cînd aceste segmente au apărut între aceleași două puncte ca urmare a contopirii într-un singur nod a nodurilor considerate.

Minimul de poziții ale contactelor de relee diferite două cîte două, obținut făcînd identice acele poziții care nu sînt diferite, corespunde deci la un graf complet, rezultat prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de contopire a nodurilor în graful asociat, în felul arătat mai sus, mulțimii considerate de poziții ale contactelor de relee astfel încît să aibă numărul minim de vîrfuri dintre toate grafurile complete care pot fi obținute, din graful asociat mulțimii considerate de poziții ale contactelor de relee, prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de contopire a nodurilor.

Graful, care corespunde la minimul de poziții ale contactelor de relee, obținut făcînd identice acele poziții care nu sînt diferite îl vom numi *graf minim.*

Observăm că orice graf minim este un graf complet.

Pentru a simplifica limbajul vom spune că două puncte sînt *libere între ele* sau că unul din ele este *liber în raport* cu celălalt dacă ele nu sînt unite prin nici un segment.

Punctele dintr-o mulțime de puncte în care punctele din orice pereche de puncte sînt libere între ele le vom numi *libere între ele.* O mulțime formată dintr-un singur punct o vom considera ca fiind o mulțime de puncte libere între ele.

Un punct care nu este unit prin nici un segment de nici un vîrf al unui graf îl vom numi *liber în raport* cu graful considerat.

Două grafuri le vom numi *libere între ele*, sau vom spune că un graf este *liber în raport* cu un alt graf, dacă orice vîrf dintr-unul din grafurile considerate este liber în raport cu celălalt graf considerat.

Mulțimea tuturor segmentelor care au un vîrf comun o vom numi, ca de obicei, *stea.*

**§ 3.** Vom da acum procedeele care permit a transforma un graf, prin contopirea vîrfurilor sale nelegate prin segmente și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, adică prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de contopire a nodurilor sale, într-un graf cu un număr mai mic de vîrfuri astfel încît din graful obținut prin contopirea vîrfurilor sale nelegate prin segmente și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între

aceleași două puncte, adică prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de contopire a nodurilor sale, să fie posibil să obținem graful minim pentru graful inițial. Aceste procedee sînt cuprinse în cele patru teoreme de mai jos.

TEOREMA 1. *Fie $N_1$ și $N_2$ două noduri ale unui graf $\Gamma$ libere între ele astfel încît orice nod al grafului $\Gamma$ care nu este liber în raport cu nodul $N_1$ nu este liber nici în raport cu nodul $N_2$. Fie $\Gamma_1$ graful obținut prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte și fie $\Gamma_2$ un graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Atunci $\Gamma_2$ este graf minim și pentru graful $\Gamma$.*

Demonstrație. Toate grafurile minime pentru graful $\Gamma$ avînd același număr $s$ de noduri, iar toate grafurile minime pentru graful $\Gamma_1$ avînd același număr $s_1$ de noduri, graful $\Gamma_1$ fiind obținut din graful $\Gamma$ prin operația de contopire a nodurilor, pentru a demonstra teorema 1 este suficient a demonstra că $s_1 = s$.

În vederea acestui scop, fie $\gamma$ un graf minim pentru graful $\Gamma$ în care cele două noduri $N_1$ și $N_2$ nu sînt contopite. Dezlipind nodul $N_1$ de complexul de noduri ale grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma$ sînt contopite într-un singur nod obținem un graf $\gamma_1$ în care nodul $N_1$ este unit prin cîte un segment numai de nodurile grafului $\gamma_1$ care sînt complexe de noduri ale grafului $\Gamma$ în care se află nodurile cu care $N_1$ era unit prin cîte un segment și în graful $\Gamma$, deoarece o dată cu dezlipirea nodului $N_1$ dezlipim și segmentele care unesc nodul $N_1$ de alte noduri în graful $\Gamma$, pentru că prin dezlipirea nodului $N_1$ înțelegem efectuarea operației inverse celei efectuate atunci cînd nodul $N_1$ a fost contopit cu alte noduri în procesul de formare a grafului $\gamma$ din graful $\Gamma$.

În graful $\gamma_1$ nodul $N_1$ nu este unit prin nici un segment de nodul în care se află nodul $N_2$, deoarece dacă în graful $\gamma_1$ nodul $N_1$ ar fi unit printr-un segment de nodul în care se află nodul $N_2$, atunci ar însemna că în graful $\gamma_1$ unul din nodurile grafului $\Gamma$ unit printr-un segment de nodul $N_1$ este contopit cu nodul $N_2$, ceea ce nu se poate pentru că în graful $\Gamma$ orice nod care nu este liber în raport cu nodul $N_1$ nu este liber nici în raport cu nodul $N_2$.

În graful $\gamma_1$ nodul $N_1$ și nodul în care se află $N_2$ sînt, deci, libere între ele. Prin contopirea în graful $\gamma_1$ a nodului $N_1$ cu nodul în care se află $N_2$ contopind și segmentele care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte vom obține un graf $\gamma_2$ care este graf minim pentru graful $\Gamma$. Într-adevăr, dacă $s''$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_2$ și $s'$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_1$ avem $s'' + 1 = s'$, nodurile grafului $\gamma_2$ fiind nodurile grafului $\gamma_1$ minus nodul $N_1$ care dispare și excepțînd nodul în care se află nodul $N_2$, fiindcă acesta se contopește cu nodul $N_1$ atunci cînd graful $\gamma_1$ este transformat în graful $\gamma_2$. Apoi $s' = s + 1$, deoarece graful $\gamma_1$ se obține din graful $\gamma$ prin dezlipirea numai a nodului $N_1$ și această dezlipire se face efectiv, pentru că dacă nu s-ar face efectiv graful $\gamma_1$ ar fi identic cu graful $\gamma$, ceea ce nu se poate, deoarece graful $\gamma$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, iar graful $\gamma_1$ nu este complet avînd nodurile $N_1$ și $N_2$ libere între ele. Rezultă că $s'' + 1 = s + 1$, deci $s'' = s$.

Graful $\gamma_2$ este însă graf minim și pentru graful $\Gamma_1$ obținut din graful $\Gamma$ prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, deoarece putem obține graful $\gamma_2$ din graful $\Gamma_1$ efectuînd operația inversă celei prin care obținem graful $\Gamma_1$ din graful $\gamma_2$, prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de dezlipire a nodurilor în graful $\gamma_2$ cu excepția nodurilor $N_1$ și $N_2$ și deoarece graful $\gamma_2$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, orice graf minim pentru graful $\Gamma$ avînd un număr de noduri cel mult egal cu numărul de noduri al oricărui graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Graful $\gamma_2$ fiind graf minim pentru graful $\Gamma_1$ avem $s'' = s_1$, deci $s_1 = s$.

TEOREMA 2. *Fie $N_1$ și $N_2$ două noduri ale unui graf $\Gamma$ libere între ele și fie $\Gamma'$ un subgraf complet cu $n$ noduri al grafului $\Gamma$, astfel încît orice nod al grafului $\Gamma$ care este liber în raport cu nodul $N_2$ și care nu este nod al grafului $\Gamma'$ unit printr-un segment de nodul $N_1$ este vîrful unei stele formată din cel mult $n-1$ segmente. Fie $\Gamma_1$ graful obținut din graful $\Gamma$, prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, și fie $\Gamma_2$ un graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Atunci $\Gamma_2$ este graf minim și pentru graful $\Gamma$.*

Demonstrație. Toate grafurile minime pentru graful $\Gamma$ avînd același număr $s$ de noduri, iar toate grafurile minime pentru graful $\Gamma_1$ avînd același număr $s_1$ de noduri, graful $\Gamma_1$ fiind obținut din graful $\Gamma$ prin operația de contopire a nodurilor, pentru a demonstra teorema 2 este suficient a demonstra că $s_1 = s$.

Pentru aceasta, fie $\gamma$ un graf minim pentru graful $\Gamma$ în care cele două noduri $N_1$ și $N_2$ nu sînt contopite. Dezlipind nodul $N_1$ de complexul de noduri ale grafului $\Gamma$, care în graful $\gamma$ sînt contopite într-un singur nod, obținem un graf $\gamma_1$ în care nodul $N_1$ este unit prin cîte un segment numai de nodurile grafului $\gamma_1$ care sînt complexe de noduri ale grafului $\Gamma$ în care se află nodurile cu care $N_1$ era unit prin cîte un segment și în graful $\Gamma$, deoarece o dată cu dezlipirea nodului $N_1$ dezlipim și segmentele care unesc nodul $N_1$ de alte noduri în graful $\Gamma$, pentru că prin dezlipirea nodului $N_1$ înțelegem efectuarea operației inverse celei efectuate atunci cînd nodul $N_1$ a fost contopit cu alte noduri în procesul de formare a grafului $\gamma$ din graful $\Gamma$.

În graful $\gamma_1$ nodul $N_1$ poate fi în situația că este unit printr-un segment de nodul în care se află nodul $N_2$. Vom dezlipi toate nodurile grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma_1$ sînt contopite cu nodul în care se află nodul $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$. După această dezlipire obținem un graf $\gamma_2$ în care nodul $N_1$ și nodul în care se află $N_2$ sînt libere între ele.

Prin contopirea în graful $\gamma_2$ a nodului $N_1$ cu nodul în care se află $N_2$, contopind și segmentele care în urma acestei operații apar între aceleași două noduri, vom obține un graf $\gamma_3$ pentru care $s''' + 1 = s''$, unde $s''$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_2$, iar $s'''$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_3$, deoarece nodurile grafului $\gamma_3$ sînt nodurile grafului $\gamma_2$ minus nodul $N_1$ care dispare și exceptînd nodul în care se află nodul $N_2$, fiindcă acesta se contopește cu nodul $N_1$ atunci cînd graful $\gamma_2$ este trans-

format în graful $\gamma_3$. Pentru numărul de noduri ale grafului $\gamma_2$ avem $s'' = s' + k$, unde $s'$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_1$, iar $k$ este numărul de noduri al grafului $\Gamma$, care în graful $\gamma_1$ sînt contopite cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$. Apoi avem $s = s'$ dacă graful $\gamma_1$ este identic cu graful $\gamma$ sau $s + 1 = s'$ dacă graful $\gamma_1$ nu este identic cu graful $\gamma$, deoarece în acest caz graful $\gamma_1$ se obține din graful $\gamma$ prin dezlipirea numai a nodului $N_1$.

În graful $\gamma_3$, în afara celor $k$ noduri ale grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma_1$ erau contopite cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$, mai există cel puțin $n$ noduri care provin din cele $n$ noduri ale subgrafului complet $\Gamma'$ al grafului $\Gamma$, deoarece cele $k$ noduri ale grafului $\Gamma$ nu sînt noduri ale subgrafului $\Gamma'$. Fiecare nod din cele $k$ noduri ale grafului $\Gamma$, care în graful $\gamma_1$ este contopit cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ este unit prin cîte un segment de nodul $N_1$, nefiind nod al subgrafului complet $\Gamma'$ și fiind vîrful unei stele formată din cel mult $n - 1$ segmente, poate fi contopit cu unul din cele $n$ noduri ale grafului $\gamma_3$ care provin din cele $n$ noduri ale subgrafului complet $\Gamma'$ al grafului $\Gamma$. În urma acestei contopiri, contopind și segmentele care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, obținem un graf $\gamma_4$ pentru care $s^{IV} + k = s'''$, unde $s^{IV}$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_4$, deoarece toate cele $k$ noduri, de care este vorba mai sus, dispar în urma acestei contopiri nefiind noduri ale subgrafului complet $\Gamma'$ al grafului $\Gamma$.

Graful $\gamma_4$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, deoarece $s^{IV} + k = s'''$, $s''' + 1 = s''$, $s'' = s' + k$, iar $s = s'$ sau $s + 1 = s'$, deci $s^{IV} + k = s'' - 1 = s' + k - 1$, deci $s^{IV} + 1 = s'$, de unde $s^{IV} + 1 = s$ sau $s^{IV} + 1 = s + 1$, deci $s^{IV} \leqslant s$, ceea ce nu se poate decît dacă $s^{IV} = s$, graful $\gamma$ fiind graf minim pentru graful $\Gamma$.

Graful $\gamma_4$ este însă graf minim și pentru graful $\Gamma_1$, obținut din graful $\Gamma$ prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, deoarece putem obține graful $\gamma_4$ din graful $\Gamma_1$ efectuînd operația inversă celei prin care obținem graful $\Gamma_1$ din graful $\gamma_4$ prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de dezlipire a nodurilor în graful $\gamma_4$ cu excepția nodurilor $N_1$ și $N_2$ și, deoarece graful $\gamma_4$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, orice graf minim pentru graful $\Gamma$ avînd un număr de noduri cel mult egal cu numărul de noduri al oricărui graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Graful $\gamma_4$ fiind graf minim pentru graful $\Gamma_1$ avem $s^{IV} = s_1$, deci $s_1 = s$.

TEOREMA 3. *Fie $N_1$ și $N_2$ două noduri ale unui graf $\Gamma$ libere între ele, nodul $N_2$ fiind un nod al unui subgraf complet $\Gamma'$ cu $n$ noduri al grafului $\Gamma$, astfel încît nodul $N_1$ este unit prin cîte un segment de fiecare nod al grafului $\Gamma'$, cu excepția lui $N_2$, și orice nod al grafului $\Gamma$ care este liber în raport cu nodul $N_2$ unit printr-un segment de nodul $N_1$ este vîrful unei stele formată din cel mult $n$ segmente. Fie $\Gamma_1$ graful obținut din graful $\Gamma$, prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, și fie $\Gamma_2$ un graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Atunci $\Gamma_2$ este graf minim și pentru graful $\Gamma$.*

Demonstrație. Toate grafurile minime pentru graful $\Gamma$ avînd același număr $s$ de noduri, iar toate grafurile minime pentru graful $\Gamma_1$ avînd același număr $s_1$ de noduri, graful $\Gamma_1$ fiind obținut din graful $\Gamma$ prin operația de contopire a nodurilor, pentru a demonstra teorema 3 este suficient a demonstra că $s_1 = s$.

Pentru aceasta, fie $\gamma$ un graf minim pentru graful $\Gamma$ în care cele două noduri $N_1$ și $N_2$ nu sînt contopite. Dezlipind nodul $N_1$ de complexul de noduri ale grafului $\Gamma$, care în graful $\gamma$ sînt contopite într-un singur nod, obținem un graf $\gamma_1$ în care nodul $N_1$ este unit prin cîte un segment numai de nodurile grafului $\gamma_1$ care sînt complexe de noduri ale grafului $\Gamma$ în care se află nodurile cu care $N_1$ era unit prin cîte un segment și în graful $\Gamma$, deoarece o dată cu dezlipirea nodului $N_1$ dezlipim și segmentele care unesc nodul $N_1$ de alte noduri în graful $\Gamma$, pentru că prin dezlipirea nodului $N_1$ înțelegem efectuarea operației inverse celei efectuate atunci cînd nodul $N_1$ a fost contopit cu alte noduri în procesul de formare a grafului $\gamma$ din graful $\Gamma$.

În graful $\gamma_1$ nodul $N_1$ poate fi în situația că este unit printr-un segment de nodul în care se află nodul $N_2$. Vom dezlipi toate nodurile grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma_1$ sînt contopite cu nodul $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$. După această dezlipire obținem un graf $\gamma_2$ în care nodul $N_1$ și nodul în care se află $N_2$ sînt libere între ele.

Prin contopirea în graful $\gamma_2$ a nodului $N_1$ cu nodul în care se află $N_2$, contopind și segmentele care apar în urma acestei operații între aceleași două noduri, vom obține un graf $\gamma_3$ pentru care $s''' + 1 = s''$, unde $s''$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_2$, iar $s'''$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_3$, deoarece nodurile grafului $\gamma_3$ sînt nodurile grafului $\gamma_2$ minus nodul $N_1$ care dispare și exceptînd nodul în care se află nodul $N_2$, fiindcă acesta se contopește cu nodul $N_1$ atunci cînd graful $\gamma_2$ este transformat în graful $\gamma_3$. Pentru numărul de noduri ale grafului $\gamma_2$ avem $s'' = s' + k$, unde $s'$ este numărul de noduri ale grafului $\gamma_1$, iar $k$ este numărul de noduri ale grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma_1$ sînt contopite cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$. Apoi avem $s = s'$ dacă graful $\gamma_1$ este identic cu graful $\gamma$ sau $s + 1 = s'$ dacă graful $\gamma_1$ nu este identic cu graful $\gamma$, deoarece în acest caz graful $\gamma_1$ se obține din graful $\gamma$ prin dezlipirea numai a nodului $N_1$.

În graful $\gamma_3$ în afara celor $k$ noduri ale grafului $\Gamma$ care în graful $\gamma_1$ erau contopite cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ sînt unite prin cîte un segment de nodul $N_1$, mai există cel puțin $n$ noduri care provin din cele $n$ noduri ale subgrafului complet $\Gamma'$ al grafului $\Gamma$, deoarece nici unul din cele $k$ noduri ale grafului $\Gamma$ nu sînt noduri ale subgrafului $\Gamma'$ fiind libere în graful $\Gamma$ în raport cu nodul $N_2$ care este unul din nodurile subgrafului complet $\Gamma'$. Fiecare nod din cele $k$ noduri ale grafului $\Gamma$, care în graful $\gamma_1$ este contopit cu nodul în care se află $N_2$ și care în graful $\Gamma$ este unit prin cîte un segment de nodul $N_1$ fiind liber în graful $\Gamma$ în raport cu nodul $N_2$, este vîrful unei stele formată din cel mult $n$ segmente, deci poate fi contopit cu unul din cele $n + 1$ noduri formate din cele $n$ noduri ale grafului $\gamma_3$ care provin din cele $n$ noduri ale subgrafului complet $\Gamma'$ al grafului $\Gamma$ la care se adaugă nodul grafului $\gamma_3$ care provine din nodul

grafului $\gamma$ prin dezlipirea nodului $N_1$ în cazul cînd graful $\gamma_1$ nu este identic cu graful $\gamma$ și la care se adaugă unul oricare din cele $k$ noduri de care este vorba mai sus, dacă graful $\gamma_1$ este identic cu graful $\gamma$. În urma acestei contopiri, contopind și segmentele care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, obținem un graf $\gamma_4$ pentru care $s^{IV} + k = s'''$, în cazul cînd graful $\gamma_1$ nu este identic cu graful $\gamma$, sau $s^{IV} + k - 1 = s'''$, dacă graful $\gamma_1$ este identic cu graful $\gamma$.

Graful $\gamma_4$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, deoarece $s^{IV} + k = s'''$, $s''' + 1 = s''$, $s'' = s' + k$, $s + 1 = s'$ dacă graful $\gamma_1$ nu este identic cu graful $\gamma$ sau $s^{IV} + k - 1 = s'''$, $s''' + 1 = s''$, $s'' = s' + k$, $s = s'$ dacă graful $\gamma_1$ este identic cu graful $\gamma$, deci $s^{IV} + k = s'' - 1 = s' + k - 1 = s + 1 + k - 1$ în primul caz și $s^{IV} + k - 1 = s'' - 1 = s' + k - 1 = s + k - 1$ în al doilea caz, de unde $s^{IV} = s$.

Graful $\gamma_4$ este însă graf minim și pentru graful $\Gamma_1$, obținut din graful $\Gamma$ prin contopirea nodurilor $N_1$ și $N_2$ într-un singur nod și prin contopire de segmente care apar în urma acestei operații între aceleași două puncte, deoarece putem obține graful $\gamma_4$ din graful $\Gamma_1$ efectuînd operația inversă celei prin care obținem graful $\Gamma_1$ din graful $\gamma_4$ prin aplicarea de un număr finit de ori a operației de dezlipire a nodurilor în graful $\gamma_4$ cu excepția nodurilor $N_1$ și $N_2$ și, deoarece graful $\gamma_4$ este graf minim pentru graful $\Gamma$, orice graf minim pentru graful $\Gamma$ avînd un număr de noduri cel mult egal cu numărul de noduri al oricărui graf minim pentru graful $\Gamma_1$. Graful $\gamma_4$ fiind graf minim pentru graful $\Gamma_1$ avem $s^{IV} = s_1$, deci $s_1 = s$.

TEOREMA 4. *Dacă un graf $\Gamma$ este format din două grafuri complete $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ libere între ele avînd un număr de noduri egal cu $s_1$, respectiv cu $s_2$, atunci graful obținut prin operația de contopire a nodurilor grafurilor $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ care au același număr de ordine după ce nodurile grafurilor $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ au fost numerotate de la 1 la $s_1$, respectiv de la 1 la $s_2$, este graf minim pentru graful $\Gamma$.*

Demonstrație. Putem contopi nodurile notate cu 1 în grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$, deoarece aceste noduri sînt libere între ele grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ fiind libere între ele.

După operația de contopire a nodurilor notate cu $i$ în grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$, unde $1 \leqslant i \leqslant n < \max(s_1, s_2)$, nodurile notate cu $j$ în cele două grafuri, unde $n < j \leqslant \max(s_1, s_2)$ rămîn libere între ele, deoarece dacă aceste noduri nu ar fi libere între ele ar însemna că în urma contopirii nodurilor notate cu $i$ în grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ între nodurile notate cu $j$ în cele două grafuri se interpune un segment al unuia din grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$, ceea ce nu se poate decît dacă nodul notat cu $i$ într-unul din grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ este contopit cu nodul notat cu $j$ în celălalt graf din grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ și acest lucru nu se întîmplă pentru că $j \neq i$, avînd $j > n \geqslant i$.

Deci putem contopi nodurile notate la fel în grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ contopind, mai întîi, nodurile notate cu 1, apoi nodurile notate cu 2 ș.a.m.d. Graful obținut în urma acestei operații este complet, coincizînd ca aspect cu acel graf dintre grafurile $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ care are numărul de noduri egal cu $\max(s_1, s_2)$. Acest graf este graf minim pentru graful $\Gamma$, deoarece graful minim pentru graful $\Gamma$ trebuie să aibă un număr de noduri cel puțin egal

cu max $(s_1, s_2)$, graful $\Gamma$ avînd ca subgraf un graf complet cu un număr de noduri egal cu max $(s_1, s_2)$.

**§ 4.** Prin aplicarea numai a procedeelor din paragraful **3** este posibil ca un graf să se transforme într-un graf care nu este complet şi la care să nu se mai aplice nici unul din procedeele din paragraful **3**. În acest caz, obţinerea grafului minim se face continuînd într-un mod convenabil operaţia de contopire a nodurilor, ceea ce este mai uşor de făcut decît pentru graful iniţial, graful pe care continuăm să-l transformăm avînd un număr mai mic de noduri decît graful iniţial.

Atunci cînd începem să transformăm graful iniţial cu ajutorul operaţiei de contopire a nodurilor sale pentru obţinerea grafului minim este indicat să începem cu procedeul dat de teorema 1, deoarece se micşorează numărul de laturi ale stelelor care au vîrfurile în nodurile care nu sînt libere în raport cu nodul $N_1$ prin contopirea într-un segment a celor două segmente care unesc nodul considerat cu nodul rezultat în urma contopirii nodurilor $N_1$ şi $N_2$, astfel de segmente existînd, orice nod care nu este liber în raport cu $N_1$ nefiind liber nici în raport cu nodul $N_2$. Această micşorare a numărului de laturi ale unor stele o dată cu transformarea grafului iniţial prin utilizarea teoremei 1 favorizează aplicarea ulterioară a teoremelor 2 şi 3.

În cazul cînd un graf este constituit dintr-un număr finit de grafuri libere între ele, trebuie să fie determinate, mai întîi, grafurile minime pentru fiecare componentă în parte şi să fie aplicat apoi procedeul cuprins în teorema 4, deoarece graful minim pentru graful dat nu poate să aibă un număr de noduri mai mic decît cel mai mare număr de noduri dintre numerele de noduri ale grafurilor minime pentru componentele grafului iniţial.

Primită la redacţie la 26 iunie 1962

## ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СХЕМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РЕЛЕ

### РЕЗЮМЕ

Для получения минимального числа реле в задаче синтеза схем с заданными рабочими условиями для исполнительных элементов, необходимо подходящим способом отождествить неразличные положения релейных контактов, при этом под положением релейных контактов понимается значение системы переменных $x, y, \ldots, z$, сопоставляемых реле $X, Y, \ldots, Z$.

В настоящей работе каждое положение релейных контактов изображается точкой, причем двум отдельным положениям соответствуют две отдельные точки, а двум различным положениям соответствует отрезок, соединяющий эти два положения.

Таким образом, каждому множеству положений релейных контактов сопоставляется граф. Минимуму положений релейных контактов, полученному отождествлением неразличных положений, соответствует полный граф с минимальным числом узлов по сравнению со всеми полными графами, полученными из сопоставленного рассматриваемому множеству релейных контактов графа путем слияния узлов, не соединенных отрезками, в один узел, и одновременно слиянием в один отрезок отрезков, появляющихся между одними и теми же узлами после слияния узлов.

В работе дается несколько способов превращения одного графа в другой слиянием не связанных отрезками узлов с последующим соответственным слиянием отрезков так, чтобы любой минимизирующий граф для полученного, как указано выше, графа был минимизирующим и для начального графа.

## UTILISATION DES GRAPHES POUR OBTENIR LE SCHÉMA À NOMBRE MINIMUM DE RELAIS

RÉSUMÉ

Dans le problème de la synthèse des schémas à conditions de travail données pour les éléments exécutifs, pour obtenir le nombre minimum de relais, nous devons rendre identiques, d'une manière convenable, les positions des contacts de relais qui ne sont pas différentes, une position des contacts de relais étant une valeur du système de variables $x, y, \ldots, z$ associées aux relais $X, Y, \ldots, Z$.

Dans le présent travail, chaque position des contacts de relais est représentée par un point, à deux positions distinctes correspondant deux points distincts, à deux positions différentes correspondant un segment qui relie les deux positions considérées.

De cette façon, à chaque ensemble de positions des contacts de relais on associe un graphe, au minimum de positions des contacts de relais (obtenu en rendant identiques les positions qui ne sont pas différentes) correspondant un graphe complet ayant un nombre minimum de nœuds, choisi parmi tous les graphes complets obtenus à partir du graphe associé à l'ensemble considéré de positions des contacts de relais par la voie de l'identification des nœuds non liés des segments, en identifiant aussi, en même temps, en un segment, les segments qui apparaissent entre les deux mêmes nœuds par suite de l'identification des nœuds.

L'auteur indique quelques procédés de transformation d'un graphe en un autre graphe par identification de ceux de ses nœuds qui ne sont pas reliés par des segments, suivie de l'identification de segments correspondante, de manière que tout graphe minimum pour le graphe obtenu, par suite de l'opération ci-dessus, soit également un graphe minimum pour le graphe initial.

## BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Contribuţii la teoria algebrică a mecanismelor automate.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., **VII**, *2*, 183—230 (1955).
2. GR. C. MOISIL, GH. IOANIN, *La synthèse des schémas à contacts et relais avec des conditions de travail données pour les éléments exécutifs.* Rev. math. pures et appl., Acad. R.P.R., **I**, *2*, 167—198 (1956).
3. GH. IOANIN, *Asupra sintezei schemelor cu condiţii de lucru date pentru elementele executive.* Com. Acad. R.P.R., **V**, *6*, 935—942 (1955).
4. GR. C. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
5. КОНСТАНТИН П. ПОПОВИЧ, *Об условии стабилизации процесса положений релейных контактов при заданном управлении.* Rev. math. pures et appl., Acad. R.P.R., **II**, 509—534 (1957).

# ASUPRA SUBGRUPURILOR GRUPULUI DE MIȘCĂRI AL UNUI SPAȚIU RIEMANNIAN $V_3$ CU CURBURA CONSTANTĂ NEGATIVĂ

DE

MARIUS I. STOKA

Într-o lucrare anterioară [2] am determinat transformările infinitezimale și structura grupului de mișcări al unui spațiu riemannian $V_3$ cu curbura constantă negativă $k$ a cărui metrică este dată de formula lui Beltrami

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{-k\,(x^1)^2}.$$

Am obținut astfel grupul definit de operatorii:

$$X_1 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^1 x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_2 f = 2x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^2 x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad X_4 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$X_5 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \qquad X_6 f = \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

cu structura:

$$\begin{aligned} &(X_1X_3) = -(X_2X_4) = X_1, && (X_1X_4) = (X_2X_3) = -X_2, \\ &(X_1X_5) = (X_2X_6) = -2X_3, && (X_1X_6) = -(X_2X_5) = 2X_4, \\ &(X_3X_5) = (X_4X_6) = -X_5, && (X_3X_6) = -(X_4X_5) = -X_6, \end{aligned} \tag{2}$$

$$(X_1X_2) = (X_3X_4) = (X_5X_6) = 0.$$

În această lucrare vom determina toate subgrupurile acestui grup, subgrupuri care ne sînt necesare la anumite probleme de geometrie integrală în spații riemanniene.

## I

În primul rînd vom determina subgrupurile cu doi parametri ale grupului (1).

Fie $Y_1 f = \alpha_i X_i f$, $Y_2 f = \beta_i X_i f$ $(i = 1, \ldots, 6)$ operatorii unui subgrup cu doi parametri ai grupului (1). Putem presupune că grupul definit de operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$ are una sau alta din structurile

$$1^\circ \ (Y_1 \ Y_2) = Y_1 ; \qquad 2^\circ \ (Y_1 \ Y_2) = 0.$$

În cazul 1°, avînd în vedere ecuațiile (2) rezultă :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_3 + \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_4 = \alpha_1 , \\
&\alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_1\beta_4 = \alpha_2 , \\
&\alpha_5\beta_1 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 - \alpha_2\beta_6 = \frac{\alpha_3}{2}, \\
&\alpha_1\beta_6 + \alpha_5\beta_2 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_2\beta_5 = \frac{\alpha_4}{2}, \\
&\alpha_5\beta_3 + \alpha_6\beta_4 - \alpha_3\beta_5 - \alpha_4\beta_6 = \alpha_5 , \\
&\alpha_4\beta_5 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_5\beta_4 - \alpha_3\beta_6 = \alpha_6 .
\end{aligned} \tag{3}$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ și cel puțin una din constantele $\alpha_3$, $\alpha_4$ este nenulă, sistemul (3) este imposibil.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, rezultă că cel puțin una din constantele $\alpha_5$, $\alpha_6$ este nenulă și din ultimele patru ecuații (3) deducem

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0, \qquad (\beta_3 - 1)^2 + \beta_4^2 = 0,$$

adică

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0, \qquad \beta_3 = 1.$$

Cei doi operatori sînt deci

$$Y_1 f = \alpha_5 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \alpha_6 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad Y_2 f = (x^1 + \beta_5) \frac{\partial f}{\partial x^1} + (x^2 + \beta_6) \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3} .$$

Presupunînd $\alpha_5 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{\alpha_5} (x^1 + \beta_1), \quad \bar{x}^2 = - \alpha_6 x^1 + \alpha_5 x^2 + \alpha_5 \beta_6 - \alpha_6 \beta_5 , \quad \bar{x}^3 = x^3,$$

acești operatori devin

$$Y_1 f = \boldsymbol{X}_5 f, \qquad Y_2 f = \boldsymbol{X}_3 f.$$

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *avem subgrupul* $G_2' \equiv [X_3, X_5]$.
Dacă $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, din sistemul (3) rezultă

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0, \quad \beta_3 = -1.$$

Operatorii subgrupului sînt

$$Y_1 f = \alpha_2 X_2 f, \qquad Y_2 f = \beta_1 X_1 f + \beta_2 X_2 f - X_3 f.$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, deci

$$Y_1 f = X_2 f, \qquad Y_2 f = \beta_1 X_1 f - X_3 f.$$

Dacă $\beta_1 = 0$, subgrupul este definit de operatorii $X_2 f$ și $X_3 f$.
Dacă $\beta_1 \neq 0$, prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^i = -\beta_1 x^i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

și apoi printr-o schimbare de parametri, putem presupune că subgrupul este definit de operatorii

$$Y_1 f = X_2 f, \qquad Y_2 f = (X_1 + X_3) f.$$

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, *avem subgrupul* $G_2'' \equiv$ $\equiv [X_2, \eta X_1 + X_3]$, $(\eta = 0,1)$.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile și una de parametri, putem presupune $\alpha_2 = \alpha_4 = 1$.

Din sistemul (3) rezultă

$$\alpha_5 = 0, \alpha_6 = -\frac{1}{4}, \quad \beta_1 = \beta_3 + 1, \quad \beta_2 = \beta_4, \quad \beta_5 = \frac{\beta_3 - 1}{4}, \quad \beta_6 = -\frac{\beta_4}{4}.$$

Operatorii $Y_1 f$ și $Y_2 f$ sînt deci

$$Y_1 f = X_2 f + X_4 f - \frac{1}{4} X_6 f, \quad Y_2 f = \beta_4 \left( X_2 f + X_4 f - \frac{1}{4} X_6 f \right) +$$

$$+ (\beta_3 + 1) X_1 f + \beta_3 X_3 f + \frac{\beta_3 - 1}{4} X_5 f.$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că avem

$$Y_1 f = X_2 f + X_4 f - \frac{1}{4} X_6 f, \quad Y_2 f = (\beta_3 + 1) X_1 f + \beta_3 X_3 f + \frac{\beta_3 - 1}{4} X_5 f.$$

Făcînd o schimbare de variabile de forma

$$\overline{x}^1 = \lambda \left( x^1 + \frac{1}{2} \right), \quad \overline{x}^2 = \lambda x^2, \quad \overline{x}^3 = \lambda x^3$$

și apoi o schimbare de parametri, putem reduce operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$ la forma

$$Y_1 f = X_2 f, \quad Y_2 f = \eta X_1 f + X_3 f.$$

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, *avem subgrupul* $G_2''$.
Același rezultat se obține în cazul $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$.
Dacă $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, putem presupune $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ și sistemul (3) ne dă

$$\alpha_5 = \frac{\alpha_4}{2}, \quad \alpha_6 = \frac{1 - \alpha_4^2}{4}, \quad \beta_3 = \alpha_4\beta_1 + \beta_2 - 1, \quad \beta_4 = \alpha_4\beta_2 - \beta_1,$$

$$\beta_5 = \frac{2\alpha_4(\beta_2 - 1) + \beta_1(\alpha_4^2 - 1)}{4}, \quad \beta_6 = \frac{2\alpha_4\beta_1 + \beta_2(1 - \alpha_4^2) - 2}{4}.$$

Făcînd o schimbare de variabile de forma

$$\overline{x}^1 = \lambda\left(x^1 + \frac{\alpha_4}{2}\right), \quad \overline{x}^2 = \lambda\left(x^2 + \frac{1}{2}\right), \quad \overline{x}^3 = \lambda x^3$$

și o schimbare de parametri, cei doi operatori devin

$$Y_1 f = X_2 f, \quad Y_2 f = \eta X_1 f + X_3 f.$$

Obținem deci același subgrup $G_2''$.
Rezultă că, *dacă* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, *avem subgrupul* $G_2''$.
În cazul $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, obținem același rezultat.
Vom considera acum cazul în care $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$.
Făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \alpha_1 x^1 + \frac{\alpha_1(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}, \quad \overline{x}^2 = \alpha_1 x^2 + \frac{\alpha_1(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}, \quad \overline{x}^3 = \alpha_1 x^3,$$

operatorul $Y_1 f$ devine

$$Y_1 f = X_1 f + \lambda X_2 f + \mu X_5 f + \nu X_6 f, \quad \left(\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 0\right).$$

De asemenea, printr-o schimbare de parametri putem presupune că operatorul $Y_2 f$ este

$$Y_2 f = \beta_2 X_2 f + \beta_3 X_3 f + \beta_4 X_4 f + \beta_5 X_5 f + \beta_6 X_6 f.$$

Din sistemul (3) rezultă

$$\mu = \nu = \beta_5 = \beta_6 = 0, \quad \beta_3 = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad \beta_4 = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Deci operatorii grupului se scriu

$$Y_1 f = X_1 f + \lambda X_2 f, \quad Y_2 f = \beta_2 X_2 f + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} X_3 f - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} X_4 f.$$

Dacă $\beta_2 = 0$, printr-o schimbare de parametri, subgrupul este

$$G_2''' \equiv \left[X_1 + \lambda X_2, \ \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} X_3 + X_4\right].$$

Dacă $\beta_2 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x}^i = -\frac{\beta_2(1+\lambda^2)}{2\lambda} x^i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

urmată de o schimbare de parametri, obținem subgrupul

$$G_2^{IV} \equiv [X_1 + \lambda X_2, \quad X_2 + \mu X_3 + X_4], \qquad (\lambda \neq 0).$$

Deci, *dacă* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, *avem subgrupurile* $G_2'''$ *și* $G_2^{IV}$.

Rezultă că, *orice subgrup neabelian cu doi parametri al grupului* (1), *poate fi adus la una din formele* $G_2'$, $G_2''$, $G_2'''$, $G_2^{IV}$.

Vom căuta acum subgrupurile abeliene cu doi parametri ale grupului (1). În acest caz, din ecuațiile (2) rezultă:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_3 + \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_4 = 0,\\
&\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_4\beta_1 - \alpha_3\beta_2 = 0,\\
&\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_2 = 0,\\
&\alpha_1\beta_6 + \alpha_5\beta_2 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_2\beta_5 = 0,\\
&\alpha_3\beta_5 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_5\beta_3 - \alpha_6\beta_4 = 0,\\
&\alpha_3\beta_6 + \alpha_5\beta_4 - \alpha_6\beta_3 - \alpha_4\beta_5 = 0.
\end{aligned} \tag{3'}$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, cel puțin una din constantele $\alpha_5$, $\alpha_6$ este nenulă și din sistemul (3') rezultă

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.$$

Operatorii subgrupului sînt

$$Y_1 f = \alpha_5 X_5 f + \alpha_6 X_6 f, \qquad Y_2 f = \beta_5 X_5 f + \beta_6 X_6 f.$$

Avînd în vedere că acești operatori sînt independenți avem $\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 \neq 0$. Prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \frac{\beta_6 x^1 - \beta_5 x^2}{\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5}, \quad \overline{x}^2 = \frac{-\alpha_6 x^1 - \alpha_5 x^2}{\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5}, \quad \overline{x}^3 = x^3,$$

operatorii grupului devin $Y_1 f = X_5 f$, $Y_2 f = X_6 f$.

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, *avem subgrupul* $G_2^V \equiv [X_5, X_6]$.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \alpha_4 x^1 - \alpha_6, \quad \overline{x}^2 = \alpha_4 x^2 + \alpha_5, \quad \overline{x}^3 = x^3,$$

urmată de o schimbare de parametri, putem presupune că operatorul $Y_1 f$ este

$$Y_1 f = X_4 f,$$

deci că $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$.

Din sistemul (3') rezultă $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0$.

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că

$$Y_2 f = X_3 f.$$

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 \neq 0$, *avem subgrupul* $G_2^{VI} \equiv [X_3, X_4]$.

În cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ obținem același grup $G_2^{VI}$.

Deci, *dacă* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *avem subgrupurile* $G_2^{V}$ *și* $G_2^{VI}$.

Dacă $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, putem presupune că $\alpha_2 = 1$ și prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + \frac{\alpha_4}{2}, \quad \overline{x}^2 = x^2 + \frac{\alpha_3}{2}, \quad \overline{x}^3 = x^3,$$

obținem

$$Y_1 f = X_2 f + \lambda X_5 f + \mu X_6 f.$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (3′) obținem

$$\beta_3 = \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = \lambda\beta_2 - \mu\beta_1, \quad \beta_6 = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2.$$

Operatorul $Y_2 f$ este deci

$$Y_2 f = \beta_1 (X_1 f - \mu X_5 f + \lambda X_6 f) + \beta_2 (X_2 f + \lambda X_5 f + \mu X_6 f)$$

sau printr-o schimbare de parametri

$$Y_2 f = X_1 f - \mu X_5 f + \lambda X_6 f.$$

Dacă $\lambda = \mu = 0$, avem subgrupul $G_2^{VII} \equiv [X_1, X_2]$.

Dacă $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, printr-o schimbare de variabile și de parametri obținem subgrupul $G_2^{VIII} \equiv [X_1 \pm X_5, \; X_2 \mp X_6]$.

Dacă $\lambda \neq 0$, obținem subgrupul $G_2^{IX} \equiv [X_1 + KX_5 \pm X_6, X_2 \mp X_5 - KX_6]$.

Aceleași subgrupuri le obținem și în cazul $\alpha_1 \neq 0$.

Avem deci :

*Subgrupurile cu doi parametri ale grupului* (1) *de mișcări al unui spațiu riemannian* $V_3$ *cu curbura constantă negativă se pot reduce, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele* :

$$G_2' \equiv [X_3, X_5], \quad G_2'' \equiv [X_2, \eta X_1 + X_3] \quad (\eta = 0,1),$$

$$G_2''' \equiv \left[X_1 + \lambda X_2, \; \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} X_3 + X_4\right] \quad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{IV} \equiv [X_1 + \lambda X_2, \; X_2 + \mu X_3 + X_4] \quad (\lambda \neq 0), \quad G_2^{V} \equiv [X_5, X_6],$$

$$G_2^{VI} \equiv [X_3, X_4], \quad G_2^{VII} \equiv [X_1, X_2], \quad G_2^{VIII} \equiv [X_1 \pm X_5, \; X_2 \mp X_6],$$

$$G_2^{IX} \equiv [X_1 + KX_5 \pm X_6, \; X_2 \mp X_5 - KX_6].$$

## II

Vom căuta acum subgrupurile cu trei parametri ale grupului (1).

Fie $Y_1 f = \alpha_i X_i f$, $Y_2 f = \beta_i X_i f$, $Y_3 f = \gamma_i X_i f$, $\quad (i = 1, \ldots, 6)$

operatorii unui subgrup cu trei parametri ai grupului (1). Putem presupune [3][1]) că grupul definit de operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ are una din structurile :

$$1^\circ\ (Y_1Y_2) = -KY_2, \quad (Y_1Y_3) = (K-2)\,Y_3, \quad (Y_2Y_3) = 0, \quad (K \neq 0)$$
$$2^\circ\ (Y_1Y_2) = -Y_2 + KY_3, \quad (Y_1Y_3) = -Y_2 - KY_2, \quad (Y_2Y_3) = 0, \quad (K \neq 0)$$
$$3^\circ\ (Y_1Y_2) = -Y_2 + KY_3, \quad (Y_1Y_3) = -Y_3, \quad (Y_2Y_3) = 0, \quad (K \neq 0)$$
$$4^\circ\ (Y_1Y_2) = \varepsilon Y_3, \quad (Y_1Y_3) = -Y_2, \quad (Y_2Y_3) = Y_1, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$
$$5^\circ\ (Y_1Y_2) = \varepsilon Y_3, \quad (Y_1Y_3) = -Y_2, \quad (Y_2Y_3) = 0, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$
$$6^\circ\ (Y_1Y_2) = Y_3, \quad (Y_1Y_3) = (Y_2Y_3) = 0,$$
$$7^\circ\ (Y_1Y_2) = (Y_1Y_3) = (Y_2Y_3) = 0.$$

În cazul 1°, avînd în vedere ecuațiile (2) obținem sistemul

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 = -K\beta_1,\\
&\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = K\beta_2,\\
&\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 = \frac{K\beta_3}{2},\\
&\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 = -\frac{K\beta_4}{2},\\
&\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 = K\beta_5,\\
&\alpha_3\beta_6 - \alpha_6\beta_3 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 = K\beta_6,\\
&\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_2\gamma_4 + \alpha_4\gamma_2 = (K-2)\,\gamma_1,\\
&\alpha_1\gamma_4 - \alpha_4\gamma_1 + \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 = (2-K)\,\gamma_2,\\
&\alpha_1\gamma_5 - \alpha_5\gamma_1 + \alpha_2\gamma_6 - \alpha_6\gamma_2 = \frac{(2-K)\,\gamma_3}{2},\\
&\alpha_1\gamma_6 - \alpha_6\gamma_1 - \alpha_2\gamma_5 + \alpha_5\gamma_2 = \frac{(K-2)\,\gamma_4}{2},\\
&\alpha_3\gamma_5 - \alpha_5\gamma_3 + \alpha_4\gamma_6 - \alpha_6\gamma_4 = (2-K)\,\gamma_5,\\
&\alpha_3\gamma_6 - \alpha_6\gamma_3 - \alpha_4\gamma_5 + \alpha_5\gamma_4 = (2-K)\,\gamma_6,\\
&\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 - \beta_2\gamma_4 + \beta_4\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_4 - \beta_4\gamma_1 + \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_5 - \beta_5\gamma_1 + \beta_2\gamma_6 - \beta_6\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_6 - \beta_6\gamma_1 - \beta_2\gamma_5 + \beta_5\gamma_2 = 0,\\
&\beta_3\gamma_5 - \beta_5\gamma_3 + \beta_4\gamma_6 - \beta_6\gamma_4 = 0,\\
&\beta_3\gamma_6 - \beta_6\gamma_3 - \beta_4\gamma_5 + \beta_5\gamma_4 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

[1]) p. 91 și 94.

Vom presupune întîi că $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Din primele două ecuații (4) rezultă

$$\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 = 0,$$
$$\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_4 = 0.$$

Dacă $\beta_3^2 + \beta_4^2 \neq 0$, de aici rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, care înlocuite în următoarele două ecuații (4) ne dau $\beta_3 = \beta_4 = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Din primele șase ecuații (4) rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \qquad \alpha_3 = K.$$

Înlocuind aceste valori în celelalte ecuații (4) și avînd în vedere că $\beta_5^2 + \beta_6^2 \neq 0$ [1]), deducem

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0, \qquad K = 1.$$

Subgrupul este definit deci de operatorii

$$Y_1 f = X_3 f + \alpha_5 X_5 f + \alpha_6 X_6 f, \quad Y_2 f = \beta_5 X_5 f + \beta_6 X_6 f, \quad Y_3 f = \gamma_5 X_5 f + \gamma_6 X_6 f.$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că avem

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \beta_6 = \gamma_5 = 0, \quad \beta_5 = \gamma_6 = 1.$$

Deci, *dacă* $\beta_1 = \beta_2 = 0$, *avem subgrupul* $G_3' \equiv [X_3, X_5, X_6]$.

Vom considera acum cazul în care $\beta_1 \neq 0$. În acest caz, printr-o schimbare de parametri putem presupune că $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$. Din sistemul (4) deducem

$$\gamma_3 = \frac{(\beta_2\beta_3 - \beta_4)\gamma_2}{1 + \beta_2^2}, \qquad \gamma_4 = \frac{(\beta_2\beta_4 + \beta_3)\gamma_2}{1 + \beta_2^2},$$
$$\gamma_5 = \frac{(\beta_2\beta_5 - \beta_6)\gamma_2}{1 + \beta_2^2}, \qquad \gamma_6 = \frac{(\beta_2\beta_6 + \beta_5)\gamma_2}{1 + \beta_2^2}. \tag{4'}$$

De aici rezultă că $\gamma_2 \neq 0$, căci în caz contrar am avea $Y_3 f = 0$.

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că

$$\gamma_2 = 1, \qquad \alpha_2 = \beta_2 = 0.$$

Deci, dacă $\beta_1 \neq 0$, putem presupune că avem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = 0, \qquad \beta_1 = \gamma_2 = 1.$$

Cu aceste valori sistemul (4) este imposibil.

Același rezultat se obține dacă $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$.

Rezultă că, *orice subgrup de tipul* 1° *al grupului* (1) *poate fi redus la forma* $G_3'$.

[1]) Dacă $\beta_5 = \beta_6 = 0$, am avea $Y_2 f = 0$ și subgrupul ar fi cu doi parametri.

În cazul 2°, în baza ecuațiilor (2) obținem sistemul

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 = -\beta_1 + K\gamma_1,\\
&\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \beta_2 - K\gamma_2,\\
&\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 = \frac{\beta_3 - K\gamma_3}{2},\\
&\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 = \frac{-\beta_4 + K\gamma_4}{2},\\
&\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 = \beta_5 - K\gamma_5,\\
&\alpha_3\beta_6 - \alpha_6\beta_3 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 = \beta_6 - K\gamma_6,\\
&\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_2\gamma_4 + \alpha_4\gamma_2 = -\gamma_1 - K\beta_1,\\
&\alpha_1\gamma_4 - \alpha_4\gamma_1 + \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 = \gamma_2 + K\beta_2,\\
&\alpha_1\gamma_5 - \alpha_5\gamma_1 + \alpha_2\gamma_6 - \alpha_6\gamma_2 = \frac{\gamma_3 + K\beta_3}{2},\\
&\alpha_1\gamma_6 - \alpha_6\gamma_1 - \alpha_2\gamma_5 + \alpha_5\gamma_2 = \frac{\gamma_4 + K\beta_4}{2},\\
&\alpha_3\gamma_5 - \alpha_5\gamma_3 + \alpha_4\gamma_6 - \alpha_6\gamma_4 = \gamma_5 + K\beta_5,\\
&\alpha_3\gamma_6 - \alpha_6\gamma_3 - \alpha_4\gamma_5 + \alpha_5\gamma_4 = \gamma_6 + K\beta_6,\\
&\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 - \beta_2\gamma_4 + \beta_4\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_4 - \beta_4\gamma_1 + \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_5 - \beta_5\gamma_1 + \beta_2\gamma_6 - \beta_6\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_6 - \beta_6\gamma_1 - \beta_2\gamma_5 + \beta_5\gamma_2 = 0,\\
&\beta_3\gamma_5 - \beta_5\gamma_3 + \beta_4\gamma_6 - \beta_6\gamma_4 = 0,\\
&\beta_3\gamma_6 - \beta_6\gamma_3 - \beta_4\gamma_5 + \beta_5\gamma_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Dacă $\beta_1 = \beta_2 = 0$, din acest sistem rezultă

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0,
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_3\beta_5 + \alpha_4\beta_6 = \beta_5 - K\gamma_5,\\
\alpha_3\beta_6 - \alpha_4\beta_5 = \beta_6 - K\gamma_6,\\
\alpha_3\gamma_5 + \alpha_4\gamma_6 = \gamma_5 + K\beta_5,\\
\alpha_3\gamma_6 - \alpha_4\gamma_5 = \gamma_6 + K\beta_6,
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\beta_5^2 + \beta_6^2 \neq 0,\quad \gamma_5^2 + \gamma_6^2 \neq 0.
$$

Operatorii subgrupului sînt deci

$$
Y_1 f = \alpha_3 X_3 f + \alpha_4 X_4 f + \alpha_5 X_5 f + \alpha_6 X_6 f,\qquad Y_2 f = \beta_5 X_5 f + \beta_6 X_6 f,
$$

$$
Y_3 f = \gamma_5 X_5 f + \gamma_6 X_6 f.
$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \beta_6 = \gamma_5 = 0, \quad \beta_5 = \gamma_6 = 1.$$

Înlocuind aceste valori în (6) rezultă $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = K$.

Deci, *dacă* $\beta_1 = \beta_2 = 0$, *avem subgrupul* $G_3'' \equiv [X_3 + KX_4, X_5, X_6]$, $(K \neq 0)$.

Dacă $\beta_1 \neq 0$ sau $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, sistemul (5) este imposibil.

Rezultă că, *orice subgrup de tipul* 2° *al grupului* (1) *poate fi redus la forma* $G_3''$.

În cazurile 3° și 4°, sistemele obținute nu au soluții acceptabile, deci *nu există un subgrup al grupului* (1) *de tipul* 3° *sau* 4°.

În cazul 5°, din ecuațiile (2) deducem sistemul

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 = -\varepsilon\gamma_1,\\
&\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \varepsilon\gamma_2,\\
&\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 = \frac{\varepsilon\gamma_3}{2},\\
&\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 = \frac{\varepsilon\gamma_4}{2},\\
&\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 = \varepsilon\gamma_5,\\
&\alpha_3\beta_6 - \alpha_6\beta_3 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 = \varepsilon\gamma_6,\\
&\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_2\gamma_4 + \alpha_4\gamma_2 = -\beta_1\\
&\alpha_1\gamma_4 - \alpha_4\gamma_1 + \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 = \beta_2,\\
&\alpha_1\gamma_5 - \alpha_5\gamma_1 + \alpha_2\gamma_6 - \alpha_6\gamma_2 = \frac{\beta_3}{2},\\
&\alpha_1\gamma_6 - \alpha_6\gamma_1 - \alpha_2\gamma_5 + \alpha_5\gamma_2 = \frac{\beta_4}{2},\\
&\alpha_3\gamma_5 - \alpha_5\gamma_3 + \alpha_4\gamma_6 - \alpha_6\gamma_4 = \beta_5,\\
&\alpha_3\gamma_6 - \alpha_6\gamma_3 - \alpha_4\gamma_5 + \alpha_5\gamma_4 = \beta_6,\\
&\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 - \beta_2\gamma_4 + \beta_4\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_4 - \beta_4\gamma_1 + \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_5 - \beta_5\gamma_1 + \beta_2\gamma_6 - \beta_6\gamma_2 = 0,\\
&\beta_1\gamma_6 - \beta_6\gamma_1 - \beta_2\gamma_5 + \beta_5\gamma_2 = 0,\\
&\beta_3\gamma_5 - \beta_5\gamma_3 + \beta_4\gamma_6 - \beta_6\gamma_4 = 0,\\
&\beta_3\gamma_6 - \beta_6\gamma_3 - \beta_4\gamma_5 + \beta_5\gamma_4 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Dacă $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, din acest sistem rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.$$

Printr-o schimbare de parametri putem presupune $\beta_5 = \gamma_6 = 1$, $\alpha_5 = \alpha_6 = \beta_6 = \gamma_5 = 0$ și din sistemul (7) deducem $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\varepsilon = -1$.

Deci, în acest caz, avem subgrupul $G_3''' \equiv [X_4, X_5, X_6]$.

Dacă $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3^2 + \beta_4^2 \neq 0$, sistemul (7) este imposibil.

Dacă $\beta_1 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri putem presupune $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ și din sistemul (7) rezultă că $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ sînt dați de relațiile (4′). De aici deducem că $\gamma_2 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri obținem $\gamma_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Înlocuind aceste valori în (7) obținem

$$\alpha_4 = -1, \quad \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0,$$

deci avem subgrupul $G_3^{IV} \equiv [X_1, X_2, X_4]$.

Deci, *orice subgrup de tipul* 5° *al grupului* (1) *poate fi redus la una din formele* $G_3'''$, $G_3^{IV}$.

În cazurile 6° și 7°, sistemele obținute nu admit soluții acceptabile, deci *nu există nici un subgrup al grupului* (1) *de forma* 6° *sau* 7°.

Rezultă că

*Subgrupurile cu trei parametri ai grupului* (1) *de mișcări ale unui spațiu* $V_3$ *cu curbura constantă negativă se pot reduce, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele:*

$$G_3' \equiv [X_3 + \lambda X_4, X_5, X_6], \quad G_3'' \equiv [X_4, X_5, X_6], \quad G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_4].$$

## III

Vom determina acum subgrupurile cu patru parametri ale grupului (1).

Notăm cu

$$Y_1 f = \alpha_i X_i f, \quad Y_2 f = \beta_i X_i f, \quad Y_3 f = \gamma_i X_i f, \quad Y_4 f = \delta_i X_i f,$$

operatorii unui subgrup cu patru parametri ai grupului (1).

A. Dobrescu a arătat [1][1]) că orice grup cu patru parametri poate fi redus la una din formele:

$$1° \ (X_1X_2) = \varepsilon X_3, \ (X_1X_3) = X_2, \ (X_2X_4) = \frac{1}{2} X_2, \ (X_3X_4) = \frac{1}{2} X_3, \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

$$2° \ (X_1X_4) = aX_1, \ (X_2X_4) = bX_2, \quad (X_3X_4) = (1 - a - b) X_3;$$

$$3° \ (X_1X_4) = aX_1, \ (X_2X_4) = X_1 + aX_2, \ (X_3X_4) = (1 - 2a) X_3;$$

$$4° \ (X_1X_4) = \frac{1}{3} X_1, \ (X_2X_4) = X_1 + \frac{1}{3} X_2, \ (X_3X_4) = X_2 + \frac{1}{3} X_3;$$

$$5° \ (X_1X_4) = aX_1 - bX_2, \ (X_2X_4) = bX_1 + aX_2, \ (X_3X_4) = (1-2a) X_3, \quad (b \neq 0);$$

$$6° \ (X_1X_2) = X_3, \ (X_1X_4) = aX_1, \ (X_2X_4) = \left(\frac{1}{2} - a\right) X_2, \ (X_3X_4) = \frac{1}{2} X_3, \quad (a \neq 0);$$

[1]) p. 415 și 422.

$7°\ (X_1X_2)=X_3,\ (X_1X_4)=\frac{1}{4}X_1,\ (X_2X_4)=X_1+\frac{1}{4}X_2,\ (X_3X_4)=\frac{1}{2}X_3;$

$8°\ (X_1X_2)=X_3,\ (X_1X_4)=\frac{1}{4}X_1-aX_2,\ (X_2X_4)=aX_1+\frac{1}{4}X_2,$

$$(X_3X_4)=\frac{1}{2}X_3, \qquad (a\neq 0);$$

$9°\ (X_1X_2)=\varepsilon X_3,\ (X_1X_3)=-X_2,\ (X_2X_3)=X_1;$

$10°\ (X_1X_2)=X_2,\ (X_1X_3)=-X_3,\ (X_2X_3)=X_4;$

$11°\ (X_1X_2)=X_2,\ (X_1X_3)=aX_3,\ (X_1X_4)=-(1+a)X_4,\quad (a\neq 0,-2);$

$12°\ (X_1X_2)=X_2+X_3,\ (X_1X_3)=X_3,\ (X_1X_4)=-2X_4;$

$13°\ (X_1X_2)=X_3,\ (X_1X_3)=X_1;$

$14°\ (X_1X_2)=X_3;$

$15°\ (X_hX_k)=0,$

parantezele nescrise fiind nule.

În cazul 1°, avînd în vedere ecuațiile (2) rezultă

$$\begin{cases}\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1-\alpha_2\beta_4+\alpha_4\beta_2=\varepsilon\gamma_1,\\ \alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=-\varepsilon\gamma_2,\\ \alpha_1\beta_5-\alpha_5\beta_1+\alpha_2\beta_6-\alpha_6\beta_2=-\varepsilon\frac{\gamma_3}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1\beta_6-\alpha_6\beta_1-\alpha_2\beta_5+\alpha_5\beta_2=\varepsilon\frac{\gamma_4}{2},\\ \alpha_3\alpha_5-\alpha_5\beta_3+\alpha_4\beta_6-\alpha_6\beta_4=-\varepsilon\gamma_5,\\ \alpha_3\beta_6-\alpha_6\beta_3-\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4=-\varepsilon\gamma_6,\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1-\alpha_2\gamma_4+\alpha_4\gamma_2=\beta_1,\\ \alpha_1\gamma_4-\alpha_4\gamma_1+\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2=-\beta_2,\\ \alpha_1\gamma_5-\alpha_5\gamma_1+\alpha_2\gamma_6-\alpha_6\gamma_2=-\frac{\beta_3}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1\gamma_6-\alpha_6\gamma_1-\alpha_2\gamma_5+\alpha_5\gamma_2=\frac{\beta_4}{2},\\ \alpha_3\gamma_5-\alpha_5\gamma_3+\alpha_4\gamma_6-\alpha_6\gamma_4=-\beta_5,\\ \alpha_3\gamma_6-\alpha_6\gamma_3-\alpha_4\gamma_5+\alpha_5\gamma_4=-\beta_6,\end{cases}\tag{8'}$$

$$\begin{cases}\beta_1\delta_3-\beta_3\delta_1-\beta_2\delta_4+\beta_4\delta_2=\frac{\beta_1}{2},\\ \beta_1\delta_4-\beta_4\delta_1+\beta_2\delta_3-\beta_3\delta_2=-\frac{\beta_2}{2},\\ \beta_1\delta_5-\beta_5\delta_1+\beta_2\delta_6-\beta_6\delta_2=-\frac{\beta_3}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_1\delta_6-\beta_6\delta_1-\beta_2\delta_5+\beta_5\delta_2=\frac{\beta_4}{4},\\ \beta_3\delta_5-\beta_5\delta_3+\beta_4\delta_6-\beta_6\delta_4=-\frac{\beta_5}{2},\\ \beta_3\delta_6-\beta_6\delta_3-\beta_4\delta_5+\beta_5\delta_4=-\frac{\beta_6}{2},\end{cases}\tag{8''}$$

$$\begin{cases}\gamma_1\delta_3-\gamma_3\delta_1-\gamma_2\delta_4+\gamma_4\delta_2=\frac{\gamma_1}{2},\\ \gamma_1\delta_4-\gamma_4\delta_1+\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2=-\frac{\gamma_2}{2},\\ \gamma_1\delta_5-\gamma_5\delta_1+\gamma_2\delta_6-\gamma_6\delta_2=-\frac{\gamma_3}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma_1\delta_6-\gamma_6\delta_1-\gamma_2\delta_5+\gamma_5\delta_2=\frac{\gamma_4}{4},\\ \gamma_3\delta_5-\gamma_5\delta_3+\gamma_4\delta_6-\gamma_6\delta_4=-\frac{\gamma_5}{2},\\ \gamma_3\delta_6-\gamma_6\delta_3-\gamma_4\delta_5+\gamma_5\delta_4=-\frac{\gamma_6}{2},\end{cases}\tag{8'''}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\delta_3-\alpha_3\delta_1-\alpha_2\delta_4+\alpha_4\delta_2=0, \\ \alpha_1\delta_4-\alpha_4\delta_1+\alpha_2\delta_3-\alpha_3\delta_2=0, \\ \alpha_1\delta_5-\alpha_5\delta_1+\alpha_2\delta_6-\alpha_6\delta_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1\delta_6-\alpha_6\delta_1-\alpha_2\delta_5+\alpha_5\delta_2=0, \\ \alpha_3\delta_5-\alpha_5\delta_3+\alpha_4\delta_6-\alpha_6\delta_4=0, \\ \alpha_3\delta_6-\alpha_6\delta_3-\alpha_4\delta_5+\alpha_5\delta_4=0, \end{cases} \tag{8^{IV}}$$

$$\begin{cases} \beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1-\beta_2\gamma_4-\beta_4\gamma_2=0, \\ \beta_1\gamma_4-\beta_4\gamma_1+\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2=0, \\ \beta_1\gamma_5-\beta_5\gamma_1+\beta_2\gamma_6-\beta_6\gamma_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1\gamma_6-\beta_6\gamma_1-\beta_2\gamma_5+\beta_5\gamma_2=0, \\ \beta_3\gamma_5-\beta_5\gamma_3+\beta_4\gamma_6-\beta_6\gamma_4=0, \\ \beta_3\gamma_6-\beta_6\gamma_3-\beta_4\gamma_5+\beta_5\gamma_3=0. \end{cases} \tag{8^{V}}$$

Dacă $\beta_1=\beta_2=0$, avînd în vedere că nu putem avea $\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_6=0$, din $(8^{V})$ rezultă $\gamma_1=\gamma_2=0$. Presupunînd că $\alpha_1=\alpha_2=0$, din (8) şi (8′) rezultă $\beta_3=\beta_4=\gamma_3=\gamma_4=0$. Printr-o schimbare de parametri obţinem

$$\beta_5=\gamma_6=1, \quad \alpha_5=\alpha_6=\beta_6=\gamma_5=\delta_5=\delta_6=0.$$

Cu aceste valori, din sistemul (8), (8′),..., $(8^{V})$ deducem

$$\alpha_4=1, \quad \delta_3=\frac{1}{2}, \quad \alpha_3=\delta_1=\delta_2=\delta_4=0.$$

Deci, *dacă* $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$, *avem subgrupul* $G_4'\equiv[X_3, X_4, X_5, X_6]$. Dacă $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, sistemul (8), (8′),..., $(8^{V})$ nu are soluţii acceptabile.

Vom considera acum cazul în care $\beta_1\neq 0$. Printr-o schimbare de parametri obţinem $\beta_1=1$, $\alpha_1=\gamma_1=\delta_1=0$. Din sistemul $(8^{V})$ rezultă că $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ sînt daţi de relaţiile (4′) şi deci $\gamma_2\neq 0$. Printr-o schimbare de parametri găsim $\gamma_2=1$, $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$. Înlocuind aceste valori în (8), (8′),..., $(8^{V})$ obţinem un sistem imposibil.

Acelaşi rezultat se obţine dacă $\beta_1=0$, $\beta_2\neq 0$.

Deci, *subgrupurile de forma* 1° *ale grupului* (1) *pot fi aduse la forma* $G_4'$.

În cazul 2°, obţinem sistemul format din $(8^{V})$ şi

$$\begin{cases} \alpha_1\delta_3-\alpha_3\delta_1-\alpha_2\delta_4+\alpha_4\delta_2=a\alpha_1, \\ \alpha_1\delta_4-\alpha_4\delta_1+\alpha_2\delta_3-\alpha_3\delta_2=-a\alpha_2, \\ \alpha_1\delta_5-\alpha_5\delta_1+\alpha_2\delta_6-\alpha_6\delta_2=-\dfrac{a\alpha_3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1\delta_6-\alpha_6\delta_1-\alpha_2\delta_5+\alpha_5\delta_2=\dfrac{a\alpha_4}{2}, \\ \alpha_3\delta_5-\alpha_5\delta_3+\alpha_4\delta_6-\alpha_6\delta_4=-a\alpha_5, \\ \alpha_3\delta_6-\alpha_6\delta_3-\alpha_4\delta_5+\alpha_5\delta_4=-a\alpha_6, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \beta_1\delta_3-\beta_3\delta_1-\beta_2\delta_4+\beta_4\delta_2=b\beta_1, \\ \beta_1\delta_4-\beta_4\delta_1+\beta_2\delta_3-\beta_3\delta_2=-b\beta_2, \\ \beta_1\delta_5-\beta_5\delta_1+\beta_2\delta_6-\beta_6\delta_2=-\dfrac{b\beta_3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1\delta_6-\beta_6\delta_1-\beta_2\delta_5+\beta_5\delta_2=\dfrac{b\beta_4}{2}, \\ \beta_3\delta_5-\beta_5\delta_3+\beta_4\delta_6-\beta_6\delta_4=-b\beta_5, \\ \beta_3\delta_6-\beta_6\delta_3-\beta_4\delta_5+\beta_5\delta_4=-b\beta_6, \end{cases} \tag{9'}$$

$$\begin{cases} \gamma_1\delta_3-\gamma_3\delta_1-\gamma_2\delta_4+\gamma_4\delta_2=(1-a-b)\gamma_1, \\ \gamma_1\delta_4-\gamma_4\delta_1+\gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2=(a+b-1)\gamma_2, \\ \gamma_1\delta_5-\gamma_5\delta_1+\gamma_2\delta_6-\gamma_6\delta_2=\dfrac{(a+b-1)\gamma_3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1\delta_6-\gamma_6\delta_1-\gamma_2\delta_5+\gamma_5\delta_2=\dfrac{(1-a-b)\gamma_4}{2}, \\ \gamma_3\delta_5-\gamma_5\delta_3+\gamma_4\delta_6-\gamma_6\delta_4=(a+b-1)\gamma_5, \\ \gamma_3\delta_6-\gamma_6\delta_5-\gamma_4\delta_5+\gamma_5\delta_4=(a+b-1)\gamma_6, \end{cases} \tag{9''}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1-\alpha_2\beta_4+\alpha_4\beta_2=0, \\ \alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=0, \\ \alpha_1\beta_5-\alpha_5\beta_1+\alpha_2\beta_6-\alpha_6\beta_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1\beta_6-\alpha_6\beta_1-\alpha_2\beta_5+\alpha_5\beta_2=0, \\ \alpha_3\beta_5-\alpha_5\beta_3+\alpha_4\beta_6-\alpha_6\beta_4=0, \\ \alpha_3\beta_6-\alpha_6\beta_3-\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4=0, \end{cases} \tag{9'''}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1-\alpha_2\gamma_4+\alpha_4\gamma_2=0, \\ \alpha_1\gamma_4-\alpha_4\gamma_1+\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2=0, \\ \alpha_1\gamma_5-\alpha_5\gamma_1+\alpha_2\gamma_6-\alpha_6\gamma_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1\gamma_6-\alpha_6\gamma_1-\alpha_2\gamma_5+\alpha_5\gamma_2=0, \\ \alpha_3\gamma_5-\alpha_5\gamma_3+\alpha_4\gamma_6-\alpha_6\gamma_4=0, \\ \alpha_3\gamma_6-\alpha_6\gamma_3-\alpha_4\gamma_5+\alpha_5\gamma_4=0. \end{cases} \tag{9^{IV}}$$

Dacă $\beta_1 = \beta_2 = 0$, avînd în vedere că nu putem avea $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$, din $(9''')$ și $(8^V)$ rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Presupunînd că $\delta_1 = \delta_2 = 0$, obținem $\alpha_h = \beta_h = \gamma_h = 0$, $(h = 3,4)$, deci operatorii $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ nu sînt independenți, ceea ce este absurd. Dacă $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$, din (9), (9′), (9″) rezultă aceeași imposibilitate $\alpha_h = \beta_h = \gamma_h = 0$, $(h = 3,4)$.

Dacă $\beta_1 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri putem presupune $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$. Din $(8^V)$ rezultă că $\gamma_3$, $\gamma_4$, $\gamma_5$, $\gamma_6$ sînt dați de ecuațiile (4′). De aici rezultă că $\gamma_2 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri obținem $\gamma_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = \delta_2 = 0$. Înlocuind aceste valori în $(9^{IV})$ obținem $Y_1 f = 0$, ceea ce este imposibil.

Același rezultat se obține dacă $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$.

Deci, *nu există nici un subgrup de tipul* 2° *al grupului* (1).

În același mod se demonstrează că *nu există nici un subgrup al grupului* (1) *de tipul* 3°, . . . , 8°.

În cazul 9° obținem sistemul format din (8), (9) cu $a = 0$, (9′) cu $b = 0$, (9″) cu $a + b = 1$ și

$$\begin{cases} \alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1-\alpha_2\gamma_4+\alpha_4\gamma_2=-\beta_1, \\ \alpha_1\gamma_4-\alpha_4\gamma_1+\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2=\beta_2, \\ \alpha_1\gamma_5-\alpha_5\gamma_1+\alpha_2\gamma_6-\alpha_6\gamma_2=\dfrac{\beta_3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1\gamma_6-\alpha_6\gamma_1-\alpha_2\gamma_5+\alpha_5\gamma_2=-\dfrac{\beta_4}{2}, \\ \alpha_3\gamma_5-\alpha_5\gamma_3+\alpha_4\gamma_6-\alpha_6\gamma_4=\beta_5, \\ \alpha_3\gamma_6-\alpha_6\gamma_3-\alpha_4\gamma_5+\alpha_5\gamma_4=\beta_6, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1-\beta_2\gamma_4+\beta_4\gamma_2=\alpha_1, \\ \beta_1\gamma_4-\beta_4\gamma_1+\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2=-\alpha_2, \\ \beta_1\gamma_5-\beta_5\gamma_1+\beta_2\gamma_6-\beta_6\gamma_2=-\dfrac{\alpha_3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1\gamma_6-\beta_6\gamma_1-\beta_2\gamma_5+\beta_5\gamma_2=\dfrac{\alpha_4}{2}, \\ \beta_3\gamma_5-\beta_5\gamma_3+\beta_4\gamma_6-\beta_6\gamma_4=-\alpha_5, \\ \beta_3\gamma_6-\beta_6\gamma_3-\beta_4\gamma_5+\beta_5\gamma_4=-\alpha_6. \end{cases} \tag{10'}$$

Dacă $\delta_1 = \delta_2 = 0$, din aceste ecuații rezultă $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$, $(i = 1, \ldots, 6)$ ceea ce este imposibil.

Dacă $\delta_1 \neq 0$, printr-o schimbare de variabile obținem $\delta_1 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$. Din (9) rezultă că $\alpha_2 \neq 0$, deci putem lua $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 0$. Cu aceste valori sistemul (10′) este imposibil. Același rezultat se obține dacă $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \neq 0$.

Deci, *nu există nici un subgrup al grupului* (1) *de tipul* 9°.

Același rezultat se obține în cazurile 10°, 11°, 12°, 14°, 15°.

*În cazul* 13° *obținem grupul* $G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4]$.

Rezultă că

*Subgrupurile cu patru parametri ale grupului* (1) *de mișcări ale unui spațiu* $V_3$ *cu curbura constantă negativă se pot reduce, prin schimbări de parametri, la una din formele*:

$$G_4' \equiv [X_3, X_4, X_5, X_6], \qquad G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$

Se știe că un spațiu riemannian $V_3$ nu poate admite ca grup de mișcări un grup cu cinci parametri. De aici rezultă că grupul (1) nu are nici un subgrup cu cinci parametri, căci în caz contrar spațiul $V_3$ cu curbura constantă negativă ar avea un grup de mișcări cu cinci parametri.

În cazul subgrupurilor cu un parametru ale grupului (1), se vede imediat că ele se reduc la una din formele

$$G_1' \equiv [X_1], \quad G_1'' \equiv [X_3], \quad G_1''' \equiv [X_4], \quad G_1^{IV} \equiv [X_5].$$

Avem deci

TEOREMĂ. *Subgrupurile grupului* (1) *de mișcări al unui spațiu riemannian* $V_3$ *cu curbura constantă negativă, pot fi aduse, prin schimbări de parametri și variabile, la una din formele*:

$$G_1' \equiv [X_1], \qquad G_1'' \equiv [X_3], \quad G_1''' \equiv [X_4], \quad G_1^{IV} \equiv [X_5],$$

$$G_2' \equiv [X_3, X_5], \quad G_2'' \equiv [X_2, \eta X_1 + X_3] \quad (\eta = 0,1),$$

$$G_2''' \equiv \left[X_1 + \lambda X_2, \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} X_3 + X_4\right] \qquad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{IV} \equiv [X_1 + \lambda X_2, X_2 + \mu X_3 + X_4] \qquad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{V} \equiv [X_5, X_6], \quad G_2^{VI} \equiv [X_3, X_4], \quad G_2^{VII} \equiv [X_1, X_2],$$

$$G_2^{VIII} \equiv [X_1 \pm X_5, X_2 \mp X_6], \quad G_2^{IX} \equiv [X_1 + KX_5 \pm X_6, X_2 \mp X_5 - KX_6],$$

$$G_3' \equiv [X_3 + \lambda X_4, X_5, X_6], \quad G_3'' \equiv [X_4, X_5, X_6], \quad G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_4],$$

$$G_4' \equiv [X_3, X_4, X_5, X_6], \qquad G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$

Primită la redacție la 1 iulie 1962

# О ПОДГРУППАХ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ РИМАНОВОГО ПРОСТРАНСТВА $V_3$ С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ


## РЕЗЮМЕ

В работе определяются все подгруппы движения (1) риманового пространства $V_3$ с постоянной отрицательной кривизной. Получается теорема:

Подгруппы группы движений (1) риманового пространства $V_3$ с постоянной отрицательной кривизной можно привести, заменой параметров и переменных, к одному из видов:

$$G_1' \equiv [X_1], \qquad G_1'' \equiv [X_3], \quad G_1''' \equiv [X_4], \quad G_1^{IV} \equiv [X_5],$$

$$G_2' \equiv [X_3, X_5], \quad G_2'' \equiv [X_2, \eta X_1 + X_3], \quad (\eta = 0,1),$$

$$G_2''' \equiv \left[X_1 + \lambda X_2, \frac{\lambda^2 - 1}{2} X_3 + X_4\right], \qquad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{IV} \equiv [X_1 + \lambda X_2, X_2 + \mu X_3 + X_4], \qquad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{V} \equiv [X_5, X_6], \quad G_2^{VI} \equiv [X_3, X_4], \quad G_2^{VII} \equiv [X_1, X_2],$$

$$G_2^{VIII} \equiv [X_1 \pm X_5, X_2 \mp X_6], \quad G_2^{IX} \equiv [X_1 + KX_5 \pm X_6, X_2 \mp X_5 - KX_6],$$

$$G_3' \equiv [X_3 + \lambda X_4, X_5, X_6], \quad G_3'' \equiv [X_4, X_5, X_6],$$

$$G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_4],$$

$$G_4' \equiv [X_3, X_4, X_5, X_6], \qquad G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$


# AU SUJET DES SOUS-GROUPES DU GROUPE DE MOUVEMENTS D'UN ESPACE RIEMANNIEN $V_3$ À COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE


## RÉSUMÉ

L'auteur a déterminé tous les sous-groupes du groupe (1) de mouvements d'un espace riemannien $V_3$ dont la courbure constante est négative. Il a obtenu le théorème suivant :

*Les sous-groupes du groupe* (1) *de mouvements d'un espace riemannien* $V_3$ *à courbure constante négative peuvent être ramenés, par des changements de paramètres et de variables, à l'une des formes*

$$G_1' \equiv [X_1], \quad G_1'' \equiv [X_3], \quad G_1''' \equiv [X_4], \quad G_1^{IV} \equiv [X_5],$$

$$G_2' \equiv [X_3, X_5], \quad G_2'' \equiv [X_2, \eta X_1 + X_3] \quad (\eta = 0, 1),$$

$$G_2''' \equiv \left[X_1 + \lambda X_2, \frac{\lambda^2 - 1}{2} X_3 + X_4\right] \quad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{IV} \equiv [X_1 + \lambda X_2, X_2 + \mu X_3 + X_4] \quad (\lambda \neq 0),$$

$$G_2^{V} \equiv [X_5, X_6], \quad G_2^{VI} \equiv [X_3, X_4], \quad G_2^{VII} \equiv [X_1, X_2],$$

$$G_2^{VIII} \equiv [X_1 \pm X_5, X_2 \mp X_6], \quad G_2^{IX} \equiv [X_1 + KX_5 \pm X_6, X_2 \mp X_5 - KX_6],$$

$$G_3' \equiv [X_3 + \lambda X_4, X_5, X_6], \quad G_3'' \equiv [X_4, X_5, X_6], \quad G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_4],$$

$$G_4' \equiv [X_3, X_4, X_5, X_6], \quad G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4].$$

## BIBLIOGRAFIE

1. A. DOBRESCU, *Clasificarea grupurilor Lie, reale cu patru parametri.* St. cerc. mat., **IV**, *3—4* (1953).
2. M. STOKA, *Über die Bewegungsgruppe eines Riemannschen Raumes* $V_3$ *mit konstanter negativer Krümmung.* Rev. math. pures et appl., **VII**, *4* (1962).
3. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle.* I. Bucureşti, 1957.

# OPERATORUL PERTURBAȚIE ÎN TRANSMITEREA INFORMAȚIEI

DE

SILVIU GUIAȘU

## 1. INTRODUCERE

Transmiterea informației formează dinamica teoriei informației. Considerînd o sursă de informație, caracterizată printr-o anumită entropie care ne dă gradul de nedeterminare al sursei, în condiții reale, semnalele care intră în canalul prin care se face transmiterea informației nu sînt recepționate ca atare la ieșirea din canal. Zgomotul sau perturbația este factorul care alterează calitatea mesajului recepționat.

Natura diverselor perturbații este foarte diferită. Urmărind realizarea schemei transmiterii informației, sursă — canal — recepție, la sistemele de comunicație, observăm că de exemplu în cazul telefonului, telegrafului, radioului, perturbația se poate manifesta sub forma unor tensiuni sau curenți care variază neregulat în timp, sub forma unor instalații electrice care influențează linia de transmisie, a unor zgomote de origine atmosferică sau de origine cosmică, sub forma altor surse de informație care interferează cu sursa noastră etc. Acțiunea perturbației asupra mesajelor se exercită în așa fel, încît la receptor semnalele vin alterate, alterare care face să se rupă unele legături ce existau în mesajul original. Dar dispariția unor legături este echivalentă cu mărirea gradului de nedeterminare, deci cu o creștere a entropiei.

Considerînd ca sursă un sistem fizic izolat, avînd o anumită entropie care măsoară nedeterminarea sistemului într-un anumit mediu (canalul), dacă sistemul este supus unor transformări ireversibile, care constituie perturbația, conform principiului lui Kelvin al degradării energiei, sistemul final (recepția) va avea o entropie mai mare.

În general, o perturbație de o natură oarecare, dacă există, are drept efect o creștere a entropiei. Ea acționează asupra probabilităților de emisie ale semnalelor, modificînd entropia în sens crescător. Cum

acţionează perturbaţia asupra probabilităţilor fiecărui semnal transmis este greu de precizat. Atunci cînd distruge anumite legături din mesaj, înseamnă că micşorează probabilitatea semnalelor mai probabile şi în schimb măreşte probabilitatea evenimentelor mai puţin probabile. Global însă, tinde spre egalizarea probabilităţilor, măreşte entropia.

În mod obişnuit, perturbaţia se introduce pentru canalele discrete printr-o probabilitate condiţionată : dacă această probabilitate condiţionată $p(z/y)$ nu ia numai valorile 0 sau 1, pentru orice pereche $y$, $z$, unde $y$ este un semnal emis iar $z$ un semnal recepţionat, se spune că acest canal are zgomot.

În cele ce vor urma, vom considera perturbaţia ca fiind o transformare care acţionează asupra probabilităţilor semnalelor, modificînd entropia în sens crescător. De asemenea, vom mai considera că mulţimea semnalelor transmise şi recepţionate este aceeaşi. Această presupunere nu restrînge cu nimic generalitatea problemei. Într-adevăr, dacă sursa şi recepţia sînt respectiv mulţimile $Y$ şi $Z$, putem considera şi la emisie şi la recepţie mulţimea $X = Y \cup Z$, admiţînd ca probabilităţi de emisie sau de recepţie şi probabilitatea zero.

## 2. DEFINIŢII

Considerăm o sursă finită de informaţie $\{\Omega, A, p\}$ formată din $m$ elemente $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de probabilităţi

$$p(A_i) = p_i, \; p_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Entropia sursei este

$$H(\Omega) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i. \tag{1}$$

Vectorul probabilităţilor de intrare îl notăm $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Definiţie. *Perturbaţia $T$ este un operator care acţionează asupra probabilităţilor $p$, modificînd entropia în sens crescător*

$$TH(\Omega) \geqslant H(\Omega). \tag{2}$$

Recepţia va fi $\{\Omega, A, p^*\}$, unde $p^* = Tp$, conţinînd aceleaşi semnale $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ cu probabilităţile

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*).$$

Entropia la recepţie este

$$TH(\Omega) = -\sum_{k=1}^{m} p_k^* \log p_k^*. \tag{3}$$

Deci, schema transmiterii informației (fără codificare) se prezintă ca în figura 1.

Perturbația, de o natură oarecare, provine dintr-o sursă de perturbație conectată la canalul de comunicație.

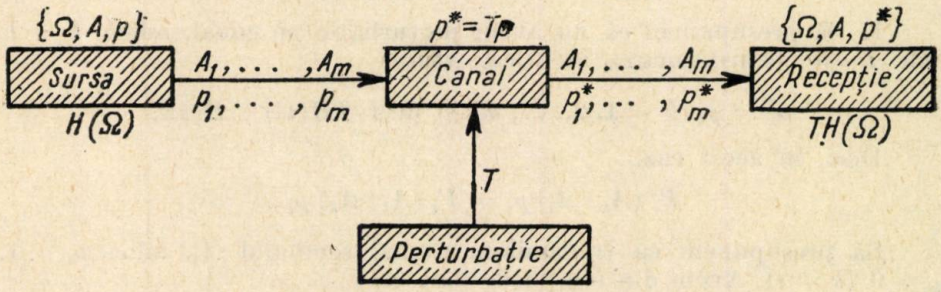



Fig. 1

Să considerăm produsul cartezian al sursei și recepției:

$$\{\Omega, A, p\} \times \{\Omega, A, p^*\} = \{\Omega \times \Omega, (.,.), P\},$$

unde $P(A_i, A_k)$ este probabilitatea ca să se emită semnalul $A_i$ și să se recepționeze semnalul $A_k$. În general

$$P(A_i, A_k) \neq P(A_k, A_i) \quad (k \neq i).$$

Avem

$$P(A_i, A_k) = P_r(A_k \mid A_i)\, p_i = P_e(A_i \mid A_k)\, p_k^*, \tag{4}$$

unde $P_r(A_k \mid A_i)$ este probabilitatea ca să se recepționeze $A_k$ atunci cînd se emite $A_i$ și este o probabilitate de recepție, condiționată de emisie. $P_e(A_i \mid A_k)$ este probabilitatea ca să se emită $A_i$ atunci cînd se recepționează $A_k$ și este o probabilitate de emisie, condiționată de recepție.

Definiție. *Presupunînd că s-a emis în ordine* $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}$ *și s-a recepționat* $A_{k_n}$, *canalul este fără memorie, dacă*

$$P_r(A_{k_n} \mid A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_n}) = P_r(A_{k_n} \mid A_{j_n}). \tag{5}$$

Cu alte cuvinte, pentru canalele fără memorie, numai ultimul semnal transmis condiționează un semnal recepționat la un anumit moment.

Evident

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} P(A_i, A_k) = P(\Omega, A_k) = p_k^* \quad (k = 1, \ldots, m), \\ &\sum_{k=1}^{m} P(A_i, A_k) = P(A_i, \Omega) = p_i \quad (i = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{6}$$

$P(A_i, \Omega)$ fiind probabilitatea ca să se emită $A_i$ și să se recepționeze un semnal oarecare, iar $P(\Omega, A_k)$ este probabilitatea ca să se recepționeze $A_k$ și să se emită un semnal oarecare.

### 3. CAZURI LIMITĂ

Perturbația modificînd în sens crescător entropia, avem întotdeauna

$$0 \leqslant H(\Omega) \leqslant TH(\Omega) \leqslant \log m. \tag{2'}$$

**1.** Să presupunem că nu avem perturbație pe canal, adică $T = I$, unde $I$ este transformarea identică. Atunci

$$p_k^* = p_k (k = 1, 2, \ldots, m) \text{ și deci } TH(\Omega) = H(\Omega).$$

Deci, în acest caz,

$$P_r(A_k \mid A_i)\, p_i = P_e(A_i \mid A_k)\, p_k.$$

Să presupunem că transmitem numai semnalul $A_i$, adică $p_i = 1$, $p_k = 0$ $(k \neq i)$. Avem din relația de mai sus

$$P_r(A_k \mid A_i) = 0 \ (k \neq i), \ P_r(A_i \mid A_i) = 1, \tag{7}$$

deci în cazul în care nu avem perturbație, probabilitatea ca atunci cînd transmitem un semnal să recepționăm alt semnal, este zero. Semnalele se recepționează ca atare. Avem aceleași probabilități la intrarea în canal ca și la ieșirea din canal.

**2.** Să considerăm celălalt caz limită, în care perturbația este așa de mare încît ajungem la nedeterminare maximă :

$$TH(\Omega) = \log m \text{ implică } p_k^* = \frac{1}{m} \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

În acest caz, din relația (4) avem :

$$P_r(A_k \mid A_i)\, p_i = \frac{1}{m} P_e(A_i \mid A_k).$$

Să presupunem că emitem numai semnalul $A_i$. Avem :

$$p_i = 1, \ p_k = 0 \ (k \neq i) \text{ adică } P_e(A_i \mid A_k) = 1, \text{ deci } P_r(A_k \mid A_i) = \frac{1}{m}$$

$$(k = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Prin urmare, cînd transmitem $A_i$ putem să recepționăm orice semnal cu aceeași probabilitate. În acest caz, putem să nu mai cuplăm recepția la canal, pentru că este indiferent dacă recepționăm sau dacă scriem mesajul de recepție punînd semnalele la întîmplare, prin tragere la sorți.

### 4. CAZUL GENERAL

În cazul general

$$H(\Omega) < TH(\Omega) < \log m$$

și avem

$$P_r(A_k \mid A_i)\, p_i = P_e(A_i \mid A_k)\, p_k^*.$$

Presupunînd că emitem numai semnalul $A_i$, $p_i = 1$, $p_k = 0$ $(k \neq i)$ adică

$$P_e(A_i \mid A_k) = 1, \text{ deci } P_r(A_k \mid A_i) = p_k^*.$$

Prin urmare, în cazul general, la fiecare semnal $A_i$ îi corespunde o mulțime de recepție

$$B_{A_i} = \{A_k \mid P_r(A_k \mid A_i) \neq 0\}$$

astfel ca

$$P_r(B_{A_i} \mid A_i) = 1. \tag{9}$$

REMARCĂ: a) În cazul în care nu avem perturbație $B_{A_i} = \{A_i\}$.

b) Fiecărui semnal $A_i$ îi corespunde la recepție o mulțime $B_{A_i}$ pentru care avem (9). Dacă apriori atașăm fiecărui semnal $A_i$ mulțimea la recepție $C_{A_i}$ $(C_{A_i} \cap C_{A_k} = \varnothing)$, pentru care

$$P_r(C_{A_i} \mid A_i) \geqslant 1 - e, \qquad (0 < e < 1)$$

probabilitatea erorii pe care o facem este:

$$p(e) = \sum_{i=1}^{m} P_r(\Omega - C_{A_i} \mid A_i)\, p_i.$$

Dacă $C_{A_i} \supseteq B_{A_i}$ pentru toți $i = 1, \ldots, m$, avem $p(e) = 0$.

### 5. FORMA PERTURBAȚIEI $T$

Din relația (6) avem:

$$p_k^* = \sum_{i=1}^{m} P(A_i, A_k) = \sum_{i=1}^{m} P_r(A_k \mid A_i)\, p_i$$

adică

$$p_k^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_{ik}\, p_i, \tag{10}$$

unde am notat

$$\pi_{ik} = P_r(A_k \mid A_i). \tag{11}$$

Deci, perturbația apare ca o transformare liniară a probabilităților, de matrice

$$(\pi_{ik})_1^m, \quad \pi_{ik} \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \pi_{ik} = 1.$$

Să presupunem în plus că matricea este dublu stochastică : $\sum_{i=1}^{m} \pi_{ik} = 1$. Cu această condiție, $T$ este într-adevăr o perturbație, așa cum rezultă din

TEOREMA 1. *Fiind dată sursa* $\{\Omega, A, p\}$ *cu semnalele* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *de probabilități* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ *și entropie* $H(\Omega)$, *fie o transformare a probabilităților* $T$ :

$$(\pi_{ik})_1^m, \quad \pi_{ik} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \pi_{ik} = \sum_{k=1}^{m} \pi_{ik} = 1.$$

*Considerînd*

$$p^* = Tp, \quad p_k^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_{ik} p_i,$$

*vom avea pentru entropia la recepție*

$$TH(\Omega) \geqslant H(\Omega).$$

Demonstrație. Demonstrația se găsește în [2] (cap. 2), la o lemă pe care A. Feinstein o folosește în alte scopuri. În cazul nostru are o valoare în sine și deci o reproducem :

$$TH(\Omega) = -\sum_{i=1}^{m} p_i^* \log p_i^* = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} p_j \log p_i^* =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} p_j \log \prod_{i=1}^{m} (p_i^*)^{\pi_{ij}}{}^{1)} \geqslant -\sum_{j=1}^{m} p_j \log \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} p_i^*{}^{2)} \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j = H(\Omega)$$

cu egalitate pentru $p_k^* = p_i$.

## 6. PROPRIETĂȚILE MATRICEI $(\pi_{ik})_1^m$

Ecuația caracteristică a matricei $(\pi_{ik})_1^m$ este

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - T| = |\lambda \delta_{ik} - \pi_{ik}|_1^m = 0, \tag{12}$$

unde $\delta_{ik}$ este simbolul lui Kronecker, iar $I$ matricea unitate.

---

1) $\left[\pi_{ij} \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} = 1\right] \Rightarrow \prod_{i=1}^{m} (p_i^*)^{\pi_{ij}} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} p_i^*$

pentru orice $j$ (Hardy, Littlewood, Polya, *Inequalities*, 1952, 17).

2) În general

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} q_i = 1 \Rightarrow -\sum_{i=1}^{m} q_i \log q_i \leqslant -\sum_{i=1}^{m} q_i \log p_i$$

([2], cap. 2) iar în cazul de față

$$\sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} p_i^* \right) = \sum_{i=1}^{m} p_i^* \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1.$$

Avem proprietățile cunoscute:

$$\Delta(1) = 0, \tag{13}$$

$$|\lambda| \leqslant 1. \tag{14}$$

Ținînd seama de perturbația $T$, vom putea despărți în anumite cazuri sistemul de semnale $A_1, A_2, \ldots, A_m$ în subsisteme cu un anumit fel de legături.

Sistemul de semnale $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ formează un *sistem izolat*, dacă:

a) $\pi_{jk} \neq 0$ pentru $j, k = i_1, i_2, \ldots, i_p$;

b) nu există $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_p$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$ $(j = i_1, i_2, \ldots, i_p)$;

c) nu există $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_p$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$ $(k = i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

Sistemul de semnale $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_q}$ formează un *sistem final*, dacă:

a) $\pi_{jk} \neq 0$ pentru $j, k = j_1, j_2, \ldots, j_q$;

b) nu există $k \neq j_1, j_2, \ldots, j_q$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$ $(j = j_1, j_2, \ldots, j_q)$;

c) există $j \neq j_1, j_2, \ldots, j_q$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$ $(k = j_1, j_2, \ldots, j_q)$.

Sistemul de semnale $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_r}$ formează un *sistem inițial*, dacă:

a) $\pi_{jk} \neq 0$ pentru $j, k = k_1, k_2, \ldots, k_r$;

b) există $k \neq k_1, k_2, \ldots, k_r$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$, $(j = k_1, k_2, \ldots, k_r)$;

c) nu există $j \neq k_1, k_2, \ldots, k_r$ astfel ca $\pi_{jk} \neq 0$, $(k = k_1, k_2, \ldots, k_r)$.

*Exemplu.* Considerăm o sursă de informație cu 7 semnale, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, și o perturbație pe canal de forma:

$$\begin{Vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{43} & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{53} & \pi_{54} & \pi_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{63} & \pi_{64} & \pi_{65} & \pi_{66} & \pi_{67} \\ 0 & 0 & \pi_{73} & \pi_{74} & \pi_{75} & \pi_{76} & \pi_{77} \end{Vmatrix}$$

Perturbația $T$ face ca semnalele să se împartă în: $(A_1, A_2)$ formează un sistem izolat de semnale, putînd fi perturbate unele în altele, însă ele neputînd fi perturbate în alte semnale, și neexistînd alte semnale care datorită perturbației să dea $A_1$ sau $A_2$; $(A_3, A_4, A_5)$ formează un sistem final de semnale, putînd fi perturbate unele în altele, însă putînd figura la recepție și cînd se transmit semnalele $A_6$ și $A_7$ care nu fac parte din sistem; $(A_6, A_7)$ formează un sistem inițial, putîndu-se transforma datorită perturbației în alte semnale, $A_3$, $A_4$, $A_5$.

## 6. AMPLIFICAREA PERTURBAȚIEI

Studiul amplificării perturbației revine la studiul iterațiilor operatorului $T$. Din teorema 1, rezultă pentru iterații

$$T^k H(\Omega) \leqslant T^{k+1} H(\Omega). \tag{15}$$

Șirul $(T^k H(\Omega))_{1 \leqslant k < \infty}$ este un șir monoton crescător, mărginit de entropia maximă $\log m$. Deci:

LEMA 1. *Pentru amplificări progresive ale perturbației, există o entropie limită la recepție, inferioară sau egală cu entropia maximă* $\log m$.

Pentru ca să calculăm entropia după $n$ amplificări succesive ale perturbației, în funcție de entropia inițială și de perturbația de bază, fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ cele $s$ rădăcini distincte ale ecuației caracteristice $\Delta(\lambda) = 0$ a matricei $T$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

Punînd

$$\pi_{rs}^{(n)} = \sum_{p=1}^{m} \pi_{rp}\, \pi_{ps}^{(n-1)} = \sum_{p=1}^{m} \pi_{rp}^{(n-1)}\, \pi_{ps}, \text{ cu } \pi_{rs}^{(1)} = \pi_{rs},$$

și notînd cu $G_{rs}(\lambda)$ minorul elementului $\pi_{rs}$ în determinantul $|T - \lambda I|$, cu $D_\lambda^p$ operatorul de derivare de ordinul $p$ în raport cu $\lambda$ și cu

$$\Psi_j = \frac{|T - \lambda I|}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j}},$$

avem formula lui Perron :

$$\pi_{rs}^{(n)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(n_j - 1)!} D_\lambda^{n_j - 1} \left[ \frac{\lambda^n G_{rs}(\lambda)}{\Psi_j(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_j}$$

adică :

$$p_k^{*(n)} = \sum_{l=1}^{m} \pi_{kl}^{(n)}\, p_l \text{ și deci } T^m H(\Omega) = \sum_{k=1}^{m} p_k^{*(n)} \log p_k^{*(n)}. \tag{16}$$

LEMA 2. *Probabilitatea semnalelor la recepție, pentru diversele amplificări succesive ale perturbației, converge în medie cînd amplificarea crește, oricare ar fi probabilitatea semnalelor la emisie.*

Demonstrație. Fie

$$p = (p_1, \ldots, p_m) \in [0,1]^m, \quad p^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*) \in [0,1]^m$$

și $T$ de matrice

$$(\pi_{ik})_1^m, \quad p^* = Tp.$$

Pentru norma

$$\| q \| = \sum_{i=1}^{m} q_i, \text{ unde } q = (q_1, \ldots, q_m) \in [0,1]^m,$$

avem

$$\| Tp \| = \| p \| = 1,$$

deci norma operatorului $T$, $\| T \| = 1$, și deci $\| T^n \| \leqslant \| T \|^n = 1$. Deci

$$\sup_n \| T^n \| < \infty$$

și teorema ergodică medie ne arată că șirul

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k p\right)_{1\leqslant n<\infty}$$

converge pentru orice $p$.

Dacă atunci cînd amplificăm perturbația foarte mult, avem o perturbație limită stabilă, adică dacă există

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \varphi,$$

unde $\varphi$ este matricea $(\varphi_{jk})_1^m$, spunem că perturbația este ergodică.

LEMA 3. *Prin amplificare mare, perturbația ergodică anihilează sursa, adică*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{jk}^{(n)} = \varphi_{jk} = \varphi_k .$$

Această lemă se poate demonstra în multe feluri (a se vedea, de exemplu, [5], p. 42).

## 8. PERTURBAȚIA PENTRU CANALE CU MEMORIE

Să presupunem că se recepționează semnalul $A_{k_n}$ iar la emisie s-au transmis în ordine : $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}$. Canalul este cu memorie finită de ordinul $s$, dacă recepția unui semnal este influențată de ce s-a transmis cu $s$ pași înainte, adică

$$P_r\,(A_{k_n} \mid A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_n}) = P_r\,(A_{k_n} \mid A_{j_{n-s+1}} A_{j_{n-s+2}} \ldots A_{j_n}). \qquad (17)$$

Să considerăm produsul cartezian de $s$ ori al sursei cu ea însăși și totul produs cartezian cu recepția :

$$\{\Omega, A, p\} \times \underbrace{\ldots}_{s\text{ ori}} \times \{\Omega, A, p\} \times \{\Omega, A, p^*\} = \{\Omega \times \underbrace{\ldots}_{(s+1)\text{ori}} \times \Omega, (\underbrace{A \ldots A}_{s+1}), P\},$$

unde $P\,(A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s}, A_{k_s})$ este probabilitatea ca la emisie să avem în ordine $A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s}$, iar la recepție $A_{k_s}$. Avem

$$P\,(A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s}, A_{k_s}) = P_r\,(A_{k_s} \mid A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s})\,\mu\,(A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s}) \qquad (18)$$

și

$$P\,(\Omega, \ldots, \Omega, A_{k_s}) = \sum_{h_1,\ldots h_s}^{1,\ldots,m} P\,(A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_s}, A_{k_s}) = p_{k_s}^* \qquad (19)$$

$\mu$ fiind probabilitatea pe spațiul produs cartezian de $s$ ori al sursei cu ea însăși.

**Notăm :**

$$P_r(A_{k_s} \mid A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_s}) = \pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s},$$

$$\pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s} \geqslant 0, \sum_{k_s=1}^{m} \pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s} = 1. \tag{20}$$

Din (19) avem

$$p^*_{k_s} = \sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} \pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s} \mu(A_{h_1} \dots A_{h_s}). \tag{21}$$

Să presupunem semnalele sursei independente

$$\mu(A_{h_1} \dots A_{h_s}) = p_{h_1} \dots p_{h_s}.$$

Se vede deci că pentru canalele cu memorie finită de ordinul $s$, perturbaţia este o transformare de matrice $(\pi_{h_1 \dots h_s, k_s})_1^m$.

TEOREMA 2. *Dacă*

$$\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} \pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s} = 1$$

*operatorul $T$ este o perturbaţie proprie*

$$TH(\Omega) > H(\Omega).$$

D e m o n s t r a ţ i e. Demonstraţia nu comportă decît dificultăţi de calcul faţă de demonstraţia teoremei 1. O redăm totuşi :

$$TH(\Omega) = -\sum_{k_s=1}^{m} p^*_{k_s} \log p^*_{k_s} = -\sum_{k_s=1}^{m} \sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} p_{h_1} \dots p_{h_s} \log p^*_{k_s} =$$

$$= -\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} p_{h_1} \dots p_{h_s} \log \prod_{k_s=1}^{m} (p^*_{k_s})^{\pi_{h_1 \dots h_s, k_s}} \geqslant {}^{1)}$$

$$\geqslant -\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} p_{h_1} \dots p_{h_s} \log \sum_{k_s=1}^{m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} p^*_{k_s} \geqslant {}^{2)}$$

$$\geqslant -\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} p_{h_1} \dots p_{h_s} \log (p_{h_1} \dots p_{h_s}) = sH(\Omega) > H(\Omega).$$

---

1) $\left[\pi_{h_1 \dots h_s, k_s} \geqslant 0, \sum_{k_s=1}^{m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} = 1\right] \Rightarrow \prod_{k_s=1}^{m} (p^*_{k_s})^{\pi_{h_1 \dots h_s, k_s}} \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k_s=1}^{m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} p^*_{k_s} \text{ pentru orice } h_1, \dots, h_s.$$

2) $\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} p_{h_1} \dots p_{h_s} = 1$ şi $\sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} \sum_{k_s=1}^{m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} p^*_{k_s} =$

$$= \sum_{k_s=1}^{m} p^*_{k_s} \sum_{h_1, \dots, h_s}^{1, \dots, m} \pi_{h_1 \dots h_s, k_s} = \sum_{k_s=1}^{m} p^*_{k_s} = 1.$$

## 9. PROBLEMA CODIFICĂRII

Fiind dat un anumit canal, avînd perturbația $T$, se pune problema să adaptăm sursa la canal în așa fel încît în condițiile existenței perturbației $T$, transmițînd o entropie $H$, să recepționăm o entropie cît mai apropiată de entropia $H$.

## 10. EXTENSII ALE CANALULUI

Considerăm o transmisie de mai multe, să zicem $n$, elemente succesive $A$ în lungul canalului. Cînd transmitem un șir de semnale $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ recepționăm un șir $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$.

Vom înlocui canalul de sursă $\{\Omega, A, p\}$ și recepție $\{\Omega, A, p^*\}$ prin canalul avînd sursa $\{W_n, U, \mu\}$ și recepția $\{W_n, U, \mu^*\}$. $W_n$ este mulțimea tuturor șirurilor de lungime $n$, de simboluri $A \in \Omega$:

$$U_k = (A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}) \quad (k = 1, 2, \ldots, m^n), \; A_{i_j} \in \Omega,$$

$$\{W_n, U, \mu\} = \{\Omega, A, p\} \times \underbrace{\ldots}_{n} \times \{\Omega, A, p\} = \{\Omega \times \underbrace{\ldots}_{n} \times \Omega, (A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}), \mu\},$$

$$\{W_n, U, \mu^*\} = \{\Omega, A, p^*\} \times \underbrace{\ldots}_{n} \times \{\Omega, A, p^*\} =$$

$$= \{\Omega \times \underbrace{\ldots}_{n} \times \Omega, (A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}), \mu^*\}.$$

Dacă semnalele sursei sînt independente între ele

$$\mu(U_i) = p(A_{l_1}) \ldots p(A_{l_n}) \tag{A}$$

pentru orice $U_i = (A_{l_1}, \ldots, A_{l_n})$. Dacă semnalele la recepție sînt independente, avem

$$\mu^*(U_k) = p^*(A_{j_1}) \ldots p^*(A_{j_n}) \tag{B}$$

pentru orice $U_k = (A_{j_1}, \ldots, A_{j_n})$. De asemenea, dacă canalul nu are memorie, adică semnalul recepționat depinde numai de semnalul care a fost transmis în acel moment și nu depinde de alte semnale transmise anterior, probabilitatea ca să se recepționeze șirul $U_k = (A_{j_1}, \ldots, A_{j_n})$ condiționată de faptul că s-a transmis șirul $U_i = (A_{l_1}, \ldots, A_{l_n})$ este:

$$\nu_r(U_k \mid U_i) = P_r(A_{j_1} \mid A_{l_1}) \ldots P_r(A_{j_n} \mid A_{l_n}). \tag{C}$$

Propoziția 1. (A) *și* (C) $\Rightarrow$ (B).
Notînd

$$\mu(U_i) = \mu_i \text{ și } \mu^*(U_k) = \mu_k^*,$$

ținînd seama că

$$\mu_k^* = \sum_{i=1}^{m^n} \nu_r (U_k \mid U_i)\, \mu_i ,$$

demonstrația este imediată.

REMARCĂ. Dacă avem (C) și dacă cel puțin o parte din semnalele sursei nu sînt independente și avem de exemplu

$$\mu(A_{l_1} \dots A_{l_n}) \leqslant p_{l_1} \cdots p_{l_n},$$

atunci, după cum se poate vedea ușor, nu putem avea (B).

Pentru entropia extensiei de lungime $n$, avem [2], [3]:

$$H(W_n) \leqslant nH(\Omega) \tag{22}$$

cu egalitate numai dacă avem (A). La fel:

$$TH(W_n) \leqslant nTH(\Omega) \tag{23}$$

cu egalitate numai dacă avem (B).

## 11. O TEOREMĂ DE CODIFICARE

TEOREMA 3. *Fiind dată o sursă de informație finită conținînd $m$ elemente, o entropie $H$, $0 < H < \log m$, și un canal cu perturbația $T$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon, H)$ astfel ca îndată ce $n \geqslant n(\varepsilon, H)$, în extensia de lungime $n$, există o mulțime de semnale $U_1, U_2, \dots, U_N$, $N \geqslant 2^{nH}$ pe care dacă le transmitem, entropia recepționată se apropie cu mai puțin de $\varepsilon$ de minimul entropiei care poate fi recepționată pe canalul dat.*

Demonstrație. Să înlocuim canalul de sursă $\{\Omega, A, p\}$ și recepție $\{\Omega, A, p^*\}$, $p^* = Tp$, printr-o extensie de lungime $n$ : $\{W_n, U, \mu\}$, $\{W_n, U, \mu^*\}$. Să notăm $H(W_n) = H(n)$. Folosind extensii de lungime $n$, vom recepționa o entropie $\dfrac{TH(n)}{n}$. Arătăm că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{TH(n)}{n}$ și această limită este chiar cea mai mică entropie care se poate recepționa, adică

$$C = \inf_n \frac{TH(n)}{n} .$$

Demonstrația este simplă [3]: din definiția marginii inferioare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un întreg $s$,

$$\frac{TH(s)}{s} \leqslant C + \varepsilon.$$

Pentru $n \geqslant s$, fie $r_n$ un întreg astfel ca

$$(r_n - 1)\, s \leqslant n < r_n\, s.$$

Din proprietățile generale ale entropiei,

$$TH(q+n) \leqslant TH(q) + TH(n),$$

adică

$$TH(n) \leqslant r_n\, TH(s),$$

deci

$$\frac{TH(n)}{n} \leqslant \frac{r_n TH(s)}{n} \leqslant \frac{r_n}{r_n - 1}\,\frac{TH(s)}{s} \leqslant \frac{r_n}{r_n - 1}(C + \varepsilon),$$

$$n \to \infty \Rightarrow r_n \to \infty \Rightarrow \limsup_n \frac{TH(n)}{n} \leqslant C + \varepsilon.$$

Cum aceasta este adevărat pentru orice $\varepsilon$, avem

$$\limsup_n \frac{TH(n)}{n} \leqslant C.$$

Pe de altă parte însă $\dfrac{TH(n)}{n} \geqslant C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{TH(n)}{n} = C.$

Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon, H)$ astfel încît entropia pe care o recepționăm pentru $n \geqslant n(\varepsilon, H)$ :

$$\frac{TH(n)}{n} - C < \varepsilon.$$

Avem

$$C \leqslant \frac{TH(n)}{n} \leqslant TH \leqslant \log m.$$

Extensia de lungime $n$ are $m^n$ elemente de lungime $n$ și avem :

$$\frac{H(n)}{n} \leqslant H \leqslant \frac{\log m^n}{n}.$$

Să presupunem că transmitem numai $N < m^n$ elemente de lungime $n$. Atunci entropia acestui sistem de semnale, conform proprietăților entropiei,

$$\frac{\widetilde{H}(n)}{n} < \frac{H(n)}{n}.$$

Pe de altă parte

$$0 \leqslant \frac{\widetilde{H}(n)}{n} \leqslant \frac{\log N}{n} < \frac{\log m^n}{n}.$$

Dacă $\frac{\log N}{n} < H$ înseamnă că oricum am aranja probabilitățile de intrare pentru cele $N$ semnale, nu putem transmite entropia $H$. Deci pentru ca să putem transmite entropia $H$ trebuie ca numărul $N$ de elemente să satisfacă relația :

$$\frac{\log N}{n} \geqslant H \Rightarrow N \geqslant 2^{nH}.$$

Dacă avem această condiție, putem aranja probabilitățile de intrare astfel ca să transmitem entropia $H$.

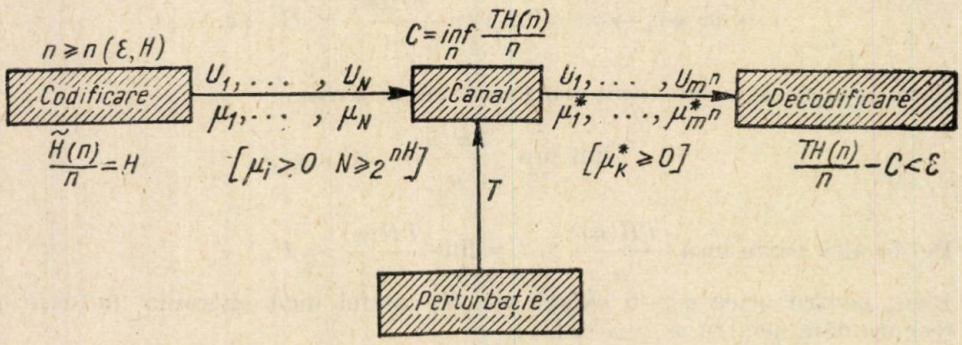



Fig. 2

REMARCĂ. 1. Schema codificării va fi cea din figura 2.

2. Se poate ca $C = H$, ceea ce înseamnă că folosind extensii suficient de lungi, reușim să recepționăm exact ceea ce s-a transmis.

Primită la redacție la 16 aprilie 1962

## ОПЕРАТОР ВОЗМУЩЕНИЯ В ПЕРЕДАЧЕ ИНФОРМАЦИИ

### РЕЗЮМЕ

В работе возмущение мы рассматриваем как оператор, действующий на вероятности сигналов при эмиссии и изменяющий в сторону увеличения энтропию источника, дающую нам степень неопределенности источника. Считаем также, что испускаемые и принимаемые сигналы принадлежат одному и тому же множеству $\Omega$. Схемы передачи информации без кодификации и с кодификацией даются соответственно на рис. 1 и рис. 2. В случае, когда канал не обладает памятью, возмущение является линейным преобразованием вероятностей при эмиссии с матрицей $(\pi_{ik})_1^m$, где $\pi_{ik}$ — вероятность приема сигнала $A_k$,

когда передается $A_i$. В случае, когда канал имеет конечную память длины $s$, возмущение является матричным преобразованием $(\pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s})_1^m$, где $\pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s}$ представляет собой вероятность приема сигнала $A_{k_s}$, когда передаются по порядку сигналы $A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_s}$.

Усиление возмущения сводится к итерации оператора $T$. Получается простая теорема кодификации: ТЕОРЕМА 3: *Если дан источник конечной информации, содержащий $m$ элементов, энтропия $H$, $0 < H < \log m$, и канал с возмущением $T$, то, для любого $\varepsilon > 0$ существует целое положительное число $n(\varepsilon, H)$ такое, что как только $n \geqslant n(\varepsilon, H)$ на протяжении длины $n$, существует множество сигналов $U_1, U_2, \dots, U_N$, $N \geqslant 2^{nH}$, при передаче которых принимаемая энтропия отклоняется меньше, чем на величину $\varepsilon$, от минимальной энтропии, которую можно принимать по данному каналу.*

## L'OPÉRATEUR PERTURBATION DANS LA TRANSMISSION DE L'INFORMATION

RÉSUMÉ

L'auteur considère la perturbation comme un opérateur agissant sur les probabilités des signaux à l'émission, en modifiant l'entropie de la source, qui fournit le degré d'indétermination de la source, dans le sens croissant. Il considère, en outre, que les signaux, à l'émission et à la réception, appartiennent au même ensemble $\Omega$.

Les schémas de la transmission de l'information sans et avec codification sont représentés respectivement par les figures 1 et 2. Au cas où le canal ne possède pas de mémoire, la perturbation est une transformation linéaire des probabilités de l'émission, ayant la matrice $(\pi_{ik})_1^m$, où $\pi_{ik}$ est la probabilité pour qu'on reçoive le signal $A_k$ lorsque l'on transmet $A_i$. Au cas où le canal possède une mémoire finie de longueur $s$, la perturbation est une transformation dont la matrice est $(\pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s})_1^m$ où $\pi_{h_1 h_2 \dots h_s, k_s}$ désigne la probabilité de recevoir le signal $A_{k_s}$, lorsque l'on émet la succession de signaux $A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_s}$.

L'amplification de la perturbation se réduit à l'itération de l'opérateur $T$. On obtient un théorème de codification simple : THÉORÈME 3 : *Etant donnée une source d'information finie, contenant $m$ éléments, une entropie $H$, $0 < H < \log m$, et un canal de perturbation $T$, on peut démontrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ il y a un entier positif $n(\varepsilon, H)$ tel que, lorsque $n \geqslant n(\varepsilon, H)$, dans l'extension de longueur $n$, il existe plusieurs signaux : $U_1, U_2, \dots, U_N$, $N \geqslant 2^{nH}$ qui, s'il sont transmis, l'entropie reçue sera égale, avec une approximation inférieure à $\varepsilon$, au minimum de l'entropie pouvant être reçue par le canal donné.*

## BIBLIOGRAFIE

1. C. E. SHANNON, *A mathematical theory of communication*. Bell Syst. Techn. Journ., **27** 379—423, 623—656 (1948).
2. A. FEINSTEIN, *Foundations of information theory*. New York-Toronto-London, 1958.
3. А. Я. ХИНЧИН, *Понятие энтропии в теории вероятностей*. Успехи Матем. наук, **8**, *3(55)*, 3—20 (1953).
4. — *Об основных теоремах теории информации*. Успехи Матем. наук, **11**, *1(67)*, 17—75 (1956).
5. O. ONICESCU, *Calculul probabilităților*. Ed. tehnică, București, 1956.
6. L. BRILLOUIN, *La science et la théorie de l'information*. Paris, 1959.

# COMPORTAREA ASIMPTOTICĂ A SOLUȚIILOR UNOR ECUAȚII CU DIFERENȚE FINITE[1)]

DE

V. BOȚOACĂ

## I

În strictă analogie cu teoria ecuațiilor diferențiale se poate dezvolta teoria ecuațiilor cu diferențe finite.

În cele ce urmează vom stabili unele rezultate relative la sistemele cu diferențe finite, cu unele teoreme de comportare asimptotică a soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare date de A. Wintner [1] și generalizate într-o anumită direcție de C. Vîrsan și C. Anghel [2].

Pentru cele ce urmează vom demonstra mai întîi următoarea

LEMĂ. *Dacă o funcție $y(x)$ verifică inegalitatea*

$$|y(x)| \leqslant m\left(1 + a\sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,|y(k)|\right),$$

*cu $M(x) > 0$, $m > 0$, $a > 0$ ($a$, $m$ constante), atunci are loc inegalitatea :*

$$|y(x)| \leqslant m\,(1 + aM(0)\,|y(0)|)\prod_{k=0}^{x-1}(1 + a\,m\,M(k)).$$

Demonstrație. Înmulțind ambii membri ai primei inegalități cu $M(x)$, obținem

$$|y(x)|\,M(x) \leqslant m\,M(x)\left(1 + a\sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,|y(k)|\right).$$

---

[1)] Această lucrare a fost efectuată la Cercul de analiză matematică de la Facultatea de matematică și fizică a Universității din București sub conducerea conf. A. Halanay.

Notăm cu $v(x) = \sum_{k=0}^{x-1} M(k) \mid y(k) \mid$ și astfel obținem:

$$\mid y(x) \mid M(x) \leqslant m M(x) \ (1 + a v(x)).$$

Dar $v(x+1) - v(x) = M(x) \mid y(x) \mid$ sau

$$v(x+1) - v(x) \leqslant m M(x) \ (1 + a v(x)).$$

Împărțind cu $1 + a v(x)$ obținem

$$\frac{v(x+1) - v(x)}{1 + a v(x)} \leqslant m M(x)$$

și în continuare obținem:

$$\frac{(1 + a v(x+1)) - (1 + a v(x))}{1 + a v(x)} \leqslant a m M(x).$$

Notăm cu

$$w(x) = 1 + a v(x).$$

Atunci avem

$$\frac{w(x+1) - w(x)}{w(x)} \leqslant a m M(x)$$

sau

$$\frac{w(x+1)}{w(x)} - 1 \leqslant a m M(x),$$

$$\frac{w(x+1)}{w(x)} \leqslant 1 + a m M(x),$$

$$w(x+1) \leqslant (1 + a m M(x)) w(x)$$

care se mai poate scrie astfel:

$$w(x) \leqslant w(0) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + a m M(k))$$

sau

$$1 + a v(x) \leqslant (1 + a v(0)) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + a m M(k))$$

$$v(0) = M(0) \mid y(0) \mid$$

$$1 + a v(x) \leqslant (1 + a M(0) \mid y(0) \mid) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + a m M(k)).$$

Înlocuind în inegalitatea inițială obținem:

$$\mid y(x) \mid \leqslant m \ (1 + a M(0) \mid y(0) \mid) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + a m M(k)) \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Lema demonstrată ne va folosi la demonstrarea unor teoreme privind comportarea asimptotică a soluțiilor unor ecuații liniare cu diferențe finite. Vom considera întîi ecuații de ordinul doi, apoi ecuații de ordinul $n$ și, în sfîrșit, sisteme de ecuații liniare cu diferențe finite scrise sub formă matricială.

## II

Fie ecuațiile cu diferențe finite:

$$y(x+2) + a(x)\, y(x) = 0$$
$$y(x+2) + b(x)\, y(x) = 0$$

și $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ soluții liniar independente ale primei ecuații. $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ fiind liniar independente, înseamnă că avem:

$$w(x) = \begin{vmatrix} \mu_1(x) & \mu_2(x) \\ \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Facem transformările:

$$\begin{aligned} y(x) &= p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x), \\ y(x+1) &= p_1(x)\,\mu_1(x+1) + p_2(x)\,\mu_2(x+1), \end{aligned} \tag{1}$$

unde $p_1(x)$ și $p_2(x)$ trebuie determinate. Fie

$$p_1(x+1) - p_1(x) = D_1(x),$$
$$p_2(x+1) - p_2(x) = D_2(x).$$

Înlocuind în prima din relațiile (1) pe $x$ prin $x+1$, obținem:

$$y(x+1) = p_1(x+1)\,\mu_1(x+1) + p_2(x+1)\,\mu_2(x+1).$$

Folosind a doua relație din (1) și notațiile introduse mai sus avem:

$$y(x+1) = p_1(x)\,\mu_1(x+1) + p_2(x)\,\mu_2(x+1) + D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1)$$

sau

$$D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1) = 0.$$

Înlocuind în a doua din relațiile (1) pe $x$ prin $x+1$, obținem:

$$y(x+2) = p_1(x+1)\,\mu_1(x+2) + p_2(x+1)\,\mu_2(x+2)$$

sau

$$y(x+2) = p_1(x)\,\mu_1(x+2) + p_2(x)\,\mu_2(x+2) + D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2).$$

Înlocuind în ecuația a doua avem de asemenea:

$$p_1(x)\,\mu_1(x+2) + p_2(x)\,\mu_2(x+2) + D_1(x)\,\mu_1(x+2) + \\ + D_2(x)\,\mu_2(x+2) + b(x)\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)] = 0$$

sau

$$D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = -p_1(x)\,[\mu_1(x+2) + \\ + b(x)\,\mu_1(x)] - p_2(x)\,[\mu_2(x+2) + b(x)\,\mu_2(x)].$$

Deoarece $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ sînt soluțiile primei ecuații, atunci avem

$$\mu_1(x+2) + a(x)\,\mu_1(x) = 0,$$
$$\mu_2(x+2) + a(x)\,\mu_2(x) = 0.$$

Înlocuind în relația de mai sus obținem:

$$D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = \\ = -p_1(x)\,\mu_1(x)\,[b(x) - a(x)] - p_2(x)\,\mu_2(x)[b(x) - a(x)]$$

sau

$$D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = \\ = [a(x) - b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)].$$

Am obținut astfel sistemul:

$$\begin{cases} D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1) = 0 \\ D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = [a(x) - \\ \qquad - b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)]. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este:

$$w(x+1) = \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \\ \mu_1(x+2) & \mu_2(x+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \\ -a(x)\,\mu_1(x) & -a(x)\,\mu_2(x) \end{vmatrix} = \\ = a(x)\,w(x).$$

Presupunînd că $a(x) \neq 0$ și deoarece $w(x) \neq 0$, rezultă că

$$w(x+1) \neq 0.$$

Rezolvîndu-se sistemul obținem:

$$D_1(x) = \frac{\mu_2(x+1)\,[a(x) - b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)]}{a(x)\,w(x)},$$

$$D_2(x) = \frac{-\mu_1(x+1)\,[a(x) - b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)]}{a(x)\,w(x)}.$$

Cu notațiile :

$$C_{11}(x)=\frac{\mu_2(x+1)\,[a(x)-b(x)]\,\mu_1(x)}{a(x)\,w(x)},\quad C_{12}(x)=\frac{\mu_2(x+1)\,[a(x)-b(x)]\,\mu_2(x)}{a(x)\,w(x)},$$

$$C_{21}(x)=\frac{-\mu_1(x+1)\,[a(x)-b(x)]\,\mu_1(x)}{a(x)\,w(x)},\quad C_{22}(x)=\frac{-\mu_1(x+1)\,[a(x)-b(x)]\,\mu_2(x)}{a(x)\,w(x)}, \tag{2}$$

obținem relațiile :

$$D_1(x)=C_{11}(x)\,p_1(x)+C_{12}(x)\,p_2(x),$$

$$D_2(x)=C_{21}(x)\,p_1(x)+C_{22}(x)\,p_2(x),$$

care se mai pot scrie astfel :

$$p_1(x+1)-p_1(x)=C_{11}(x)\,p_1(x)+C_{12}(x)\,p_2(x),$$

$$p_2(x+1)-p_2(x)=C_{21}(x)\,p_1(x)+C_{22}(x)\,p_2(x).$$

Trebuie să rezolvăm aceste ecuații în raport cu $p_1(x)$, respectiv $p_2(x)$. Din prima ecuație avem :

$$p_1(1)-p_1(0)=C_{11}(0)\,p_1(0)+C_{12}(0)\,p_2(0),$$

$$p_1(2)-p_1(1)=C_{11}(1)\,p_1(1)+C_{12}(1)\,p_2(1),$$

. . . . . .

$$p_1(x)-p_1(x-1)=C_{11}(x-1)\,p_1(x-1)+C_{12}(x-1)\,p_2(x-1).$$

Însumînd aceste relații, obținem :

$$p_1(x)-p_1(0)=\sum_{k=0}^{x-1}[C_{11}(k)\,p_1(k)+C_{12}(k)\,p_2(k)]$$

sau

$$p_1(x)=p_1(0)+\sum_{k=0}^{x-1}[C_{11}(k)\,p_1(k)+C_{12}(k)\,p_2(k)].$$

Analog obținem din ecuația a doua următoarea relație :

$$p_2(x)=p_2(0)+\sum_{k=0}^{x-1}[C_{21}(k)\,p_1(k)+C_{22}(k)\,p_2(k)].$$

Notînd prin

$$M(k)=\max_{i,\,l=1,\,2}|C_{il}(x)|, \tag{3}$$

obținem :

$$|p_1(x)|\leqslant|p_1(0)|+\sum_{k=0}^{x-1}M(k)\,(|p_1(k)|+|p_2(k)|),$$

$$|p_2(x)|\leqslant|p_2(0)|+\sum_{k=0}^{x-1}M(k)\,(|p_1(k)|+|p_2(k)|),$$

Adunînd relațiile de mai sus ajungem la

$$|p_1(x)| + |p_2(x)| \leqslant |p_1(0)| + |p_2(0)| + 2\sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,(|p_1(k)| + |p_2(k)|).$$

Notînd prin

$$v(x) = |p_1(x)| + |p_2(x)|$$

obținem :

$$v(x) \leqslant v(0) + 2\sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,v(k)$$

sau

$$v(x) \leqslant v(0)\left(1 + \frac{2}{v(0)}\sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,v(k)\right).$$

Sîntem în condițiile în care putem aplica lema demonstrată mai înainte. Avem prin urmare

$$v(x) \leqslant v(0)\left(1 + \frac{2}{v(0)}\,M(0)\,v(0)\right)\prod_{k=0}^{x-1}\left(1 + \frac{2}{v(0)}\,v(0)\,M(k)\right),$$

deci

$$v(x) \leqslant v(0)\,(1 + 2M(0))\prod_{k=0}^{x-1}(1 + 2M(k)).$$

Presupunînd că seria $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, rezultă că și produsul

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + 2M(k)) < \infty.$$

Deci avem $|p_1(x)| + |p_2(x)| < L$ pentru toți $x > 0$.

Din $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ rezultă că $\sum_{k=0}^{\infty} |C_{il}(k)| < \infty$, $\quad (i, l = 1, 2)$.

Rezultă că seriile

$$\sum_{k=0}^{\infty} [C_{i1}(k)\,p_1(k) + C_{i2}(k)\,p_2(k)], \qquad (i = 1, 2),$$

sînt convergente. Deci putem scrie :

$$p_1(x) = C_1 + \varepsilon_1(x), \text{ cu } \lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$p_2(x) = C_2 + \varepsilon_2(x), \text{ cu } \lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Atunci soluțiile ecuației a doua sînt date de expresiile :

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x).$$

$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x+1).$$

Astfel am demonstrat:

TEOREMA 1. *Fiind date ecuațiile cu diferențe finite:*

$$y(x+2) + a(x)\, y(x) = 0$$

*și*

$$y(x+2) + b(x)\, y(x) = 0$$

*iar* $\mu_1(x)$ *și* $\mu_2(x)$ *soluții liniar independente ale primei ecuații, dacă* $a(x) \neq 0$ *și* $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, *unde* $M(x)$ *are expresia dată de* (2) *și* (3), *soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi date de expresiile următoare:*

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x),$$

$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x+1),$$

*unde* $C_1$ *și* $C_2$ *sînt constante, iar* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = 0$ *și* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0$.

## III

Fie ecuațiile cu diferențe finite:

$$\Delta^2 y(x) + a(x)\, y(x) = 0,$$

$$\Delta^2 y(x) + b(x)\, y(x) = 0,$$

care se mai pot scrie

$$y(x+2) - 2y(x+1) + [1 + a(x)]\, y(x) = 0,$$

$$y(x+2) - 2y(x+1) + [1 + b(x)]\, y(x) = 0.$$

Fie $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ soluțiile liniar independente ale primei ecuații $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ fiind liniar independente, înseamnă că avem

$$w(x) = \begin{vmatrix} \mu_1(x) & \mu_2(x) \\ \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Facem transformările:

$$y(x) = p_1(x)\, \mu_1(x) + p_2(x)\, \mu_2(x),$$

$$y(x+1) = p_1(x)\, \mu_1(x+1) + p_2(x)\, \mu_2(x+1),$$

unde $p_1(x)$ și $p_2(x)$ trebuie determinați.

Definim:

$$p_1(x+1) - p_1(x) = D_1(x),$$

$$p_2(x+1) - p_2(x) = D_2(x).$$

Procedînd ca în cazul precedent obținem:

$$y(x+1) = p_1(x+1)\, \mu_1(x+1) + p_2(x+1)\, \mu_2(x+1)$$

sau

$$y(x+1) = p_1(x)\,\mu_1(x+1) + p_2(x)\,\mu_2(x+1) + \\ + D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1),$$

deci:

$$D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1) = 0.$$

Mai departe

$$y(x+2) = p_1(x+1)\,\mu_1(x+2) + p_2(x+1)\,\mu_2(x+2),$$

deci

$$y(x+2) = p_1(x)\,\mu_1(x+2) + p_2(x)\,\mu_2(x+2) + \\ + D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2).$$

Prin urmare:

$$[p_1(x)\,\mu_1(x+2) + p_2(x)\,\mu_2(x+2)] + [D_1(x)\,\mu_1(x+2) + \\ + D_2(x)\,\mu_2(x+2)] - 2[p_1(x)\,\mu_1(x+1) + p_2(x)\,\mu_2(x+1)] + \\ + [1 + b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)]$$

sau:

$$-[D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2)] = \\ = [\mu_1(x+2) - 2\,\mu_1(x+1) + (1 + b(x))\,\mu_1(x)]\,p_1(x) + \\ + [\mu_2(x+2) - 2\,\mu_2(x+1) + (1 + b(x))\,\mu_2(x)]\,p_2(x).$$

Deoarece $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ sînt soluții ale primei ecuații, rezultă că avem:

$$\mu_1(x+2) - 2\,\mu_1(x+1) + [1 + a(x)]\,\mu_1(x) = 0,$$

$$\mu_2(x+2) - 2\,\mu_2(x+1) + [1 + a(x)]\,\mu_2(x) = 0.$$

Înlocuind în relația de mai sus obținem:

$$-D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2)] = \\ = [2\,\mu_1(x+1) - \mu_1(x) - a(x)\,\mu_1(x) - 2\,\mu_1(x+1) + \mu_1(x) + \\ + b(x)\,\mu_1(x)]\,p_1(x) + [2\,\mu_2(x+1) - \mu_2(x) - \\ - a(x)\,\mu_2(x) - 2\,\mu_2(x+1) + \mu_2(x) + b(x)\,\mu_2(x)]\,p_2(x).$$

De aici deducem:

$$D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = [a(x) - b(x)] \cdot \\ \cdot [p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)].$$

Am obținut astfel sistemul:

$$\begin{cases} D_1(x)\,\mu_1(x+1) + D_2(x)\,\mu_2(x+1) = 0 \\ D_1(x)\,\mu_1(x+2) + D_2(x)\,\mu_2(x+2) = \\ \quad = [a(x) - b(x)]\,[p_1(x)\,\mu_1(x) + p_2(x)\,\mu_2(x)]. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$w(x+1) = \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \\ \mu_1(x+2) & \mu_2(x+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \\ 2\mu_1(x+1) - (1+a(x))\mu_1(x) & 2\mu_2(x+1) - (1+a(x))\mu_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) \\ -[1+a(x)]\mu_1(x) & -[1+a(x)]\mu_2(x) \end{vmatrix} = [1+a(x)]\,w(x).$$

Presupunînd $1 + a(x) \neq 0$ și deoarece $w(x) \neq 0$ rezultă că și $w(x+1) \neq 0$.

Rezolvînd sistemul obținem :

$$D_1(x) = \frac{\mu_2(x+1)[a(x)-b(x)][\mu_1(x)p_1(x)+\mu_2(x)p_2(x)]}{[1+a(x)]w(x)}$$

$$D_2(x) = \frac{-\mu_1(x+1)[a(x)-b(x)][\mu_1(x)p_1(x)+\mu_2(x)p_2(x)]}{(1+a(x)]w(x)}.$$

Notînd :

$$C_{11}(x) = \frac{\mu_2(x+1)[a(x)-b(x)]\mu_1(x)}{[1+a(x)]w(x)},\quad C_{12}(x) = \frac{\mu_2(x+1)[a(x)-b(x)]\mu_2(x)}{[1+a(x)]w(x)},$$

(4)

$$C_{21}(x) = \frac{-\mu_1(x+1)[a(x)-b(x)]\mu_1(x)}{[1+a(x)]w(x)},\quad C_{22}(x) = \frac{-\mu_1(x+1)[a(x)-b(x)]\mu_2(x)}{[1+a(x)]w(x)},$$

obținem relațiile :

$$D_1(x) = C_{11}(x)p_1(x) + C_{12}(x)p_2(x),$$

$$D_2(x) = C_{21}(x)p_1(x) + C_{22}(x)p_2(x),$$

care se mai pot scrie

$$p_1(x+1) - p_1(x) = C_{11}(x)p_1(x) + C_{12}(x)p_2(x),$$

$$p_2(x+1) - p_2(x) = C_{21}(x)p_1(x) + C_{22}(x)p_2(x).$$

Trebuie să rezolvăm aceste ecuații în funcție de $p_1(x)$, respectiv $p_2(x)$. Din prima ecuație avem :

$$p_1(1) - p_1(0) = C_{11}(0)p_1(0) + C_{12}(0)p_2(0)$$

$$p_1(2) - p_1(1) = C_{11}(1)p_1(1) + C_{12}(1)p_2(1)$$

. . . . . .

$$p_1(x) - p_1(x-1) = C_{11}(x-1)p_1(x-1) + C_{12}(x-1)p_2(x-1).$$

Însumînd relațiile obținem :

$$p_1(x) - p_1(0) = \sum_{k=0}^{x-1} [C_{11}(k)p_1(k) + C_{12}(k)p_2(k)],$$

sau

$$p_1(x) = p_1(0) + \sum_{k=0}^{x-1} [C_{11}(k)\, p_1(k) + C_{12}(k)\, p_2(k)].$$

Analog obținem din ecuația a doua următoarea relație:

$$p_2(x) = p_2(0) + \sum_{k=0}^{x-1} [C_{21}(k)\, p_1(k) + C_{22}(k)\, p_2(k)].$$

Notînd

$$M(x) = \max_{i,\, l = 1,2} |\, C_{il}(x)\,| \tag{5}$$

obținem:

$$|\, p_1(x)\,| \leqslant |\, p_1(0)\,| + \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,(|\, p_1(k)\,| + |\, p_2(k)\,|),$$

$$|\, p_2(x)\,| \leqslant |\, p_2(0)\,| + \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,(|\, p_1(k)\,| + |\, p_2(k)\,|).$$

Adunînd relațiile de mai sus vom obține:

$$|\, p_1(x)\,| + |\, p_2(x)\,| \leqslant |\, p_1(0)\,| + |\, p_2(0)\,| + 2 \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\,(|\, p_1(k)\,| + |\, p_2(k)\,|).$$

Notînd prin $v(x) = |\, p_1(x)\,| + |\, p_2(x)\,|$ va rezulta:

$$v(x) \leqslant v(0) + 2 \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)$$

sau

$$v(x) \leqslant v(0)\left(1 + \frac{2}{v(0)} \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)\right).$$

Sîntem în condițiile în care putem aplica lema demonstrată mai înainte. Avem prin urmare

$$v(x) \leqslant v(0)\left(1 + \frac{2}{v(0)}\, M(0)\, v(0)\right) \prod_{k=0}^{x-1} \left(1 + \frac{2}{v(0)}\; v(0)\; M(k)\right),$$

deci

$$v(x) \leqslant v(0)\,(1 + 2M(0)) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + 2\, M(k)).$$

Presupunînd că seria $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, rezultă că și $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + 2M(k)) < \infty$.

Avem deci $|\, p_1(x)\,| + |\, p_2(x)\,| < L$ pentru toți $x > 0$.

Din $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ rezultă că seriile $\sum_{k=0}^{\infty} [C_{i1}(k)\, p_1(k) + C_{i2}(k)\, p_2(k)]$, $(i = 1, 2)$, sînt convergente.

Deci putem scrie:

$$p_1(x) = C_1 + \varepsilon_1(x), \quad \text{cu} \lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$p_2(x) = C_2 + \varepsilon_2(x), \quad \text{cu} \lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Atunci, soluțiile ecuației a doua sînt date de expresiile:

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x),$$

$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x+1).$$

Am demonstrat astfel

TEOREMA 2. *Fie date ecuațiile cu diferențe finite:*

$$\Delta^2 y(x) + a(x)\, y(x) = 0$$

*și*

$$\Delta^2 y(x) + b(x)\, y(x) = 0$$

*iar $\mu_1(x)$ și $\mu_2(x)$ soluții liniar independente ale primei ecuații și dacă $a(x) + 1 \neq 0$ și $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, unde $M(k)$ are expresia dată de (4) și (5), soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi date de expresiile:*

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x),$$

$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\, \mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\, \mu_2(x+1),$$

*unde $C_1$ și $C_2$ sînt constante, iar $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0$.*

## IV

Fie ecuațiile cu diferențe finite:

$$f(x+n) + a_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0$$

$$f(x+n) + b_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0$$

și $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\ldots$, $\mu_n(x)$ soluții liniar independente ale primei ecuații. Rezultă deci că avem:

$$w(x) = \begin{vmatrix} \mu_1(x) & \mu_2(x) & \ldots & \mu_n(x) \\ \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) & \ldots & \mu_n(x+1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \mu_1(x+n-1) & \mu_2(x+n-1) & \ldots & \mu_n(x+n-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se fac substituțiile :

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+k), \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Fie

$$p_i(x+1) - p_i(x) = D_i(x), \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Procedînd ca mai sus avem

$$f(x+1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x+1)\ \mu_i(x+1),$$

de unde deducem

$$f(x+1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\ \mu_i(x+1) + \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+1).$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+1) = 0.$$

Asemănător obținem următoarele relații :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+k) = 0, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Mai departe

$$f(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+n) + \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+n).$$

Înlocuind în a doua ecuație obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+n) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+n) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k(x) \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+k) = 0$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, \mu_i(x+n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+n) - \sum_{k=0}^{n-2} b_k(x) \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mu_i(x+k).$$

Deoarece $\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots,\ \mu_n(x)$ sînt soluții ale primei ecuații, atunci au loc relațiile :

$$\mu_i(x+n) + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\, \mu_i(x+k) = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Înlocuind în ecuația de mai sus obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_i(x+k) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} b_k(x) \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k),$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_i(x+k) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-2} b_k(x)\,\mu_i(x+k),$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-2} [a_k(x) - b_k(x)]\,\mu_i(x+k).$$

Am obținut astfel sistemul :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+k) = 0, & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-2} [a_k(x) - b_k(x)]\,\mu_i(x+k). \end{cases}$$

Determinantul sistemului este :

$$w(x+1) = \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) & \ldots & \mu_n(x+1) \\ \mu_1(x+2) & \mu_2(x+2) & \ldots & \mu_n(x+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1(x+n) & \mu_2(x+n) & \ldots & \mu_n(x+n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) & \ldots & \mu_n(x+1) \\ \mu_1(x+2) & \mu_2(x+2) & \ldots & \mu_n(x+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\sum_{k=0}^{n-2} a_n(x)\,\mu_1(x+k) & -\sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_2(x+k) & \ldots & -\sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_n(x+k) \end{vmatrix}.$$

Notăm cu $U_1, U_2, \ldots, U_n$ minorii ultimei linii a determinantului. Dezvoltîndu-l după ultima linie obținem :

$$-w(x+1) = U_1 \sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_1(x+k) + \ldots + U_n \sum_{k=0}^{n-2} a_k(x)\,\mu_n(x+k) =$$

$$= a_{n-2}(x) \sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x+n-2) + \ldots + a_1(x) \sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x+1) + a_0(x) \sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x).$$

Conform proprietăților determinanților avem relațiile :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \mu_i(x+k) = \begin{cases} (-1)^{n-1} w(x) & \text{pentru } k=0 \\ 0 & \text{pentru } k=1,2,\ldots,n-2. \end{cases}$$

Deci avem relația :

$$w(x+1) = (-1)^n a_0(x)\, w(x).$$

Presupunînd $a_0(x) \neq 0$ și cum $w(x) \neq 0$, rezultă că $w(x+1) \neq 0$. Rezolvînd sistemul obținem :

$$D_i(x) = \frac{(-1)^{n+i} U_i \sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} [a_k(x) - b_k(x)]\, \mu_l(x+k) \right\} p_l(x)}{(-1)^n a_0(x)\, w(x)},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Notînd

$$C_{il}(x) = \frac{(-1)^{n+i} U_i \sum_{k=0}^{n-2} [a_k(x) - b_k(x)]\, \mu_l(x+k)}{(-1)^n a_0(x)\, w(x)}, \tag{6}$$

$$(i,\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

obținem ecuațiile :

$$D_i(x) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(x)\, p_l(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sau

$$p_i(x+1) - p_i(x) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(x)\, p_l(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Trebuie să rezolvăm cele $n$ ecuații în funcție de $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$, respectiv $p_n(x)$.

Din una dintre ecuații obținem :

$$p_i(1) - p_i(0) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(0)\, p_l(0),$$

$$p_i(2) - p_i(1) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(1)\, p_l(1),$$

. . . . . .

$$p_i(x) - p_i(x-1) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(x-1)\, p_l(x-1),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Adunînd relațiile obținem :

$$p_i(x) - p_i(0) = \sum_{k=0}^{x-1} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k)\, p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sau

$$p_i(x) = p_i(0) + \sum_{k=0}^{x-1} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k)\, p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Notînd

$$M(x) = \max |\, C_{il}(x)\,|, \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

obținem

$$|\, p_i(x)\,| \leqslant |\, p_i(0)\,| + \sum_{k=0}^{x-1} M(k) \sum_{l=1}^{n} |\, p_l(k)\,|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Însumînd după $i$, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} |\, p_i(x)\,| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\, p_i(0)\,| + n \sum_{k=0}^{x-1} M(k) \sum_{l=1}^{n} |\, p_l(k)\,|.$$

Notînd prin $v(x) = \sum_{i=1}^{n} |\, p_l(k)\,|$, rezultă

$$v(x) \leqslant v(0) + n \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)$$

sau

$$v(x) \leqslant v(0) \left(1 + \frac{n}{v(0)} \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)\right).$$

Sîntem în condițiile în care putem aplica lema demonstrată la început. Avem prin urmare:

$$v(x) \leqslant v(0) \left(1 + \frac{n}{v(0)} M(0)\, v(0)\right) \prod_{k=0}^{x-1} \left(1 + \frac{n}{v(0)} M(k)\, v(0)\right)$$

deci

$$v(x) \leqslant v(0)\,(1 + n\,M(0)) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + n\,M(k)).$$

Presupunînd că seria $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, rezultă că $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + n\,M(k)) < \infty$.

Avem deci $\sum_{i=1}^{n} |\, p_i(x)\,| < L$ pentru toți $x > 0$.

Din $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ rezultă că $\sum_{k=0}^{\infty} |\, C_{il}(k)\,| < \infty$,

deci seriile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k)\, p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sînt convergente.

Putem deci scrie:

$$p_i(x) = C_i + \varepsilon_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0$ și $C_i$ sînt constante. Atunci soluțiile ecuației a doua sînt date de expresiile:

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\, \mu_i(x+k), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Am demonstrat astfel

TEOREMA 3. *Fiind date ecuațiile cu diferențe finite:*

$$f(x+n) + a_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0,$$

$$f(x+n) + b_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0,$$

*cu* $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ *soluții liniar independente ale primei ecuații și dacă* $a_0(x) \neq 0$ *și* $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, *unde* $M(x)$ *are expresia dată de* (6) *și* (7), *atunci soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi date de expresiile:*

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\, \mu_i(x+k), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

*unde* $C_i$ *sînt constante iar* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0$.

## V

Fie ecuațiile cu diferențe finite:

$$\overset{n}{\Delta} f(x) + a_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0,$$

$$\overset{n}{\Delta} f(x) + b_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0.$$

Cu ajutorul formulei de recurență

$$\overset{p}{\Delta} f(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k f(x+k),$$

obținem

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+k) + a_{n-2}(x) \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-2-k} C_{n-2}^k f(x+k) + \ldots$$

$$\ldots + a_1(x) \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} C_1^k f(x+k) + a_0(x) f(x) = 0.$$

Desfăcînd sumele rezultă :

$$[(-1)^n C_n^0 f(x) + (-1)^{n-1} C_n^1 f(x+1) + \ldots + (-1)^{n-n} C_n^n f(x+n)] +$$
$$+ a_{n-2}(x)\,[(-1)^{n-2} C_{n-2}^0 f(x) + (-1)^{n-3} C_{n-2}^1 f(x+1) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-2-n+2} C_{n-2}^{n-2} f(x+n-2)] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_1(x)\,[(-1)^1 C_1^0 f(x) + (-1)^{1-1} C_1^1 f(x+1)] + a_0(x) f(x) = 0.$$

Ordonînd după

$$f(x+n),\quad f(x+n-1),\ \ldots,\ f(x),$$

obținem :

$$C_n^n f(x+n) + (-1)^1 C_n^{n-1} f(x+n-1) + [(-1)^2 C_n^{n-1} +$$
$$+ a_{n-2}(x)\, C_{n-2}^{n-2}]\, f(x+n-2) + [(-1)^3 C_n^{n-3} + a_{n-2}(x)\,(-1)^1 C_{n-2}^{n-1} +$$
$$+ a_{n-3}(x)\, C_{n-2}^{n-2}]\, f(x+n-3) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [(-1)^{n-1} C_n^1 + a_{n-2}(x)\,(-1)^{n-3} C_{n-2}^1 + a_{n-3}(x)\,(-1)^{n-4} C_{n-3}^1 +$$
$$+ \ldots + a_1(x)\,(-1)^2 C_1^1]\, f(x+1) + [(-1)^n C_n^0 + a_{n-2}(x)\,(-1)^{n-2} C_{n-2}^0 +$$
$$+ \ldots + a_1(x)\,(-1)^1 C_1^0 + a_0(x)]\, f(x) = 0.$$

Facem notațiile :

$$A_n(x) = (-1)^0 C_n^n = 1,$$
$$A_{n-1}(x) = (-1)^1 C_n^{n-1} = -n,$$
$$A_{n-2}(x) = (-1)^2 C_n^{n-2} + (-1)^0 a_{n-2}(x)\, C_{n-2}^{n-2},$$
$$A_{n-3}(x) = (-1)^3 C_n^{n-3} + (-1)^1 a_{n-2}(x)\, C_{n-2}^{n-3} + (-1)^0 a_{n-3}(x)\, C_{n-3}^{n-3},$$
$$A_{n-4}(x) = (-1)^4 C_n^{n-4} + (-1)^2 a_{n-2}(x)\, C_{n-2}^{n-4} + (-1)^1 a_{n-3}(x)\, C_{n-3}^{n-4} +$$
$$+ (-1)^0 a_{n-4}(x)\, C_{n-4}^{n-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-k}(x) = (-1)^k C_n^{n-k} + \sum_{i=2}^{k} (-1)^{k-i} a_{n-i}(x)\, C_{n-i}^{n-k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1(x) = (-1)^{n-1} C_n^1 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-1-i} a_{n-i}(x) C_{n-i}^{n-(n-1)},$$
$$A_0(x) = (-1)^n C_n^0 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} a_{n-i}(x)\, C_{n-i}^{n-n}.$$

Obținem astfel ecuația :

$$f(x+n)+A_{n-1}(x)f(x+n-1)+A_{n-2}(x)f(x+n-2)+\ldots+A_0(x)f(x)=0.$$

Analog obținem pentru ecuația a doua :

$$f(x+n)+B_{n-1}(x)f(x+n-1)+B_{n-2}(x)f(x+n-2)+\ldots+B_0(x)f(x)=0,$$

unde

$$B_{n-k}(x)=(-1)^k C_n^{n-k}+\sum_{i=2}^{k}(-1)^{k-i}\,b_{n-i}(x)\,C_{n-i}^{n-k}.$$

Cele două ecuații se mai pot scrie restrîns, astfel :

$$f(x+n)+\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-(k+1)}(x)f(x+n-(k+1))=0,$$

$$f(x+n)+\sum_{k=0}^{n-1}B_{n-(k+1)}(x)f(x+n-(k+1))=0.$$

Fie $\mu_1(x)$, $\mu_2(x),\ldots,\mu_n(x)$ soluțiile liniar independente ale primei ecuații.

Facem următoarele transformări :

$$f(x+k)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,\mu_i(x+k),\qquad (k=0,\,1,\ldots,n-1).$$

Fie ca mai sus

$$p_i(x+1)-p_i(x)=D_i(x),\qquad (i=1,\,2,\ldots,n),$$

și

$$f(x+1)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x+1)\,\mu_i(x+1).$$

Astfel obținem :

$$f(x+1)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,\mu_i(x+1)+\sum_{i=1}^{n}D_i(x)\,\mu_i(x+1).$$

Mai departe

$$\sum_{i=1}^{n}D_i(x)\,\mu_i(x+1)=0.$$

Analog obținem următoarele relații :

$$\sum_{i=1}^{n}D_i(x)\,\mu_i(x+k)=0,\qquad (k=1,\,2,\ldots,n-1).$$

Avem și

$$f(x+n)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,\mu_i(x+n)+\sum_{i=1}^{n}D_i(x)\,\mu_i(x+n).$$

Înlocuind în ecuația a doua obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)+\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+n)+\sum_{k=0}^{n-1} B_{n-(k+1)}(x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k)=0,$$

care se mai poate scrie astfel :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)=-\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+n)-\sum_{k=0}^{n-1} B_{n-(k+1)}(x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k).$$

Deoarece $\mu_1(x)$, $\mu_2(x),\ldots,\mu_n(x)$ sînt soluții ale primei ecuații avem :

$$\mu_i(x+n)=-\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_i(x+n-(k+1)),\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Înlocuind în ecuația de mai sus obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_i(x+n-(k+1))-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} B_{n-(k+1)}(x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)=\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} B_{n-(k+1)}(x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k).$$

Avem deci

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)=\sum_{k=0}^{n-1}[A_{n-(k+1)}(x)-B_{n-(k+1)}(x)]\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k).$$

Am obținut astfel sistemul :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+k)=0, & (k=1,2,\ldots,n-1)\\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n)=\sum_{k=0}^{n-1}[A_{n-(k+1)}(x)-B_{n-(k+1)}(x)]\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,\mu_i(x+k).\end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$w(x+1)=\begin{vmatrix}\mu_1(x+1) & \mu_2(x+1) & \ldots & \mu_n(x+1)\\ \mu_1(x+2) & \mu_2(x+2) & \ldots & \mu_n(x+2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mu_1(x+n) & \mu_2(x+n) & \ldots & \mu_n(x+n)\end{vmatrix}.$$

Dar

$$\mu_i(x+n) = -\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_i(x+n-(k+1)), \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

și deci

$$w(x+1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_1(x+1) & \ldots & \mu_n(x+1) \\ \mu_1(x+2) & \ldots & \mu_n(x+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_1(x+n-(k+1)) & \ldots & -\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_n(x+n-(k+1)) \end{vmatrix}.$$

Notînd cu $U_1, U_2, \ldots, U_n$ minorii ultimei linii a determinantului și dezvoltînd determinantul după această linie obținem :

$$-w(x+1) = U_1 \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_1(x+n-(k+1)) + \ldots$$

$$\ldots + U_n \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-(k+1)}(x)\,\mu_n(x+n-(k+1)) =$$

$$= A_{n-1}(x) \sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x+n-1) + \ldots + A_0(x) \sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x).$$

Conform proprietăților determinanților avem

$$\sum_{i=1}^{n} U_i\,\mu_i(x+n-k) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } (k=1,2,\ldots,n-1), \\ (-1)^{n-1}\,w(x) & \text{pentru } k=n. \end{cases}$$

Deci

$$w(x+1) = (-1)^n\,A_0(x)\,w(x).$$

Deoarece $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ sînt liniar independente, înseamnă că $w(x) \neq 0$. Presupunînd că $A_0(x) \neq 0$, rezultă că $w(x+1) \neq 0$.

Sistemul obținut se mai poate scrie astfel :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+k) = 0, & (k=1,2,\ldots,n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\,\mu_i(x+n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \sum_{k=0}^{n-1} [A_{n-(k+1)}(x) - B_{n-(k+1)}(x)]\,\mu_i(x+k). \end{cases}$$

Rezolvîndu-l obținem :

$$D_i(x) = \frac{(-1)^{n+i}\,U_i \sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [A_{n-(k+1)}(x) - B_{n-(k+1)}(x)]\,\mu_l(x+k) \right\} p_l(x)}{(-1)^n\,A_0(x)\,w(x)},$$

$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Notînd

$$C_{il}(x) = \frac{(-1)^{n+i} U_i \sum_{k=0}^{n-1} [A_{n-(k+1)}(x) - B_{n-(k+1)}(x)] \mu_l(x+k)}{(-1)^n A_0(x) w(x)}, \quad (8)$$

$$(i, l = 1, 2, \ldots, n),$$

obținem relațiile :

$$D_i(x) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(x) p_l(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Trebuie să rezolvăm aceste $n$ ecuații în funcție de $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots,$ respectiv $p_n(x)$.

Luînd una, oarecare, dintre ecuații obținem succesiv :

$$p_i(1) - p_i(0) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(0) p_l(0),$$

$$p_i(2) - p_i(1) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(1) p_l(1),$$

. . . . . .

$$p_i(x) - p_i(x-1) = \sum_{l=1}^{n} C_{il}(x-1) p_l(x-1), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Adunînd relațiile obținem :

$$p_i(x) - p_i(0) = \sum_{k=0}^{x-1} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k) p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sau

$$p_i(x) = p_i(0) + \sum_{k=0}^{x-1} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k) p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Notînd

$$M(x) = \max |C_{il}(x)|, \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, n) \quad (9)$$

obținem :

$$|p_i(x)| \leqslant |p_i(0)| + \sum_{k=0}^{x-1} M(k) \sum_{l=1}^{n} |p_l(k)|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Însumînd vom obține :

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |p_i(0)| + n \sum_{k=0}^{x-1} M(k) \sum_{l=1}^{n} |p_l(k)|.$$

Notînd cu $v(x) = \sum_{i=1}^{n} |p_i(x)|$ obținem:

$$v(x) \leqslant v(0) + n \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)$$

sau

$$v(x) \leqslant v(0) \left(1 + \frac{n}{v(0)} \sum_{k=0}^{x-1} M(k)\, v(k)\right).$$

Sîntem în condițiile în care putem aplica lema. Avem prin urmare:

$$v(x) \leqslant v(0) \left(1 + \frac{n}{v(0)} M(0)\, v(0)\right) \prod_{k=0}^{x-1} \left(1 + \frac{n}{v(0)} M(k)\, v(0)\right),$$

deci

$$v(x) \leqslant v(0)\,(1 + n\,M(0)) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + n\,M(k)).$$

Presupunînd că seria $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ rezultă că și $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + n\,M(k)) < \infty$

și avem deci $\sum_{i=1}^{n} |p_i(x)| < L$ pentru toți $x > 0$.

Din $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ rezultă că $\sum_{k=0}^{\infty} |C_{il}(k)| < \infty$

și seriile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} C_{il}(k)\, p_l(k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sînt convergente.

Deci putem scrie

$$p_i(x) = C_i + \varepsilon_i(x),$$

unde $C_i$ sînt constante iar $\lim_{x \to \infty} \varepsilon_i(x) = 0$.

Atunci soluțiile celei de-a doua ecuații sînt date de:

$$f(x + k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\, \mu_i(x + k), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Am demonstrat astfel

TEOREMA 4. *Fiind date ecuațiile cu diferențe finite:*

$$\overset{n}{\Delta} f(x) + a_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0$$

*și*

$$\overset{n}{\Delta} f(x) + b_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0,$$

*iar*

$$\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots,\ \mu_n(x)$$

*soluții liniar independente ale primei ecuații, dacă*

$$A_0(x) = (-1)^n C_n^0 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} a_{n-i}(x)\, C_{n-i}^{n-n} \neq 0$$

*și*

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty,$$

*unde $M(x)$ are expresia dată de (8) și (9), atunci soluțiile celei de-a doua ecuații vor fi date de expresiile:*

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\, \mu_i(x+k), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

*unde $C_i$ sînt constante iar* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0$.

## VI

Fie sistemele de ecuații cu diferențe finite:

$$y_i(x+1) + a_{i1}(x)\, y_1(x) + \ldots + a_{in}(x)\, y_n(x) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i(x+1) + b_{i1}(x)\, y_1(x) + \ldots + b_{in}(x)\, y_n(x) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aceste sisteme se pot scrie sub formă matricială astfel:

$$Y(x+1) + A(x)\, Y(x) = 0,$$

$$Y(x+1) + B(x)\, Y(x) = 0,$$

$A(x)$ și $B(x)$ fiind matrice pătrate nesingulare.

Fie $Y_1(x)$ matricea pătrată a unui sistem fundamental de soluții al primei ecuații.

Facem substituția

$$Y(x) = Y_1(x)\, p(x),$$

unde $p(x)$ este o matrice coloană ce trebuie determinată.

Făcînd pe $x$ egal cu $x+1$ obținem:

$$Y(x+1) = Y_1(x+1)\, p(x+1).$$

Înlocuind în ecuația a doua obținem:

$$Y_1(x+1)\, p(x+1) + B(x)\, Y_1(x)\, p(x) = 0.$$

$Y_1(x)$ fiind matricea unui sistem fundamental, este nesingulară. Deci putem scrie:

$$p(x+1) = -\, Y_1^{-1}(x+1)\, B(x)\, Y_1(x).$$

Din

$$Y_1(x+1) = -A(x)\,Y_1(x)$$

avem

$$Y_1^{-1}(x+1) = -Y_1^{-1}(x)\,A^{-1}(x).$$

Înlocuind în ecuația de mai sus obținem:

$$p(x+1) = Y_1^{-1}(x)\,A^{-1}(x)\,B(x)\,Y_1(x)\,p(x).$$

În continuare putem scrie:

$$p(x+1) - p(x) = [Y_1^{-1}(x)\,A^{-1}(x)\,B(x)\,Y_1(x) - E]\,p(x),$$

$$p(x+1) - p(x) = Y_1^{-1}(x)\,[A^{-1}(x)\,B(x) - E]\,Y_1(x)\,p(x).$$

Notînd

$$C(x) = Y_1^{-1}(x)\,[A^{-1}(x)\,B(x) - E]\,Y_1(x),$$

obținem

$$p(x+1) - p(x) = C(x)\,p(x),$$

care se mai poate scrie

$$p(x) = p(0) + \sum_{k=0}^{x-1} C(k)\,p(k).$$

Luînd norma expresiei de mai sus obținem:

$$\|p(x)\| \leqslant \|p(0)\| + \sum_{k=0}^{x-1} \|C(k)\|\,\|p(k)\|,$$

sau

$$\|p(x)\| \leqslant \|p(0)\| \left(1 + \frac{1}{\|p(0)\|} \sum_{k=0}^{x-1} \|C(k)\|\,\|p(k)\|\right).$$

Sîntem în condițiile în care putem aplica lema demonstrată mai înainte. Deci avem:

$$\|p(x)\| \leqslant \|p(0)\|\,(1 + \|C(0)\|) \prod_{k=0}^{x-1} (1 + \|C(k)\|).$$

Presupunînd că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \|C(k)\| < \infty$ rezultă că și produsul $\prod_{k=0}^{\infty} (1 +$ $+ \|C(k)\|) < \infty$ și $\|p(x)\| < L$ pentru $x > 0$, deci seria $\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\,p(k)$ converge, adică $\lim_{x\to\infty} p(x)$ există.

În definitiv, putem scrie

$$p(x) = C + \varepsilon(x),$$

unde $C$ este o matrice coloană constantă, iar $\varepsilon(x)$ este o matrice coloană cu $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$. Deci soluția celei de-a doua ecuații este dată de

$$Y(x) = Y_1(x)[C + \varepsilon(x)].$$

Am demonstrat astfel

TEOREMA 5. *Fiind date ecuațiile matriciale cu diferențe finite*:

$$Y(x+1) + A(x)\,Y(x) = 0$$

*și*

$$Y(x+1) + B(x)\,Y(x) = 0,$$

*dacă* $Y_1(x)$ *este matricea pătrată a unui sistem fundamental de soluții al primei ecuații și dacă* $A(x)$ *este nesingulară iar seria* $\sum_{k=0}^{\infty} \| C(k) \| < \infty$, *unde* $C(x) = Y_1^{-1}(x)[A^{-1}(x)\,B(x) - E]\,Y_1(x)$, *atunci soluția celei de-a doua ecuații va fi dată de*:

$$Y(x) = Y_1(x)[C + \varepsilon(x)],$$

*unde* $C$ *este o matrice coloană constantă, iar* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$. Pentru ecuațiile diferențiale acesta corespunde rezultatului din [3].

Primită la redacție la 25 mai 1962

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Доказываются следующие теоремы:
ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы уравнения

$$y(x+2) + a(x)\,y(x) = 0,$$

$$y(x+2) + b(x)\,y(x) = 0$$

и пусть $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ линейно-независимые решения первого уравнения. Если $a(x) \neq 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, где $M(k)$ определяется соотношениями (2) и (3), то решения второго уравнения имеют вид

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x),$$

$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x+1),$$

где $C_1$, $C_2$ постоянные, а $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Рассматриваются уравнения

$$\Delta^2 y(x) + a(x)\, y(x) = 0,$$

$$\Delta^2 y(x) + b(x)\, y(x) = 0.$$

Пусть $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ линейно-независимые решения первого уравнения и $a(x) + 1 \neq 0$. Если $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, где $M(k)$ определяется соотношениями (4) и (5), то справедливо заключение предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы уравнения

$$f(x+n) + a_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0, \qquad a_0(x) \neq 0,$$

$$f(x+n) + b_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0$$

и пусть $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ линейно-независимые решения первого уравнения. Если $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$, где $M(k)$ определяется соотношениями (6) и (7), то решения второго уравнения имеют вид

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\, \mu_i(x+k), \qquad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

где $C_i$ постоянные, а $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0$.

Результат такого же вида устанавливается для уравнений

$$\Delta^n f(x) + a_{n-2}(x)\ \Delta^{n-2} f(x) + \ldots + a_0(x) f(x) = 0, \qquad a_0(x) \neq 0,$$

$$\Delta^n f(x) + b_{n-2}(x)\ \Delta^{n-2} f(x) + \ldots + b_0(x) f(x) = 0.$$

ТЕОРЕМА 5. Рассматриваются матричные уравнения

$$Y(x+1) + A(x)\, Y(x) = 0, \qquad \det A(x) \neq 0,$$

$$Y(x+1) + B(x)\, Y(x) = 0.$$

Если $Y_1(x)$ фундаментальная система решений первого уравнения и $\sum_{k=0}^{\infty} \| C(k) \| < \infty$, где $C(x) = Y_1^{-1}(x)\, [A^{-1}(x)\, B(x) - E]\, Y_1(x)$, то решение второго уравнения имеет вид

$$Y(x) = Y_1(x)\, [C + \varepsilon(x)],$$

где $C$ постоянная, а $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

# SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES


## RÉSUMÉ

On prouve

THÉORÈME 1. Soient les équations

$$\begin{aligned} y(x+2) + a(x)\,y(x) &= 0, \\ y(x+2) + b(x)\,y(x) &= 0, \end{aligned} \qquad a(x) \neq 0$$

et soient $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ deux solutions indépendantes de la première équation.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ où $M(k)$ est défini par (2) et (3), alors les solutions de la seconde équation ont la forme

$$y(x) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x),$$
$$y(x+1) = [C_1 + \varepsilon_1(x)]\,\mu_1(x+1) + [C_2 + \varepsilon_2(x)]\,\mu_2(x+1)$$

où $C_1$, $C_2$ sont des constantes, et $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to\infty} \varepsilon_2(x) = 0$.

Le THÉORÈME 2 établit un résultat analogue pour les équations

$$\Delta^2 y(x) + a(x)\,y(x) = 0,$$
$$\Delta^2 y(x) + b(x)\,y(x) = 0.$$

THÉORÈME 3. Soient les équations

$$\begin{aligned} f(x+n) + a_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + a_0(x) f(x) &= 0, \\ f(x+n) + b_{n-2}(x) f(x+n-2) + \ldots + b_0(x) f(x) &= 0 \end{aligned} \qquad a_0(x) \neq 0$$

et soient $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ des solutions indépendantes de la première équation. Si $\sum_{k=0}^{\infty} M(k) < \infty$ où $M(k)$ est défini par (6) et (7), alors les solutions de la seconde équation ont la forme

$$f(x+k) = \sum_{i=1}^{n} [C_i + \varepsilon_i(x)]\,\mu_i(x+k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

où $C_1$ sont des constantes et $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_i(x) = 0$.

Le THÉORÈME 4 établit un résultat analogue pour les équations

$$\begin{aligned} \overset{n}{\Delta} f(x) + a_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + a_0(x) f(x) &= 0, \\ \overset{n}{\Delta} f(x) + b_{n-2}(x) \overset{n-2}{\Delta} f(x) + \ldots + b_0(x) f(x) &= 0. \end{aligned} \qquad a_0(x) \neq 0$$

THÉORÈME 5. Soient les équations matricielles

$$Y(x+1) + A(x)\,Y(x) = 0, \qquad \det A(x) \neq 0.$$
$$Y(x+1) + B(x)\,Y(x) = 0.$$

Si $Y(x)$ est une matrice fondamentale des solutions de la première équation et si $\sum_{k=0}^{\infty} \| C(k) \| < \infty$ où

$$C(x) = Y_1^{-1}(x)[A^{-1}(x)\,B(x) - E]\,Y_1(x)$$

alors la solution de la seconde équation est de la forme

$$Y(x) = Y_1(x)\,[C + \varepsilon(x)]$$

où $C$ est constante et $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

## BIBLIOGRAFIE

1. A. WINTNER, *On linear perturbations.* Quart. Appl. Math., **15**, *4* (1958).
2. C. ANGHEL, C. VÎRSAN, *O teoremă relativă la comportarea asimptotică a soluțiilor ecuațiilor diferențiale liniare.* Gazeta matematică și fizică, seria A, *11* (1959).
3. R. BELLMAN, *On a generalisation of a result of Wintner.* Quart. Appl. Math., **16**, *4* (1959).

# STRUCTURA GRUPULUI SIMPLU EXCEPȚIONAL $G_2$

DE

RADU IORDĂNESCU

Élie Cartan ([2], p. 564 și [3], p. 298) indică o legătură a grupului excepțional $G_2$ cu octavele lui Graves și Cayley. J. Tits ([5], p. 86) folosind această indicație, definește grupul $G_2$ ca grupul automorfismelor spațiului octavelor. În teza sa ([1], p. 269 și p. 276) Cartan, ocupîndu-se de grupurile excepționale, dă rădăcinile lui $G_2$. Folosind definiția lui Tits pentru $G_2$ și altă bază decît cea utilizată de Cartan, vom da structura grupului $G_2$, făcînd descrierea algebrei sale Lie.

Prof. G. Vrănceanu [6], dă grupul de mișcare al sistemului Pfaff de trei ecuații în 5 variabile :

$$\begin{aligned} dx^2 - x^3 dx^1 &= 0, \\ dx^3 - x^4 dx^1 &= 0, \\ dx^5 - (x^4)^2 dx^1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

care este un grup simplu, cu 14 parametri, primul din seria celor 5 grupuri excepționale. Acest rezultat a fost enunțat de E. Cartan, fără demonstrație, în [4].

Pornind de la transformările date de prof. G. Vrănceanu, vom arăta că structurile grupului $G_2$ și ale grupului de mișcare al sistemului (1) coincid, algebrele lor Lie fiind izomorfe, dacă le considerăm ca algebre peste corpul numerelor complexe.

Algebra Lie a grupului $G_2$ fiind izomorfă, după rezultatul lui Tits, cu algebra Lie a grupului automorfismelor spațiului octavelor, vom face descrierea acesteia din urmă.

Considerînd spațiul octavelor reale (complexe), obținem forma compactă (complexă) a lui $G_2$. Ne vom ocupa de spațiul octavelor reale.

Octavele fiind definite ca numere hipercomplexe

$$a_0 + \sum a_i e_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 7),$$

cu 8 unități, 1, $e_i$, cu legea de înmulțire dată de relațiile:

$$1.\ e_i = e_i \cdot 1 = e_i,\ e_i^2 = -1,\ e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i,\ e_1 = e_2 \cdot e_6 = e_3 \cdot e_4 = e_5 \cdot e_7$$

și celelalte care se deduc din ultimele, prin permutări circulare, algebra Lie a grupului de automorfisme ale acestui spațiu este algebra matricelor $\alpha$ de ordin 7, care verifică relația:

$$\alpha(e_i \cdot e_j) = \alpha(e_i) \cdot e_j + e_i \cdot \alpha(e_j). \tag{2}$$

În adevăr, grupul automorfismelor va fi un grup de matrice de ordin 7, deoarece un automorfism este perfect determinat de efectul său asupra bazei spațiului, deci de o matrice de ordin 7. Considerăm matrice de ordin 7 și nu 8, deoarece știm că grupul automorfismelor spațiului octavelor pure (deci cu baza $\{e_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$) este izomorf cu grupul automorfismelor spațiului octavelor. Luînd un drum $A_t = \| A_j^i(t) \|$, $(i, j = 1, \ldots, 7)$, avem $A_t(e_i \cdot e_j) = A_t(e_i) A_t(e_j)$, deci

$$\frac{d}{dt} A_t(e_i \cdot e_j) = \frac{dA_t}{dt}(e_i) \cdot A_t(e_j) + A_t(e_i) \cdot \frac{dA_t}{dt}(e_j) \text{ și}$$

$$\left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} (e_i \cdot e_j) = \left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} (e_i) \cdot e_j + e_i \cdot \left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} (e_j),$$

sau, notînd

$$\left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} = \| \alpha_j^i \| = \alpha, \text{ obținem relațiile (2).}$$

Să căutăm o bază în această algebră. Algebra $G_2$ fiind o algebră cu 14 parametri, va trebui să căutăm o bază formată din 14 matrice.

Fie $\alpha$ o matrice oarecare din $G_2$ și fie:

$$\alpha(e_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_7),$$

$$\alpha(e_2) = (b_1, b_2, \ldots, b_7),$$

$$\alpha(e_3) = (c_1, c_2, \ldots, c_7),$$

efectul matricei $\alpha$ asupra primelor trei elemente din baza spațiului octavelor.

Folosind relațiile (date de legea de înmulțire din spațiul octavelor)

$$e_7 = e_2 \cdot e_3,\ e_6 = e_1 \cdot e_2,\ e_5 = e_6 \cdot e_3,\ e_4 = e_1 \cdot e_3,$$

se calculează $\alpha(e_k)$, $(k = 7, 6, 5, 4)$, în funcție de cei 21 parametri $a_i, b_i, c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Se obține:

$$\alpha(e_7) = (-b_4 + c_6, -b_7, c_7, b_1 - c_5, b_6 + c_4, -b_5 - c_1, b_2 + c_3),$$

$$\alpha(e_6) = (-a_6, -b_6, a_7 - b_4, a_5 + b_3, -a_4 - b_7, a_1 + b_2, -a_3 + b_5),$$

$$\alpha(e_5) = (-a_5 - b_3 - c_2, a_3 - b_5 + c_1, -c_5, -a_6 + c_7, a_1 + b_2 + c_3, a_4 + b_7, -b_6 - c_4),$$

$$\alpha(e_4) = (-a_4, -a_7 - c_6, -c_4, a_1 + c_3, a_6 - c_7, -a_5 + c_2, a_2 + c_5).$$

Pentru a rămîne 14 parametri trebuie găsite 7 relații între $a_i$, $b_i$, $c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Scriind, folosind tot relațiile care dau legea de înmulțire în spațiul octavelor, că

$$e_1 = e_3 \cdot e_4,\ e_3 = e_4 \cdot e_1,\ e_5 = e_2 \cdot e_4,\ e_1 = e_2 \cdot e_6,\ e_7 = e_1 \cdot e_5,$$

găsim :

$$c_1 = -a_3,\ a_1 = b_2 = c_3 = 0,\ b_1 = -a_2,\ c_2 = -b_4,\ a_7 = b_4 - c_6.$$

Utilizînd aceste relații, avem :

$$\begin{aligned}
\alpha(e_1) &= (\ 0\ ,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ b_4-c_6),\\
\alpha(e_2) &= (\ -a_2,\ 0\ ,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7\ ),\\
\alpha(e_3) &= (\ -a_3,\ -b_3,\ 0\ ,\ c_4,\ c_5,\ c_6,\ c_7\ ),\\
\alpha(e_4) &= (\ -a_4,\ -b_4,\ -c_4,\ 0\ ,\ a_6-c_7,\ -a_5-b_3,\ a_2+c_5),\\
\alpha(e_5) &= (\ -a_5,\ -b_5,\ -c_5,\ -a_6+c_7,\ 0\ ,\ a_4+b_7,\ -b_6-c_4),\\
\alpha(e_6) &= (\ -a_6,\ -b_6,\ -c_6,\ a_5+b_3,\ -a_4-b_7,\ 0\ ,\ -a_3+b_5),\\
\alpha(e_7) &= (-b_4+c_6,\ -b_7,\ -c_7,\ -a_2-c_5,\ b_6+c_4,\ -b_5+a_3,\ 0\ ).
\end{aligned} \tag{3}$$

Apare o matrice strîmb simetrică de ordin 7. O matrice oarecare $\alpha$ din $G_2$ este perfect determinată de octavele ce reprezintă efectul ei asupra bazei $\{e_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Deci algebra $G_2$ este izomorfă cu algebra matricelor strîmb simetrice de ordin 7, cu 14 parametri, care se scriu sub forma (3).

Pentru a pune în evidență o bază, anulăm pe rînd toți parametrii, în afară de unul, pe care îl luăm egal cu 1. Obținem baza :

$$A_1(a_2^1,\ a_7^4),\ A_2(a_3^1,\ a_6^7),\ A_3(a_4^1,\ a_6^5),\ A_4(a_5^1,\ a_4^6),\ A_5(a_6^1,\ a_5^4),\ A_6(a_3^2,\ a_4^6),$$
$$A_7(a_7^1,\ a_4^2),\ A_8(a_5^2,\ a_7^6),\ A_9(a_6^2,\ a_5^7),\ A_{10}(a_7^2,\ a_6^5),\ A_{11}(a_4^3,\ a_5^7),\ A_{12}(a_5^3,\ a_7^4),$$
$$A_{13}(a_6^3,\ a_1^7,)\ A_{14}(a_7^3,\ a_4^5),$$

unde $A_m(a_j^i,\ a_l^k)$ înseamnă matricea cu $a_j^i = a_l^k = -a_i^j = -a_k^l = 1$, restul elementelor fiind zero.

Folosind operatorii diferențiali $\left(\text{lui } A_m = \| a_j^i \| \text{ i se asociază operatorul } X_m = a_j^i\, x^j \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ și notînd

$$\varepsilon_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

baza găsită se scrie : $X_m = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kl}$, $(m = 1, 2, \ldots, 14)$. Făcînd parantezele lui Poisson $(X_m, X_n)$ pentru $m, n = 1, 2, \ldots, 14$ și $n < m$ și ținînd seama că

$$(\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{jk}) = \varepsilon_{ki} = -\varepsilon_{ik},\ (\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij}) = (\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{kl}) = 0,$$

rezultă structura algebrei, care este următoarea :

$$[X_1, X_2] = -X_6, \quad [X_1, X_3] = -X_7, \quad [X_1, X_4] = -X_8, \quad [X_1, X_5] = -X_9,$$
$$[X_1, X_6] = X_2, \quad [X_1, X_7] = 2(X_3 - X_{10}), \quad [X_1, X_8] = X_4, \quad [X_1, X_9] = X_5,$$
$$[X_1, X_{10}] = X_7, \quad [X_1, X_{11}] = -X_{14}, \quad [X_1, X_{12}] = 0, \quad [X_1, X_{13}] = X_{10} - X_3,$$
$$[X_1, X_{14}] = X_{11}, \quad [X_2, X_3] = -X_{11}, \quad [X_2, X_4] = -X_{12}, \quad [X_2, X_5] = -X_{13},$$
$$[X_2, X_6] = -X_1, \quad [X_2, X_7] = -X_5 - X_{14}, \quad [X_2, X_8] = 0, \quad [X_2, X_9] = X_{10},$$
$$[X_2, X_{10}] = -X_9, \quad [X_2, X_{11}] = X_3, \quad [X_2, X_{12}] = X_4, \quad [X_2, X_{13}] = 2(X_5 + X_{14}),$$
$$[X_2, X_{14}] = -X_{13}, \quad [X_3, X_4] = -2X_5, \quad [X_3, X_5] = 2X_4, \quad [X_3, X_6] = -X_5,$$
$$[X_3, X_7] = -X_1, \quad [X_3, X_8] = -X_9, \quad [X_3, X_9] = X_8, \quad [X_3, X_{10}] = 0,$$
$$[X_3, X_{11}] = -X_2, \quad [X_3, X_{12}] = -X_{13}, \quad [X_3, X_{13}] = X_{12}, \quad [X_3, X_{14}] = -X_4,$$
$$[X_4, X_5] = -2X_3, \quad [X_4, X_6] = 0, \quad [X_4, X_7] = X_9, \quad [X_4, X_8] = -X_1,$$
$$[X_4, X_9] = -X_7, \quad [X_4, X_{10}] = X_5, \quad [X_4, X_{11}] = X_{13}, \quad [X_4, X_{12}] = -X_2,$$
$$[X_4, X_{13}] = -X_{11}, \quad [X_4, X_{14}] = X_3, \quad [X_5, X_6] = X_3, \quad [X_5, X_7] = -X_8,$$
$$[X_5, X_8] = X_7, \quad [X_5, X_9] = -X_1, \quad [X_5, X_{10}] = -X_4, \quad [X_5, X_{11}] = -X_{12},$$
$$[X_5, X_{12}] = X_{11}, \quad [X_5, X_{13}] = -X_2, \quad [X_5, X_{14}] = 0, \quad [X_6, X_7] = X_9 - X_{11},$$
$$[X_6, X_8] = -X_{12}, \quad [X_6, X_9] = -X_7 - X_{13}, \quad [X_6, X_{10}] = -X_{14}, \quad [X_6, X_{11}] = X_7 + X_{13},$$
$$[X_6, X_{12}] = X_8, \quad [X_6, X_{13}] = X_9 - X_{11}, \quad [X_6, X_{14}] = X_{10}, \quad [X_7, X_8] = -X_5,$$
$$[X_7, X_9] = X_4, \quad [X_7, X_{10}] = -X_1, \quad [X_7, X_{11}] = X_4 - X_6, \quad [X_7, X_{12}] = X_{10} - X_3,$$
$$[X_7, X_{13}] = 0, \quad [X_7, X_{14}] = -X_2 - X_8, \quad [X_8, X_9] = -2X_{10}, \quad [X_8, X_{10}] = -2X_9,$$
$$[X_8, X_{11}] = -X_{10}, \quad [X_8, X_{12}] = -X_6, \quad [X_8, X_{13}] = -X_5 - X_{14}, \quad [X_8, X_{14}] = X_7 + X_{13},$$
$$[X_9, X_{10}] = -2X_8, \quad [X_9, X_{11}] = 0, \quad [X_9, X_{12}] = X_{14}, \quad [X_9, X_{13}] = X_4 - X_6,$$
$$[X_9, X_{14}] = -X_{12}, \quad [X_{10}, X_{11}] = X_8, \quad [X_{10}, X_{12}] = -X_7 - X_{13}, \quad [X_{10}, X_{13}] = X_{12} - X_1,$$
$$[X_{10}, X_{14}] = -X_6, \quad [X_{11}, X_{12}] = 2X_{14}, \quad [X_{11}, X_{13}] = X_4, \quad [X_{11}, X_{14}] = -2X_{12},$$
$$[X_{12}, X_{13}] = -X_3, \quad [X_{12}, X_{14}] = 2X_{11}, \quad [X_{13}, X_{14}] = X_2.$$

Știind că rangul algebrei $G_2$ este 2, pentru a pune în evidență o subalgebră Cartan, căutăm două elemente permutabile. Fie acestea $X_1$ și $X_{12}$. Așadar, o subalgebră Cartan este subalgebra $C$ cu baza $A_1$, $A_{12}$. Scriind tot cu operatori, vom lua:

$$C = \{h \mid h = -i\,(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_{12}),\ i = \sqrt{-1}\},$$

pentru ca să dăm o formă convenabilă rădăcinilor.

Să determinăm, în raport cu subalgebra Cartan aleasă, vectorii proprii și rădăcinile algebrei. Atît vectorii cît și rădăcinile vor fi în număr de 12 (dimensiunea minus rangul).

Se observă că subspațiile invariante ale lui $X_1$ sînt:

$$\{X_{11}, X_{14}\},\ \{X_7, X_{10}-X_3\},\ \{X_2, X_6\},\ \{X_4, X_8\},\ \{X_5, X_9\},$$

iar cele ale lui $X_{12}$ sînt:

$$\{X_{11}, X_{14}\},\ \{X_7, X_{10}-X_3\},\ \{X_2, X_4\},\ \{X_6, X_8\},\ \{X_3+X_{10},\ X_7+2X_{13}\}.$$

Deci $X_{11} \pm iX_{14}$, $X_7 \pm i\,(X_{10}-X_3)$, $X_2 \pm iX_6$, $X_4 \pm iX_8$ și $X_5 \pm iX_9$ sînt vectori proprii pentru $X_1$. Analog, $X_{11} \pm iX_{14}$, $X_7 \pm i(X_{10}-X_3)$, $X_2 \pm iX_4$, $X_6 \pm iX_8$ și $X_3+X_{10} \pm i\,(X_7+2X_{13})$ sînt vectori proprii pentru $X_{12}$. Primii 4 vectori fiind vectori proprii comuni pentru $X_1$ și $X_{12}$, vor fi vectori proprii ai algebrei.

Se vede că alți 4 vectori proprii ai algebrei sînt: $X_2 + iX_6 \pm i\,(X_4 + iX_8)$, $X_2 - iX_6 \pm i\,(X_4 - iX_8)$.

Deoarece $X_3 + X_{10} \pm i\,(X_7 + 2X_{13})$ sînt vectori proprii pentru $X_{12}$, iar $[X_1, X_3 + X_{10}] = 0$ și $[X_1, X_7 + 2X_{13}] = 0$, acești vectori vor fi vectori proprii ai algebrei.

Observînd că $[X_{12}, X_5] = -X_{11}$ și $[X_{12}, X_9] = -X_{14}$, iar $X_5 \pm iX_9$ și $X_{11} \pm iX_{14}$ sînt vectori proprii pentru $X_1$, vom căuta vectori proprii pentru algebră de forma: $X_5 \pm iX_9 + \alpha X_{11} + \beta X_{14}$. Punînd condiția ca $X_{12}$ să comute cu $X_5 + iX_9 + \alpha X_{11} + \beta X_{14}$, avem: $[X_{12}, X_5 + iX_9 + \alpha X_{11} + \beta X_{14}] = -X_{11} - iX_{14} - 2\alpha X_{14} + 2\beta X_{11} = 0$, de unde rezultă $\alpha = -\frac{i}{2}$ și $\beta = \frac{1}{2}$.

Deci, un alt vector propriu al algebrei este

$$X_5 + \frac{1}{2} X_{14} + i\left(X_9 - \frac{1}{2} X_{11}\right).$$

Analog, punînd condiția

$$[X_{12}, X_5 - iX_9 + \alpha X_{11} + \beta X_{14}] = -X_{11} + iX_{14} - 2\alpha X_{14} + 2\beta X_{11} = 0,$$

rezultă $\alpha = \frac{i}{2}$ și $\beta = \frac{1}{2}$.

Deci, $X_5 + \frac{1}{2} X_{14} - i\left(X_9 - \frac{1}{2} X_{11}\right)$ este vector propriu al algebrei.

Aşadar, vectorii proprii ai algebrei $G_2$ sînt:

$$\rho_{1.2} = X_{11} \pm iX_{14}, \qquad \rho_{7.8} = X_2 + X_8 \pm i(X_6 - X_4),$$

$$\rho_{3.4} = X_7 \pm i(X_{10} - X_3), \qquad \rho_{9.10} = X_3 + X_{10} \pm i(X_7 + 2X_{13}),$$

$$\rho_{5.6} = X_2 - X_8 \pm i(X_6 + X_4), \qquad \rho_{11.12} = X_5 + \frac{1}{2}X_{14} \pm i\left(X_9 - \frac{1}{2}X_{11}\right).$$

Să găsim rădăcinile algebrei.

Definind în $C$ produsul scalar astfel:

$$(h, h') = -Sp\,(p_h\, p_{h'}), \tag{4}$$

oricare ar fi $h$ şi $h'$ din $C$, unde $p_h$ este elementul din algebra adjunctă a lui $C$, care corespunde lui $h$, vom ţine seama de relaţia lui Weyl $[h, \rho_i] = (h, \alpha_i)\,\rho_i$ valabilă pentru orice $h$ din $C$ şi $\rho_i$ vector propriu, ce corespunde rădăcinii $\alpha_i$.

Astfel, avem:

$$\begin{aligned}
&[h, \rho_1] = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\,\rho_1, && [h, \rho_7] = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\rho_7,\\
&[h, \rho_2] = -(\lambda_1 + 2\lambda_2)\,\rho_2, && [h, \rho_8] = -(\lambda_1 - \lambda_2)\,\rho_8,\\
&[h, \rho_3] = (2\lambda_1 + \lambda_2)\,\rho_3, && [h, \rho_9] = -\lambda_2\,\rho_9,\\
&[h, \rho_4] = -(2\lambda_1 + \lambda_2)\,\rho_4, && [h, \rho_{10}] = \lambda_2\,\rho_{10},\\
&[h, \rho_5] = (\lambda_1 + \lambda_2)\,\rho_5, && [h, \rho_{11}] = \lambda_1\,\rho_{11},\\
&[h, \rho_6] = -(\lambda_1 + \lambda_2)\,\rho_6, && [h, \rho_{12}] = -\lambda_1\,\rho_{12}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Coeficienţii lui $\rho_i$ din membrii drepţi ai egalităţilor de mai sus, fiind produsele scalare $(h, \alpha_i)$, ne determină rădăcinile $\alpha_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 12)$.

Se vede că rădăcinile simple sînt $\alpha_7$ şi $\alpha_{10}$.

Folosind definiţia (4) a produsului scalar în $C$, putem calcula unghiul şi raportul lungimilor rădăcinilor simple.

Pentru orice $h$ din $C$, avem:

$$l^2(h) = (h, h) = \sum_{i=1}^{12} (h, \alpha_i)^2 = 16\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2).$$

Fiind vorba de raportul lungimilor rădăcinilor şi de unghiul rădăcinilor, vom lăsa la o parte factorul 16. Pentru a găsi pe $\alpha_7$ şi $\alpha_{10}$, punem

$$\alpha_7 = a_1X_1 + a_2X_{12} \text{ şi } \alpha_{10} = b_1X_1 + b_2X_{12}.$$

Avem:

$$(h, \alpha_7) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \frac{1}{2}(a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_2$$

şi

$$(h, \alpha_{10}) = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \frac{1}{2}(b_1\lambda_2 + b_2\lambda_1) = \lambda_2,$$

care ne dau $a_1 = 2$, $a_2 = -2$; $b_1 = -\frac{2}{3}$, $b_2 = \frac{4}{3}$.

Rezultă $\alpha_7 = 2(X_1 - X_{12})$ și $\alpha_{10} = \frac{2}{3}(-X_1 + 2X_{12})$.

Avem deci $\frac{l(\alpha_7)}{l(\alpha_{10})} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2}} = \sqrt{3}$,

$$\cos(\widehat{\alpha_7, \alpha_{10}}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

deci $(\widehat{\alpha_7, \alpha_{10}}) = 150°$.

Găsim așadar, figura lui Schläfli pentru algebra $G_2$:

$$\alpha_7 \gtrless \alpha_{10}$$

(definiția figurii lui Schläfli se găsește în lucrarea [5] a lui Tits, p. 24—25).

Să arătăm acum că grupul $G_2$ și grupul de mișcare al sistemului (1) au aceeași structură, punînd în evidență izomorfismul algebrelor Lie.

Prof. G. Vrănceanu [6] dă următoarea formă grupului de mișcare al sistemului (1) [1]:

$$x'^i = x^i + \xi^i, \tag{6}$$

unde $\xi^i$ sînt date de formulele:

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= -B_3 - 2x^4 A,\\
\xi^2 &= -x^3(B_3 + 2x^4 A) + Ax^5 + B.\\
\xi^3 &= -x^4(B_3 + x^4 A) + x^5 DA + DB,\\
\xi^4 &= 2(x^4)^2 DA + x^5 D^2 A + D^2 B,\\
\xi^5 &= -\frac{2}{3}(x^4)^3 A + \varphi,
\end{aligned} \tag{7}$$

iar $A$, $B$ și $\varphi$ sînt dați de formulele:

$$A = ax^2 + \alpha(x^1)^3 + \beta(x^1)^2 + \gamma x^1 + \delta,$$

$$\begin{aligned}
B = &-\frac{4}{3}[3\alpha(x^1)^2 + 2\beta x^1 + \gamma](x^3)^2 - \frac{4}{9}a(x^3)^3 - 12\alpha(x^2)^2 +\\
&+ x^2 x^3(12\alpha x^1 + 4\beta) + (-3n_1 x^1 + \rho)x^2 + (n_1(x^1)^2 + n_2 x^1 +\\
&+ n_3)x^3 + q_1(x^1)^3 + q_2(x^1)^2 + q_3 x_1 + q_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi = &\ 12x^3(\alpha x^5 + q_1)x_1 - 12(\alpha x^5 + q_1)x_2 - \frac{16}{3}\alpha(x^3)^3 + a(x^5)^2 -\\
&- 4n_1(x^3)^2 + 4\beta x^3 x^5 + 4q_2 x^3 + (3n_2 + 2\rho)x^5 + c.
\end{aligned}$$

[1] În lucrarea [6] formulele (19) și (20) de la p. 256 au unele greșeli de tipar.

În formulele (7), $D$ operează astfel :

$$DA = A_1 + A_2x^3 + A_3x^4 + A_5(x^4)^2,$$

unde am notat $A_i = \frac{\partial A}{\partial x^i}$ și $B_i = \frac{\partial B}{\partial x^i}$.

Se vede că grupul depinde de 14 parametri și anume :

$$a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \rho,\ n_1, n_2, n_3, q_1, q_2, q_3, q_4,\ c. \tag{8}$$

Să găsim algebra Lie a grupului de transformări (6).

Vom considera un drum în acest grup, deci grupul transformărilor (6) în care parametrii (8) sînt funcții de variabila $t$, iar $t$ parcurge intervalul $[0, 1]$, funcțiile anulîndu-se pentru $t = 0$. Stabilim un omeomorfism între o vecinătate a unității din grup și o vecinătate a originii din spațiul euclidian cu 14 dimensiuni $E_{14}$, astfel : unei transformări date îi corespunde punctul care are drept coordonate valorile parametrilor acestei transformări, luate în ordinea (8), și invers, unui punct îi asociem transformarea care are parametrii egali cu coordonatele punctului, respectînd de asemenea ordinea (8).

În felul acesta se vede că algebra Lie a grupului (6) este spațiul vectorial real cu 14 dimensiuni. Dar, pentru ușurarea calculelor, vom utiliza și de data aceasta operatorii diferențiali. Vom asocia unui punct din $E_{14}$, deci unei transformări (6), operatorul

$$Y = \sum_{i=1}^{5} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

O bază a algebrei se obține anulînd pe rînd toți parametrii, în afară de unul pe care îl luăm egal cu 1. Vom da valoarea 1 parametrilor, utilizînd ordinea (8) și vom arăta aceasta printr-un indice pus în stînga lui $\xi$.

Astfel, o bază a algebrei Lie este : $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{14}\}$, în care :

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{5} {}^1\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde :

$${}^1\xi^1 = \frac{4}{3}(x^3)^2 - 2x^2x^4,$$

$${}^1\xi^2 = x^2x^5 + \frac{8}{9}(x^3)^3 - 2x^2x^3x^4,$$

$${}^1\xi^3 = x^3x^5 - x^2(x^4)^2,$$

$${}^1\xi^4 = x^4x^5 - \frac{2}{3}x^3(x^4)^2,$$

$${}^1\xi^5 = -\frac{2}{3}x^2(x^4)^3 + (x^5)^2;$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{5} {}^2\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^2\xi^1 = 8\,(x^1)^2x^3 - 12x^1\,x^2 - 2\,(x^1)^3x^4,$

$^2\xi^2 = 4\,(x^1)^2\,(x^3)^2 - 2\,(x^1)^3x^3x^4 + (x^1)^3x^5 - 12\,(x^2)^2,$

$^2\xi^3 = 3\,(x^1)^2x^5 + 4x^1\,(x^3)^2 - 12x^2x^3 - (x^1)^3\,(x^4)^2,$

$^2\xi^4 = 6x^1x^5 - 8\,(x^3)^2 + 4x^1x^3x^4 - 2\,(x^1)^2\,(x^4)^2,$

$$^2\xi^5 = -\frac{2}{3}\,(x^1)^3\,(x^4)^3 + 12\,x^1\,x^3\,x^5 - 12x^2\,x^5 - \frac{16}{3}(x^3)^3;$$

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{5} {}^3\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $$^3\xi^1 = \frac{16}{3}\,x^1\,x^3 - 4x^2 - 2\,(x^1)^2\,x^4,$$

$$^3\xi^2 = \frac{8}{3}\,x^1\,(x^3)^2 - 2\,(x^1)^2x^3x^4 + (x^1)^2x^5,$$

$$^3\xi^3 = 2x^1\,x^5 - (x^1)^2\,(x^4)^2 + \frac{4}{3}\,(x^3)^2,$$

$$^3\xi^4 = 2x^5 + \frac{4}{3}\,x^3\,x^4 - \frac{4}{3}\,x^1\,(x^4)^2,$$

$$^3\xi^5 = -\frac{2}{3}\,(x^1)^2\,(x^4)^3 + 4\,x^3\,x^5;$$

$$Y_4 = \sum_{i=1}^{5} {}^4\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $$^4\xi^1 = \frac{8}{3}\,x^3 - 2x^1\,x^4,$$

$$^4\xi^2 = \frac{4}{3}\,(x^3)^2 - 2x^1\,x^3x^4 + x^1\,x^5,$$

$$^4\xi^3 = -\,x^1\,(x^4)^2 + x^5,$$

$$^4\xi^4 = -\frac{2}{3}\,(x^4)^2,$$

$$^4\xi^5 = -\frac{2}{3}\,x^1\,(x^4)^3;$$

$$Y_5 = \sum_{i=1}^{5} {}^5\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde :

$$^5\xi^1 = -2x^4,$$

$$^5\xi^2 = -2\,x^3x^4 + x^5,$$

$$^5\xi^3 = -(x^4)^2,$$

$$^5\xi^4 = 0,$$

$$^5\xi^5 = -\frac{2}{3}(x^4)^3;$$

$$Y_6 = \sum_{i=1}^{5} {}^6\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^6\xi^1 = 0,\ ^6\xi^2 = x^2,\ ^6\xi^3 = x^3,\ ^6\xi^4 = x^4,\ ^6\xi^5 = 2x^5;$

$$Y_7 = \sum_{i=1}^{5} {}^7\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^7\xi^1 = -(x^1)^2,\ ^7\xi^2 = -3x^1x^2,\ ^7\xi^3 = -x^1x^3 - 3x^2,$
$^7\xi^4 = x^1x^4 - 4x^3,\ ^7\xi^5 = -4(x^3)^2;$

$$Y_8 = \sum_{i=1}^{5} {}^8\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^8\xi^1 = -x^1,\ ^8\xi^2 = 0,\ ^8\xi^3 = x^3,\ ^8\xi^4 = 2x^4,\ ^8\xi^5 = 3x^5;$

$$Y_9 = \sum_{i=1}^{5} {}^9\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^9\xi^1 = -1,\ ^9\xi^2 = {}^9\xi^3 = {}^9\xi^4 = {}^9\xi^5 = 0,$

$$\text{deci } Y_9 = -\frac{\partial}{\partial x^1};$$

$$Y_{10} = \sum_{i=1}^{5} {}^{10}\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^{10}\xi^1 = 0,\ ^{10}\xi^2 = (x^1)^3,\ ^{10}\xi^3 = 3(x^1)^2,\ ^{10}\xi^4 = 6x^1,$
$^{10}\xi^5 = 12x^1x^3 - 12x^2;$

$$Y_{11} = \sum_{i=1}^{5} {}^{11}\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^{11}\xi^1 = 0,\ ^{11}\xi^2 = (x^1)^2,\ ^{11}\xi^3 = 2x^1,\ ^{11}\xi^4 = 2,$
$^{11}\xi^5 = 4x^3;$

$$Y_{12} = \sum_{i=1}^{5} {}^{12}\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $^{12}\xi^1 = {}^{12}\xi^4 = {}^{12}\xi^5 = 0,\ ^{12}\xi^2 = x^1,\ ^{12}\xi^3 = 1;$

$$Y_{13} = \sum_{i=1}^{5} {}^{13}\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

unde : $${}^{13}\xi^1 = {}^{13}\xi^3 = {}^{13}\xi^4 = {}^{13}\xi^5 = 0,\ {}^{13}\xi^2 = 1\ ;$$

$$Y_{14} = \sum_{i=1}^{5} {}^{14}\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\ .$$

unde : $${}^{14}\xi^1 = {}^{14}\xi^2 = {}^{14}\xi^3 = {}^{14}\xi^4 = 0,\ {}^{14}\xi^5 = 1.$$

Făcînd parantezele Poisson $(Y_m, Y_n)$ pentru $m, n = 1, 2, \ldots, 14$ și $n < m$ obținem structura algebrei :

$$
\begin{aligned}
&[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_4] = 0, \quad [Y_1, Y_5] = 0, \quad [Y_1, Y_6] = 2Y_1, \quad [Y_1, Y_7] = 0, \quad [Y_1, Y_8] = 3Y_1, \quad [Y_1, Y_9] = 0, \\
&[Y_1, Y_{10}] = Y_2, \quad [Y_1, Y_{11}] = Y_3, \quad [Y_1, Y_{12}] = Y_4, \quad [Y_1, Y_{13}] = Y_5, \quad [Y_1, Y_{14}] = Y_6, \\
&[Y_2, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_4] = 0, \quad [Y_2, Y_5] = -12Y_1, \quad [Y_2, Y_6] = Y_2, \quad [Y_2, Y_7] = 0, \quad [Y_2, Y_8] = 0, \quad [Y_2, Y_9] = -3Y_3, \quad [Y_2, Y_{10}] = 0, \quad [Y_2, Y_{11}] = 0, \\
&[Y_2, Y_{12}] = 4Y_7, \quad [Y_2, Y_{13}] = -12(2Y_6 - Y_8), \quad [Y_2, Y_{14}] = Y_{10}, \\
&[Y_3, Y_4] = 4Y_1, \quad [Y_3, Y_5] = 0, \quad [Y_3, Y_6] = Y_3, \quad [Y_3, Y_7] = Y_2, \quad [Y_3, Y_8] = Y_3, \quad [Y_3, Y_9] = -2Y_4, \quad [Y_3, Y_{10}] = 0, \quad [Y_3, Y_{11}] = -\frac{8}{3}Y_7, \\
&[Y_3, Y_{12}] = 4Y_6 - \frac{4}{3}Y_8, \quad [Y_3, Y_{13}] = 4Y_9, \quad [Y_3, Y_{14}] = Y_{11}, \\
&[Y_4, Y_5] = 0, \quad [Y_4, Y_6] = Y_4, \quad [Y_4, Y_7] = 2Y_3, \quad [Y_4, Y_8] = 2Y_4, \quad [Y_4, Y_9] = -Y_5, \quad [Y_4, Y_{10}] = 4Y_7, \quad [Y_4, Y_{11}] = -\frac{4}{3}Y_8, \quad [Y_4, Y_{12}] = -\frac{8}{3}Y_9, \\
&[Y_4, Y_{13}] = 0, \quad [Y_4, Y_{14}] = Y_{12}, \\
&[Y_5, Y_6] = Y_5, \quad [Y_5, Y_7] = 3Y_4, \quad [Y_5, Y_8] = 3Y_5, \quad [Y_5, Y_9] = 0, \quad [Y_5, Y_{10}] = 12(Y_8 - Y_6), \quad [Y_5, Y_{11}] = 4Y_9, \quad [Y_5, Y_{12}] = 0, \quad [Y_5, Y_{13}] = 0, \quad [Y_5, Y_{14}] = Y_{13}, \\
&[Y_6, Y_7] = 0, \quad [Y_6, Y_8] = 0, \quad [Y_6, Y_9] = 0, \quad [Y_6, Y_{10}] = Y_{10}, \quad [Y_6, Y_{11}] = Y_{11}, \quad [Y_6, Y_{12}] = Y_{12}, \quad [Y_6, Y_{13}] = Y_{13}, \quad [Y_6, Y_{14}] = 2Y_{14}, \\
&[Y_7, Y_8] = -Y_7, \quad [Y_7, Y_9] = 3Y_6 - 2Y_8, \quad [Y_7, Y_{10}] = 0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$[Y_7, Y_{11}] = -Y_{10}$, $[Y_8, Y_{13}] = 0$, $[Y_{10}, Y_{12}] = 0$,
$[Y_7, Y_{12}] = -2Y_{11}$, $[Y_8, Y_{14}] = 3Y_{14}$, $[Y_{10}, Y_{13}] = -12Y_{14}$,
$[Y_7, Y_{13}] = -3Y_{12}$, $[Y_9, Y_{10}] = 3Y_{11}$, $[Y_{10}, Y_{14}] = 0$,
$[Y_7, Y_{14}] = 0$, $[Y_9, Y_{11}] = 2Y_{12}$, $[Y_{11}, Y_{12}] = 4Y_{14}$,
$[Y_8, Y_9] = -Y_9$, $[Y_9, Y_{12}] = Y_{13}$, $[Y_{11}, Y_{13}] = 0$,
$[Y_8, Y_{10}] = 3Y_{10}$, $[Y_9, Y_{13}] = 0$, $[Y_{11}, Y_{14}] = 0$,
$[Y_8, Y_{11}] = 2Y_{11}$, $[Y_9, Y_{14}] = 0$, $[Y_{12}, Y_{13}] = 0$,
$[Y_8, Y_{12}] = Y_{12}$, $[Y_{10}, Y_{11}] = 0$, $[Y_{12}, Y_{14}] = 0$,
$[Y_{13}, Y_{14}] = 0$.

Să alegem două elemente permutabile, de exemplu $Y_6$ și $Y_8$. Operatorii $Y_6$ și $Y_8 - Y_6$ sînt de asemenea permutabili. Pentru a găsi aceleași rădăcini cu cele ale algebrei $G_2$ vom lua ca subalgebră Cartan

$$\mathcal{C} = \{k \mid k = \mu_1 Y_6 + \mu_2 (Y_8 - Y_6)\}.$$

Să determinăm în raport cu $\mathcal{C}$ vectorii proprii și rădăcinile algebrei.

Se observă că $Y_1$, $Y_3$, $Y_4$, $Y_5$, $Y_{10}$, $Y_{11}$, $Y_{12}$, $Y_{14}$ sînt vectori proprii atît pentru $Y_6$ cît și pentru $Y_8$. Ei vor fi vectori proprii și pentru $Y_8 - Y_6$, deci vor fi vectori proprii ai algebrei.

Se vede că $Y_2$ și $Y_{13}$ sînt vectori proprii pentru $Y_6$ în timp ce:

$$[Y_8, Y_2] = 0 \text{ și } [Y_8, Y_{13}] = 0,$$

deci $Y_2$ și $Y_{13}$ vor fi vectori proprii comuni pentru $Y_6$ și $Y_8 - Y_6$, deci vor fi vectori proprii pentru algebră.

Analog, $Y_7$ și $Y_9$ sînt vectori proprii pentru $Y_8$, iar

$$[Y_6, Y_7] = 0 \text{ și } [Y_6, Y_9] = 0,$$

deci și $Y_7$ și $Y_9$ sînt vectori proprii ai algebrei.

Am găsit deci vectorii proprii ai algebrei, care sînt:

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_7, Y_9, Y_{10}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}.$$

Pentru calculul rădăcinilor vom folosi tot relația lui Weyl. Avem:

$$\begin{aligned}
&[k, Y_1] = -(2\mu_1 + \mu_2) Y_1, && [k, Y_9] = -\mu_2 Y_9,\\
&[k, Y_2] = -(\mu_1 - \mu_2) Y_2, && [k, Y_{10}] = (\mu_1 + 2\mu_2) Y_{10},\\
&[k, Y_3] = -\mu_1 Y_3, && [k, Y_{11}] = (\mu_1 + \mu_2) Y_{11}, \qquad (10)\\
&[k, Y_4] = -(\mu_1 + \mu_2) Y_4, && [k, Y_{12}] = \mu_1 Y_{12},\\
&[k, Y_5] = -(\mu_1 + 2\mu_2) Y_5, && [k, Y_{13}] = (\mu_1 - \mu_2) Y_{13},\\
&[k, Y_7] = \mu_2 Y_7, && [k, Y_{14}] = (2\mu_1 + \mu_2) Y_{14}.
\end{aligned}$$

Rădăcinile $\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ ale algebrei vor fi determinate de coeficienții lui $Y_j$ din egalitățile precedente, aceștia fiind produsele scalare $(k, \beta_i)$.

Se observă că aceste produse scalare coincid, neținînd seama de ordine, cu produsele scalare $(h, \alpha_i)$, date de relațiile (5), care determină rădăcinile $\alpha_i$ ale algebrei $G_2$. Rezultă deci că forma complexă a algebrei Lie a grupului de mișcare al sistemului (1) este izomorfă cu algebra $G_2$ complexă. Deoarece vectorii proprii ai algebrei Lie a grupului de automorfisme al octavelor reale sînt imaginari, iar vectorii proprii ai algebrei Lie a grupului de mișcare a sistemului (1) sînt reali, rezultă că aceste două algebre nu sînt izomorfe în domeniul real.

Notînd cu $\{X\}$ forma complexă a algebrei Lie a grupului automorfismelor spațiului octavelor și cu $\{Y\}$ forma complexă a algebrei Lie a grupului de mișcare al sistemului (1), să punem în evidență izomorfismul:

$$\theta : \{Y\} \to \{X\}.$$

Evident că este suficient să indicăm felul în care acționează acest izomorfism asupra bazei lui $Y$.

Să punem

$$\theta(Y_6) = X_1 \text{ și } \theta(Y_8) = X_1 + X_{12}.$$

Știm că fiind dați doi vectori proprii $\rho_i$ și $\rho_j$ care corespund rădăcinilor $\alpha_i$, respectiv $\alpha_j$, astfel că $\alpha_i + \alpha_j$ este o altă rădăcină $\alpha_k$, atunci avem relația

$$[\rho_i, \rho_j] = N_{i,j}\, \rho_k,$$

unde $N_{i,j}$ este un coeficient ce depinde de $\alpha_i$ și $\alpha_j$. Astfel avem:

$$\begin{aligned}
&[\rho_1, \rho_4] = 2i\rho_8, && [\rho_2, \rho_8] = 2i\rho_4,\\
&[\rho_1, \rho_6] = -2\rho_{10}, && [\rho_2, \rho_{10}] = 2\rho_6,\\
&[\rho_1, \rho_7] = -2i\rho_3, && [\rho_5, \rho_9] = 8i\rho_{11},\\
&[\rho_1, \rho_9] = 2\rho_5, && [\rho_5, \rho_{10}] = -6\rho_1,\\
&[\rho_2, \rho_3] = -2i\rho_7, && [\rho_6, \rho_9] = -6\rho_2,\\
&[\rho_2, \rho_5] = -2\rho_9, && [\rho_6, \rho_{10}] = -8i\rho_{12}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Prin izomorfismul $\theta$ vectorii proprii din cele două algebre, corespunzători la rădăcini egale, sînt proporționali.

Ținînd seama de ecuațiile (5), (10), (9), (11), rezultă că izomorfismul $\theta$ este dat de formulele:

$$\theta(Y_1) = \frac{i}{6}[X_7 - i(X_{10} - X_3)],$$

$$\theta(Y_2) = -2i[X_2 + X_8 - i(X_6 - X_4)],$$

$$\theta(Y_3) = -4i\left[X_5 + \frac{1}{2}X_{14} - i\left(X_9 - \frac{1}{2}X_{11}\right)\right],$$

$$\theta(Y_4) = \frac{2}{3}[X_2 - X_8 - i(X_4 + X_6)],$$

$$\theta(Y_5) = 6(X_{11} - iX_{14}),$$

$$\theta(Y_6) = X_1,$$

$$\theta(Y_7) = \frac{1}{2}[X_3 + X_{10} - i(X_7 + 2X_{13})],$$

$$\theta(Y_8) = X_1 + X_{12},$$

$$\theta(Y_9) = -\frac{1}{2}[X_3 + X_{10} + i(X_7 + 2X_{13})],$$

$$\theta(Y_{10}) = -6(X_{11} + iX_{14}),$$

$$\theta(Y_{11}) = -\frac{2}{3}[X_2 - X_8 + i(X_4 + X_6)],$$

$$\theta(Y_{12}) = -4i\left[X_5 + \frac{1}{2}X_{14} + i\left(X_9 - \frac{1}{2}X_{11}\right)\right],$$

$$\theta(Y_{13}) = -2i[X_2 + X_8 + i(X_6 - X_4)],$$

$$\theta(Y_{14}) = \frac{i}{6}[X_7 + i(X_{10} - X_3)].$$

**În încheiere țin să mulțumesc lect. C. Teleman pentru îndrumările primite.**

**Primită la redacție la 15 mai 1962**

## СТРУКТУРА ПРОСТОЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ ТРУППЫ $G_2$

РЕЗЮМЕ

Дж. Титс, рассматривая связь простой исключительной группы $G_2$ с октавами, указанную Картэном, определяет группу $G_2$ как группу автоморфизмов пространства октав. В своей диссертации Картан, при описании исключительных групп дает корни $G_2$. В настоящей работе, при помощи определения Титса для $G_2$ и иного, чем использованный Картаном, базиса, дается структура группы $G_2$ и делается описание его алгебры Ли.

С использованием данных проф. Г. Врэнчану формул группы движений системы Пфаффа трех уравнений с пятью переменными

$$dx^2 - x^3 dx^1 = 0,$$

$$dx^3 - x^4 dx^1 = 0,$$

$$dx^5 - (x^4)^2 dx^1 = 0$$

показывается, что структуры группы $G_2$ и этой группы движений совпадают, а их алгебры Ли, рассматриваемые как комплексные алгебры, изоморфны.

# STRUCTURE DU GROUPE SIMPLE EXCEPTIONNEL $G_2$


## RÉSUMÉ

J. Tits, considérant la liaison du groupe exceptionnel $G_2$ avec les octaves, indiquée par Cartan, définit le groupe $G_2$ comme le groupe des automorphismes de l'espace des octaves. Dans sa thèse, Cartan, en décrivant les groupes exceptionnels, nous donne les racines de $G_2$. Dans le présent travail, utilisant la définition de Tits pour $G_2$ et une autre base que celle employée par Cartan, on donne la structure du groupe $G_2$, en décrivant son algèbre de Lie.

Utilisant les formules du groupe des mouvements du système de Pfaff à trois équations dans cinq variables :

$$dx^2 - x^3 dx^1 = 0,$$

$$dx^3 - x^4 dx^1 = 0,$$

$$dx^5 - (x^4)^2 dx^1 = 0,$$

données par le professeur G. Vranceanu, on montre que les structures du groupe $G_2$ et de ce groupe de mouvements coïncident, leurs algèbres de Lie étant isomorphes, en tant qu'algèbres complexes.


## BIBLIOGRAFIE


1. E. CARTAN, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Thèse), în „Œuvres complètes", I, part. I, Paris, 1952, 137–286.
2. — *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples*, în „Œuvres complètes", I, part. I, Paris, 1952, 555–568.
3. — *Les groupes réels simples finis et continus*. Ann. Ec. Norm., **31**, 263–355 (1914).
4. — *Les systèmes de Pfaff à cinq variables...*, în „Œuvres complètes", II, part. II, Paris, 1952, 927.
5. J. TITS, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*. Bruxelles, 1955.
6. G. VRÂNCEANU, *Sur les systèmes de Pfaff à trois équations dans cinq variables*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., **3 (51)**, *2* (1959).

# ASUPRA EXTINDERII METODEI APROXIMATIVE A LUI CIAPLÎGHIN LA MIȘCĂRILE SUBSONICE CU CIRCULAȚIE

DE

SORIN GOGONEA

1. Schema inițială a lui Ciaplîghin [1] privind studiul mișcărilor subsonice printr-o metodă aproximativă nu se poate aplica la mișcările cu circulație în jurul unui obstacol dat, așa cum a fost demonstrat în [2].

Modificarea acestei scheme astfel încît ea să devină aplicabilă și mișcărilor cu circulație, a făcut obiectul a numeroase lucrări printre care citățm cele ale lui C. C. Lin [3], A. Gilbarg [4] J. Leray [5], S. A. Hristianovici și I. M. Iuriev [6], H. Richter și W. Müller [7].

Una din principalele probleme care s-au ridicat cu acest prilej a fost aceea a corespondenței între domeniul în care are loc mișcarea gazului supus legii lui Ciaplîghin și domeniul ocupat de fluidul incompresibil de comparație. O atenție specială este acordată acestei chestiuni în lucrarea citată a lui H. Richter și W. Müller, care nu rezolvă însă importanta problemă a reversibilității transformării ce leagă cele două domenii. Se stabilesc numai condițiile în care exteriorul profilului din planul mișcării incompresibile este univoc reprezentat pe exteriorul profilului din planul mișcării compresibile.

Rezultatele cele mai generale obținute pînă în prezent în această privință se datoresc lui C. Iacob. În lucrarea [8] se stabilesc condiții suficiente pentru ca domeniile de mișcare ale celor două fluide să fie în corespondență biunivocă. Prin faptul că aceste condiții se referă numai la profilul din planul mișcării incompresibile ele sînt destul de largi și susceptibile de a cuprinde diverse clase de profile. O aplicație a acestor rezultate a fost dată în [9].

În acest studiu vom arăta la început cum se pot prezenta rezultatele obținute de Richter și Müller într-un cadru mai general în care metoda lui Ciaplîghin poate apărea sub forma celor trei variante cunoscute și anume : varianta Ciaplîghin-Demtchenko, varianta Karman-Tsien și varianta C. Iacob [10]—[11]. Vom arăta apoi posibilitatea de aplicare a

teoremei de reversibilitate stabilită în [8] renunțînd la o parte din condițiile impuse.

2. Să considerăm sistemul lui Ciaplîghin

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\rho_0 V}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial V}=V\left(\frac{\rho_0}{\rho V}\right)'_V\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{1}$$

unde $\varphi$ este potențialul vitezelor, $\psi$ funcția de curent, $V$ modulul vitezei, $\theta$ unghiul făcut de viteză cu axa $Ox$, iar $\rho$ și $\rho_0$ valorile densității într-un punct oarecare din fluid și respectiv în punctul de viteză nulă.

Introducînd variabila

$$\sigma=\sigma_1+\int_{V_1}^{V}\frac{\rho}{\rho_0 V}\,dV, \tag{2}$$

$\sigma_1$ fiind o constantă ce se va determina ulterior, acest sistem devine

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=\frac{\rho_0 V^2}{\rho}\left(\frac{\rho_0}{\rho V}\right)'_V\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{1'}$$

Se știe că în metoda sa aproximativă Ciaplîghin face ipoteza că

$$K(V)=-\frac{\rho_0 V^2}{\rho}\left(\frac{\rho_0}{\rho V}\right)'_V=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\equiv 1, \tag{3}$$

$c$ fiind viteza de propagare a sunetului.

Vom avea deci de considerat un fluid fictiv care satisface la o lege de compresibilitate liniară, ce înlocuiește legea adiabatică reală și care poate fi scrisă sub forma [10]—[11]

$$p-\tilde{p}_0=-\tilde{\rho}_0^2\,\tilde{c}_0^2\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\tilde{\rho}_0}\right), \tag{4}$$

$\tilde{p}_0$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{c}_0$ fiind valorile corespunzătoare ale presiunii densității și vitezei sunetului în punctul de viteză nulă.

Sistemul (1) devine atunci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{5}$$

Rezultă deci că $f=\varphi+i\psi$ este o funcție analitică de $\omega=\theta+i\sigma$ și prin urmare ea este analitică și față de

$$\Omega=e^{\sigma-i\theta}=\lambda e^{-i\theta}. \tag{6}$$

Formula de trecere la planul fizic

$$dz=\frac{e^{i\theta}}{V}\left(d\varphi+i\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho}\,d\psi\right),$$

se va scrie, ținînd seama de formulele lui Ciaplîghin [1],

$$\frac{1}{V} = C_1 e^{-\sigma} + C_2 e^{\sigma},$$
$$\frac{\widetilde{\rho}_0}{\rho V} = C_1 e^{-\sigma} - C_2 e^{\sigma}, \tag{7}$$

sub forma

$$dz = C_1 e^{-\sigma+i\theta}\, df + C_2 e^{\sigma+i\theta}\, \overline{df},$$

unde $C_1$ și $C_2$ sînt două constante a căror valoare depinde de varianta aleasă. Sau, folosind relația (6),

$$dz = C_1 \frac{df}{\Omega} + C_2 \overline{\Omega\, df}. \tag{8}$$

Dar cum rezultă din (7) că

$$C_1 = \frac{e^{\sigma}}{2V}\left(1 + \frac{\widetilde{\rho}_0}{\rho}\right), \quad C_2 = \frac{e^{-\sigma}}{2V}\left(1 - \frac{\widetilde{\rho}_0}{\rho}\right), \tag{9}$$

relația (8) devine:

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{2V}\left[\left(1 + \frac{\widetilde{\rho}_0}{\rho}\right) df + \left(1 - \frac{\widetilde{\rho}_0}{\rho}\right) \overline{df}\right]. \tag{10}$$

Vom calcula acum din (4) viteza sunetului:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\widetilde{\rho}_0^2 \widetilde{c}_0^2}{\rho^2}$$

și deci

$$\frac{\rho}{\widetilde{\rho}_0} = \frac{\widetilde{c}_0}{c}. \tag{11}$$

Diferențiind relația (2) (unde $\rho_0$ devine acum $\widetilde{\rho}_0$) și folosindu-ne de (11) rezultă

$$d\sigma = \frac{\widetilde{c}_0}{c} \frac{dV}{V}.$$

Se știe că

$$c^2 = \widetilde{c}_0^2 + V^2 \tag{12}$$

și deci

$$dV = \frac{c\, dc}{V}.$$

Atunci

$$d\sigma = \widetilde{c}_0 \frac{dc}{c^2 - \widetilde{c}_0^2}$$

și rezultă imediat prin integrare

$$e^{\sigma} = k \sqrt{\frac{c - \tilde{c}_0}{c + \tilde{c}_0}}, \tag{13}$$

$k$ fiind o constantă ce se va determina ulterior.

Este de remarcat faptul, important pentru cele ce urmează, că

$$e^{\sigma} < k. \tag{14}$$

Un calcul simplu ne va conduce apoi la

$$\frac{e^{i\theta}}{2V}\left(1 + \frac{\tilde{\rho}_0}{\rho}\right) = \frac{k}{2\tilde{c}_0 e^{\sigma - i\theta}},$$

$$\frac{e^{i\theta}}{2V}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}_0}{\rho}\right) = -\frac{e^{\sigma + i\theta}}{2\tilde{c}_0 k},$$

relații care înlocuite în (10) ne dau pentru formula de trecere la planul fizic relația:

$$dz = \frac{1}{2\tilde{c}_0}\left(\frac{k\,df}{\Omega} - \frac{\overline{\Omega\,df}}{k}\right). \tag{15}$$

Comparînd cu (8) rezultă:

$$C_1 = \frac{k}{2\tilde{c}_0}, \qquad C_2 = -\frac{1}{2k\tilde{c}_0}. \tag{16}$$

Să punem

$$e^{\sigma} = k e^{s}, \tag{17}$$

ceea ce conduce de la relația (15) la relația

$$dz = \frac{1}{2\tilde{c}_0}\left(\frac{df}{\Omega^{\star}} - \overline{\Omega^{\star}\,df}\right), \tag{18}$$

cu

$$\Omega^{\star} = e^{s - i\theta}.$$

Variabila $s$ introdusă prin relația (17) este chiar variabila Riabouchinsky-Leibenson [12], [13] definită de

$$s = s_1 + \int_{V_1}^{V} \frac{\sqrt{1 - M^2}}{V}\,dV, \tag{19}$$

$M = \dfrac{V}{c}$ fiind numărul lui Mach.

Într-adevăr

$$ds = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{V}\,dV$$

și ținînd seama că în cazul aproximației lui Ciaplîghin relația (3) ne dă

$$\sqrt{1 - M^2} = \frac{\rho}{\tilde{\rho}_0},$$

rezultă

$$ds = d\sigma,$$

relație echivalentă cu (17).

Urmează că formula (18) coincide cu cea scrisă de Richter și Müller [7]. Avantajul formulei (15), adică al formulei (8), față de (18) constă în posibilitatea de a lua în considerare toate cele trei variante ale metodei lui Ciaplîghin.

În plus punînd

$$\Omega = \frac{dG}{d\tau},$$

$G(\tau)$ fiind potențialul complex al unei mișcări incompresibile în planul $\tau$, și determinînd în mod potrivit constantele $C_1$ și $C_2$ ajungem la modul de prezentare a metodei lui Ciaplîghin datorat lui Hristianovici și Juriev [6].

**3.** Presupunem că mișcarea gazului lui Ciaplîghin are loc într-un domeniu $D$ exterior curbei $C$ din planul $z$. Prin relația (8) acestui domeniu îi corespunde un domeniu $D_1$ din planul $\Omega$ situat în întregime la distanță finită, deoarece $|\Omega| = e^{\sigma} < k$ și astfel încît lui $z = \infty$ îi corespunde punctul $\Omega_\infty$. Introducerea unei mișcări incompresibile de bază se poate face urmînd întocmai schema lui Ciaplîghin.

Fie într-un plan $Z$ mișcarea unui fluid incompresibil în jurul unui obstacol, definită de potențialul complex $f = f(Z)$. Punînd

$$\Omega(Z) = \frac{df}{dZ}$$

vom putea determina funcția analitică $f = f(\Omega)$ integrală a sistemului (5). Atunci relația (8) ne dă imediat

$$dz = C_1\, dZ + C_2 \sqrt{\left(\frac{df}{dZ}\right)^2}\, dZ, \tag{20}$$

adică tocmai formula C. Iacob-H. S. Tsien [2], [14].

Se știe [2] în acest caz că obstacolul din planul $z$, care corespunde prin relația (20) obstacolului dat în planul $Z$, este închis numai dacă mișcarea este fără circulație.

Pentru a putea considera și mișcările cu circulație vom proceda ca Richter și Müller astfel:

Fie un domeniu $D^*$ dintr-un plan $\zeta = \xi + i\eta$ exterior unui profil $P$ în care are loc mișcarea cu circulația $\Gamma$ a unui lichid, potențialul complex al mișcării fiind $f = f(\zeta)$. Vom reprezenta domeniul $D_1$ pe $D^*$ astfel

încît $\Omega_\infty$ să corespundă lui $\zeta = \infty$ iar axele reale să coincidă, adică vom pune

$$\Omega = \lambda_\infty \left(1 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots\right), \tag{21}$$

unde

$$\lambda_\infty = |\,\Omega_\infty\,|\,.$$

Viteza complexă a mișcării fluidului incompresibil are în vecinătatea punctului de la infinit dezvoltarea

$$W(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} = V_\infty \left(1 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots\right), \tag{22}$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty i}. \tag{23}$$

Introducînd [7] funcția

$$h(\zeta) = \frac{\Omega(\zeta)}{W(\zeta)} \tag{24}$$

(urmărind de altfel ideea lui C. C. Lin [3]), funcție ce admite în vecinătatea lui $\zeta = \infty$ dezvoltarea

$$h(\zeta) = \frac{\lambda_\infty}{V_\infty} \left(1 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \frac{\beta_2}{\zeta^2} + \dots\right), \tag{25}$$

formula (8) devine :

$$dz = C_1 \frac{d\zeta}{h(\zeta)} + C_2 \overline{h(\zeta) \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta}. \tag{26}$$

Această formulă face să corespundă exteriorul lui $P$ exteriorului unei curbe $C$ din planul $z$ în care are loc mișcarea fluidului lui Ciaplîghin. Elementele mișcării acestui fluid vor fi date, ținînd seama de formulele lui Ciaplîghin (7), de :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= C_1 \frac{1}{\left|\dfrac{df}{d\zeta} h(\zeta)\right|} + C_2 \left|\frac{df}{d\zeta} h(\zeta)\right|, \\ \frac{\widetilde{p}_0}{\rho V} &= C_1 \frac{1}{\left|\dfrac{df}{d\zeta} h(\zeta)\right|} - C_2 \left|\frac{df}{d\zeta} h(\zeta)\right|, \\ \theta &= -\arg \Omega = -\left[\arg h(\zeta) + \arg \frac{df}{d\zeta}\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

4. Să găsim condițiile în care transformarea (26) este reversibilă. Aceasta se poate scrie sub forma

$$z = p(\zeta) + \overline{q(\zeta)}, \tag{28}$$

unde $p(\zeta)$ și $q(\zeta)$ sînt două funcții analitice definite în $D^* + P$ astfel încît

$$p'(\zeta) = \frac{C_1}{h(\zeta)}, \quad q'(\zeta) = C_2 h(\zeta) \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2.$$

*a*) Determinantul funcțional al transformării (28)

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\zeta, \eta)} = |p'(\zeta)|^2 - |q'(\zeta)|^2$$

are expresia :

$$\Delta = \frac{1}{|h(\zeta)|^2} \left(C_1^2 - C_2^2 \left|\frac{df}{d\zeta} h(\zeta)\right|^4\right) \tag{29}$$

și în punctul de la infinit se reduce la

$$\Delta_\infty = \frac{V_\infty^2}{\lambda_\infty^2} (C_1^2 - C_2^2 \lambda_\infty^4).$$

Vom presupune acum că punctul în care $V = V_1$, $V_1$ fiind valoarea ce figurează în (2), este punctul de la infinit și vom alege după Demtchenko [15] constanta $\sigma_1$, astfel încît $e^{\sigma_1} = V_\infty$.

Vom avea atunci $\lambda_\infty = V_\infty$, relațiile (9) devin :

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_\infty}\right) > 0, \quad C_2 = \frac{1}{2V_\infty^2}\left(1 - \frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_\infty}\right)^2 < 0 \tag{30}$$

și rezultă

$$\Delta_\infty = \frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_\infty} > 0.$$

Pentru ca transformarea (26) să fie reversibilă este deci necesar ca $\Delta > 0$ în domeniul $D$, ceea ce revine la

$$\left|h(\zeta) \frac{df}{d\zeta}\right| < \sqrt{\frac{C_1}{|C_2|}}. \tag{31}$$

Vom arăta pe baza relațiilor stabilite anterior că această inegalitate este întotdeauna satisfăcută.

Într-adevăr,

$$\left|h(\zeta) \frac{df}{d\zeta}\right| = |\Omega(\zeta)| < k \tag{32}$$

așa cum rezultă din (14).

Pe de altă parte, cum în virtutea relației (11)

$$\frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_\infty} = \frac{\widetilde{c}_\infty}{\widetilde{c}_0}, \tag{33}$$

rezultă din (30) că

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_\infty. \tag{34}$$

Introducînd apoi în relația cunoscută dedusă din (30)

$$C_1 + C_2 V_\infty^2 = 1, \tag{35}$$

valorile (16) ale constantelor $C_1$ și $C_2$, rezultă

$$k^2 - 2\widetilde{c}_0 k - V_\infty^2 = 0.$$

Rădăcina pozitivă a acestei ecuații (ținînd seama de faptul că $C_1 > 0$) ne va da valoarea lui $k$:

$$k = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_\infty. \tag{36}$$

Astfel, inegalitatea (29) este verificată.

*b*) Condiția de închidere a profilului din planul $z$

$$\oint dz = 0,$$

adică

$$C_1 \oint_P \frac{d\zeta}{h(\zeta)} + C_2 \overline{\oint_P h(\zeta) \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta} = 0,$$

devine, ținînd seama de dezvoltările (21) și (25):

$$C_1 \frac{V_\infty}{\lambda_\infty} \oint_P \left(1 - \frac{\beta_1}{\zeta} + \ldots\right) d\zeta + C_2 \lambda_\infty V_\infty \overline{\oint_P \left(1 + \frac{2\alpha_1 + \beta_1}{\zeta} + \ldots\right) d\zeta} = 0$$

și teorema reziduurilor ne dă imediat

$$C_1 \beta_1 + C_2 V_\infty^2 \overline{2\alpha_1 + \beta_1} = 0. \tag{37}$$

De aici rezultă

$$\beta_1 = 2V_\infty^2 \frac{C_2^2 \alpha_1 V_\infty^2 - C_1 C_2 \bar{\alpha}_1}{C_1^2 - C_2^2 V_\infty^4}$$

și ținînd seama de expresia (23) a lui $\alpha_1$ rezultă că reziduul funcției $h(\zeta)$ trebuie să aibă expresia

$$\beta_1 = \frac{\Gamma V_\infty}{\pi i} \frac{C_2^2 V_\infty^2 + C_1 C_2}{C_1^2 - C_2^2 V_\infty^4}. \tag{38}$$

*c*) Corespondența punctelor de la infinit va rezulta de asemenea imediat. Din

$$dz = C_1\left(1 - \frac{\beta_1}{\zeta} + \ldots\right) d\zeta + C_2 V_\infty^2 \left(1 + \frac{\overline{2\alpha_1 + \beta_1}}{\zeta} + \ldots\right) d\zeta$$

rezultă :

$$z = C_1\zeta + C_2 V_\infty^2 \bar{\zeta} + [C_2 V_\infty^2 \overline{(2\alpha_1 + \beta_1)} - C_1\beta_1] \log|\zeta| -$$

$$- i[C_1\beta_1 + C_2 V_\infty^2 \overline{(2\alpha_1 + \beta_1)}] \arg\zeta + O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),$$

ceea ce ținînd seama de relația (37) devine :

$$z = C_1\zeta + C_2 V_\infty^2 \bar{\zeta} + [C_2 V_\infty^2 \overline{(\beta_1 + 2\alpha_1)} - C_1\beta_1] \log|\zeta| + O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),$$

adică punctele de la infinit se corespund.

Fie atunci funcția $h(\zeta)$ analitică în $D^* + P$ cu reziduul dat de relația (38), ceilalți coeficienți ai dezvoltării (25) fiind astfel încît $h(\zeta) \neq 0$ în $D^*$.

Dacă punctul de afixă $z$ dat de (28) descrie în sens direct un contur $C$ atunci cînd punctul de afixă $\zeta$ descrie conturul $P$ în același sens, toate condițiile teoremei lui C. Iacob sînt îndeplinite. Sîntem astfel asigurați că transformarea este reversibilă. Unui punct din $D^*$ îi corespunde un punct din $D$ și reciproc.

Primită la redacție la 1 iulie 1962

## ОБ ОБОБЩЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА НА ДОЗВУКОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

### РЕЗЮМЕ

В работе исследуются некоторые проблемы, связанные с применением приближенного метода Чаплыгина к движениям с циркуляцией.

В первой части указывается, каким образом можно включить результаты работы [7] в более общую схему, изложенную в [9], [10], в которой метод Чаплыгина может появиться во всех трех известных вариантах. Устанавливается связь между переменными, использованными в различных изложениях. Затем, на основе полученных результатов, указывается на возможность применения теоремы обратимости, установленной в [8], при менее сильных условиях.

# SUR L'EXTENSION DE LA MÉTHODE APPROXIMATIVE DE TCHAPLYGUINE AUX MOUVEMENTS SOUS-SONIQUES À CIRCULATION

RÉSUMÉ

L'auteur étudie des problèmes concernant l'application de la méthode approximative de Tchaplyguine aux mouvements avec circulation.

Dans la première partie, il indique comment peuvent être encadrés les résultats du travail [7] dans le schéma, plus général, exposé dans [9] et [10], dans lequel la méthode de Tchaplyguine peut apparaître avec toutes les trois variantes connues. Il détermine la relation entre les variables utilisées dans différents exposés. Puis, se fondant sur les résultats obtenus, il montre la possibilité d'application du théorème de réversibilité établi dans [8] dans des conditions moins restrictives.

## BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Чаплыгин, *О газовых струях*. Ан. моск. унив., мат. -физ., 21, 1—121 (1904).
2. C. Iacob, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles*. Portugaliae Mathematica, **1**, 209—257 (1939).
3. C. C. Lin, *On an extension of the von Kármán — Tsien method to two dimensional subsonic flow with circulation around closed profiles*. Quart. Appl. Math., **4**, 291—297 (1946).
4. A. Gilbarg, *On subsonic compressible flows by a method of correspondence*. Technical Notes NACA, *1170* (1947).
5. J. Leray, *Fluides compressibles. Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode approchée de Tchaplyguine*. J. Math. pures et appl., 9e série, **28**, 181—191 (1949).
6. С. А. Христианович, И. М. Юрьев, *Обтекание крылового профиля при докритической скорости потока*. Прикладная математика и механика, **11**, 105—118 (1947).
7. H. Richter, W. Müller, *Zur Tschaplyginschen Hodographen methode bei Unterschallstrommungen mit Zirkulation*. Z. Angew. Math. Mech., **35**, 1—11 (1955).
8. C. Iacob, *Sur la réversibilité de la transformation de Tchaplyguine*. Rev. math. pures et appl., Acad. R.P.R., **VI**, 25—30 (1961).
9. S. Gogonea, *Asupra mişcării subsonice cu circulaţie a fluidelor compresibile*. Com. Acad. R.P.R., **XII**, *3*, 289—293 (1962).
10. C. Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
11. — *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Edit. Acad. R.P.R. — Gauthier Villars, Bucureşti-Paris, 1959.
12. D. Riabouchincky, *Mouvement d'un fluide compressible autour d'un obstacle*. C.R. Acad. Sci. Paris, **194**, 1215—1217 (1932).
13. Л. С. Лейбензон, *О теории движения газов*. ДАН СССР, **III**, *9* (1935).
14. H. S. Tsien, *Two dimensional subsonic flow of a compressible fluid*. J. Aeronaut. Sci., **7**, 399—407 (1939).
15. B. Demtchenko, *Sur les mouvements lents des fluides compressibles*. C.R. Acad. Sci. Paris, **194**, 1218—1220 (1932).

# ASUPRA UNEI CLASE DE RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ BISTABILE ALE UNUI SEMIGRUP

DE

ION D. ION

**1.** Dacă $f$ și $g$ sînt două omomorfisme definite pe un inel $\mathfrak{A}$, care au același nucleu, atunci există un izomorfism de inel astfel ca $f = \varphi \circ g$. O teoremă de izomorfism asemănătoare este, de asemenea, adevărată pentru grupuri. Vom arăta mai jos că acest rezultat se poate stabili pentru semigrupuri dacă ne restrîngem la o clasă specială de omomorfisme. De aici va rezulta o legătură naturală între idealele unui semigrup și omomorfismele din clasa considerată, legătură de același tip cu aceea care se stabilește în teoria inelelor între idealele și omomorfismele unui inel, sau în teoria grupurilor între divizorii normali ai unui grup și omomorfismele sale. Rezultatele care se obțin se dovedesc utile în studiul semigrupurilor cum este, de exemplu, cazul problemelor ce privesc aspectul local al teoriei idealelor în semigrupuri. În lucrare sînt înglobate și unele rezultate ale lui D. Rees[1].

**2.** Semigrupurile care vor interveni mai jos sînt presupuse cu element zero dar nu neapărat comutative. Printr-un ideal al unui semigrup vom înțelege unul din idealele sale bilaterale.

Fie $\mathcal{D}$ un semigrup și $\Delta$ o parte a sa care cuprinde pe zero. Pe $\mathcal{D}$ definim o relație binară $\Omega_\Delta$ după cum urmează :

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D},\ x \Omega_\Delta y \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x,\ y \in \Delta.$$

Evident $\Omega_\Delta$ este o relație de echivalență.

LEMA 1. *Relația de echivalență $\Omega_\Delta$ este bistabilă dacă și numai dacă $\Delta$ este un ideal (bilateral) al lui $\mathcal{D}$.*

Demonstrație. Fie $\Delta$ un ideal al lui $\mathcal{D}$, $x,\ y \in \mathcal{D}$ astfel ca $x \Omega_\Delta y$. Dacă $x = y$, atunci $sx = sy$ pentru orice $s \in \mathcal{D}$ și deci $sx\ \Omega_\Delta\ sy$. În cazul $x \neq y$ avem $x,\ y \in \Delta$ și deci $sx,\ sy \in \Delta$. Rezultă $sx \Omega_\Delta sy$. Analog, din $x \Omega_\Delta y$ rezultă $xs \Omega_\Delta ys$ pentru orice $s \in \mathcal{D}$.

Reciproc, să presupunem că $\Omega_\Delta$ este o relație bistabilă și fie $s \in \mathcal{D}$, $x \in \Delta$. Cum $0 \in \Delta$, avem $x \Omega_\Delta 0$ de unde $sx \Omega_\Delta 0$, deci $sx \in \Delta$ și $\Delta$ este un ideal la stînga. La fel se arată că este un ideal la dreapta.

Vom spune că $\Omega_\Delta \leqslant \Omega_{\Delta'}$ dacă ori de cîte ori avem $x \Omega_\Delta y$, atunci avem și $x \Omega_{\Delta'} y$.

LEMA 2. *Avem*

$$\Delta \subseteq \Delta' \Leftrightarrow \Omega_\Delta \leqslant \Omega_{\Delta'}$$

*și*

$$\Delta = \Delta' \Leftrightarrow \Omega_\Delta = \Omega_{\Delta'}.$$

Este știut că mulțimea $\Phi$ a tuturor relațiilor de echivalență definite pe o mulțime $M$ formează o latice completă; dacă $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o parte oarecare a lui $\Phi$, notăm $\inf\limits_\alpha \{E_\alpha\} = \bigwedge\limits_\alpha E_\alpha$ și $\sup\limits_\alpha \{E_\alpha\} = \bigvee\limits_\alpha E_\alpha$ care sînt definite astfel:

$$1^\circ \quad \forall\, x, y \in M, \qquad x \bigwedge_\alpha E_\alpha\, y \Leftrightarrow x\ E_\alpha\, y, \quad \forall\, \alpha \in A;$$

$$2^\circ \quad \forall\, x, y \in M,\ x \bigvee_\alpha E_\alpha\, y \Leftrightarrow \exists\ E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n} \in \{E_\alpha\}$$

și $z_1, z_2, \ldots z_{n+1} \in M$ astfel ca $z_i\ E_{\alpha_i}\ z_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$ și $x = z_1$, $y = z_{n+1}$.

Vom demonstra

TEOREMA 1. *Mulțimea $\Lambda$ a tuturor relațiilor de echivalență bistabile $\Omega_{\mathfrak{A}}$ definite pe semigrupul $\mathcal{D}$ formează o sublatice completă a lui $\Phi$, izomorfă cu laticea $\mathcal{L}$ a idealelor lui $\mathcal{D}$.*

Teorema 1 este o consecință imediată a lemelor 1 și 2 precum și a următoarelor două leme:

LEMA 3. *Dacă $\mathfrak{A}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ sînt ideale ale lui $\mathcal{D}$, atunci*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_i}} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_{\alpha_i}}.$$

Demonstrația o facem pentru $n = 2$. Fie $x(\Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_1}} \vee \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_2}})y$. Deci există $z \in \mathcal{D}$ astfel ca $x \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_1}} z$ și $z \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_2}} y$. Presupunem $x \neq z$, $z \neq y$. Atunci $x, z \in \mathfrak{A}_{\alpha_1}$; $z, y \in \mathfrak{A}_{\alpha_2}$ și deci $x, y \in \mathfrak{A}_{\alpha_1} \cup \mathfrak{A}_{\alpha_2}$, de unde $x(\Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_1} \cup \mathfrak{A}_{\alpha_2}})\, y$. Asemănător și celelalte cazuri. Reciproca va fi demonstrată într-un cadru mai larg în lema 4.

LEMA 4. *Dacă $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o familie oarecare de ideale ale lui $\mathcal{D}$, atunci*

$$(\alpha^\circ) \quad \bigwedge_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha} = \Omega_{\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{A}_\alpha},$$

$$(\beta^\circ) \quad \bigvee_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha} = \Omega_{\bigcup\limits_\alpha \mathfrak{A}_\alpha}.$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $x, y \in \mathcal{D}$, $x(\bigwedge_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha})\, y$. Dacă $x = y$, atunci avem $x(\Omega_{\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha})\, y$. Dacă $x \neq y$, cum $x \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha} y$ pentru orice $\alpha \in A$, avem $x, y \in \mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \in A$, deci $x, y \in \bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ de unde $x(\Omega_{\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha})\, y$. Așa că $\bigwedge_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha} \leqslant \Omega_{\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha}$. Fie acum $x(\Omega_{\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha})\, y$. Dacă $x = y$, atunci $x(\bigwedge_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha})\, y$, iar în caz că $x \neq y$ avem $x, y \in \bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$. Deci $x, y \in \mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \in A$, adică $x\, \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha}\, y$, $\alpha \in A$. De unde $x(\bigwedge_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha})\, y$ și ($\alpha^\circ$) este demonstrată.

Dacă $x(\bigvee_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha})y$, atunci există $\mathfrak{A}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ și $z_1, \ldots, z_{n+1} \in \mathcal{D}$ astfel ca $z_i \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_i}} z_{i+1}$, pentru $i = 1, 2, \ldots n$, și $x = z$, $y = z_{n+1}$. Deci avem $x\, (\bigvee_i \Omega_{\mathfrak{A}_{(\alpha_i)}})\, y$ și după lema 3 avem și $x(\Omega_{\bigcup_i \mathfrak{A}_{\alpha_i}})y$. Cum $\bigcup_i \mathfrak{A}_{\alpha_i} \subseteq \bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$, atunci, după lema 2 avem $x(\Omega_{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha})y$. Rezultă că $\bigvee_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha} \leqslant \Omega_{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha}$.

Fie acum $x, y \in \mathcal{D}$, $x(\Omega_{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha})y$, $x \neq y$ (cazul $x = y$ este imediat). Avem $x, y \in \bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ și deci există $\alpha_1$ și $\alpha_2$ astfel ca $x \in \mathfrak{A}_{\alpha_1}$, $y \in \mathfrak{A}_{\alpha_2}$. Avem $x \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_1}} 0$, $0\, \Omega_{\mathfrak{A}_{\alpha_2}} y$ și deci $x(\bigvee_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha})y$. Rezultă că $\Omega_{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha} \leqslant \bigvee_\alpha \Omega_{\mathfrak{A}_\alpha}$ și cu aceasta și ($\beta^\circ$) este demonstrată.

Cum într-un semigrup $\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$, $\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ sînt de asemenea ideale, după lema 4 rezultă că $\Lambda$ este o sublatice completă a lui $\Phi$.

Fie $\varphi : \mathcal{L} \to \Lambda$ definită astfel:

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \Omega_{\mathfrak{A}}, \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{L}.$$

Conform lemelor 1 și 2 $\varphi$ este o bijecție iar după lema 4 avem

$$\varphi(\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha) = \bigvee_\alpha \varphi(\mathfrak{A}_\alpha),$$

$$\varphi(\bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha) = \bigwedge_\alpha \varphi(\mathfrak{A}_\alpha),$$

și deci $\varphi$ este un izomorfism. Cu aceasta teorema 1 este complet demonstrată.

**3.** Fie $\Omega_{\mathfrak{A}}$ o relație de echivalență bistabilă definită pe semigrupul $\mathcal{D}$, corespunzătoare idealului $\mathfrak{A}$. Fie $D/\Omega_{\mathfrak{A}}$ semigrupul factor relativ la $\Omega_{\mathfrak{A}}$, $\theta$ elementul său zero, $\nu_{\mathfrak{A}}$ omomorfismul canonic corespunzător. Omomorfismul $\nu_{\mathfrak{A}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{A}}$ are următoarele proprietăți caracteristice:

1° $\nu_{\mathfrak{A}}(x) = \theta$, $\forall x \in \mathfrak{A}$;

2° dacă $x, y \in \mathcal{D} - \mathfrak{A}$, atunci din $\nu_{\mathfrak{A}}(x) = \nu_{\mathfrak{A}}(y)$ rezultă $x = y$. Această observație ne conduce la următoarea

D e f i n i ț i e. *Fie $\mathcal{D}$ și $\mathcal{D}^*$ două semigrupuri și $\varphi$ un omomorfism al lui $\mathcal{D}$ în $\mathcal{D}^*$ de nucleu $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(0^*)$. Atunci, vom spune că $\varphi$ este un omomorfism perfect dacă*

$$\forall\ x, y \in \mathcal{D} - \mathfrak{n},\ \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y.$$

Dacă $\varphi$ este o surjecție, atunci vom spune că $\mathcal{D}^*$ este imagine omomorfă perfectă a lui $\mathcal{D}$.

Omomorfismul $\nu_{\mathfrak{I}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{I}}$ este perfect, semigrupul $\mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{I}}$ este imagine omomorfă a lui $\mathcal{D}$.

TEOREMA 2. *Dacă $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}^{**}$ sînt trei semigrupuri și $\varphi$, $\varphi^*$ omomorfisme perfecte definite respectiv pe $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$ și cu valori în $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}^{**}$ respectiv, atunci $\tau = \varphi^* \circ \varphi$ este un omomorfism perfect.*

Fie pentru demonstrație $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{m}$ nucleele omomorfismelor $\varphi$, $\varphi^*$, $\tau$ respectiv. Avem

$$\mathfrak{m} = (\varphi^* \circ \varphi)^{-1}(0^{**}) = \varphi^{-1}(\varphi^{*-1}(0^{**})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{n}^*) \supseteq \mathfrak{n}. \tag{1}$$

Fie $x, y \in \mathcal{D}$, $x, y \notin \mathfrak{m}$. Din (1) rezultă că $x, y \notin \mathfrak{n}$ și deci din $\varphi(x) = \varphi(y)$ rezultă $x = y$.

Dacă $\tau(x) = \tau(y)$, adică $\varphi^*(\varphi(x)) = \varphi^*(\varphi(y))$, atunci $\varphi(x) = \varphi(y)$ pentru că $\varphi(x), \varphi(y) \notin \mathfrak{n}^*$ (a se vedea (1)) și deci $x = y$.

*Observație.* Oricărui ideal $\mathfrak{n}$ al semigrupului $\mathcal{D}$ i se asociază în mod univoc o relație de echivalență bistabilă $\Omega_{\mathfrak{n}}$ și deci un omomorfism perfect $\nu_{\mathfrak{n}}$ al semigrupului $\mathcal{D}$ pe semigrupul factor $\mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}}$.

TEOREMA 3 (teorema de factorizare a unui omomorfism perfect). *Orice semigrup factor al lui $\mathcal{D}$ relativ la o relație de echivalență $\Omega_{\mathfrak{n}}$ este imagine omomorfă perfectă a lui $\mathcal{D}$ și reciproc, orice imagine omomorfă perfectă $\mathcal{D}^*$ a lui $\mathcal{D}$ este izomorfă cu un semigrup factor a lui $\mathcal{D}$ relativ la o relație de echivalență bistabilă $\Omega_{\mathfrak{n}}$.*

Prima parte a teoremei a fost deja demonstrată. Presupunem acum că $\mathcal{D}^*$ este o imagine omomorfă perfectă a lui $\mathcal{D}$ și fie $\varphi$ un omomorfism perfect $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^*$, $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(0^*)$, $\nu_{\mathfrak{n}}$ omomorfismul canonic : $\nu_{\mathfrak{n}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}}$. Diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_{\mathfrak{n}}} & & \\ \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}} & & \end{array}$$

poate fi închisă cu un izomorfism $\psi : \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}} \to \mathcal{D}^*$. Aplicația $\psi$ se definește astfel

$$\forall\, y \in \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}},\ \psi(y) = \varphi(x), \text{ unde } x \in \mathcal{D} \text{ și } \nu_{\mathfrak{n}}(x) = y.$$

Să arătăm că $\psi$ este bine definit. Să presupunem că $y = \nu_{\mathfrak{n}}(x_1) = \nu_{\mathfrak{n}}(x_2)$. Dacă $y = \theta$, atunci $x_1, x_2 \in \mathfrak{n}$ și deci $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0^*$ adică $\psi(y) = 0^*$. Dacă $y \neq \theta$, atunci $x_1, x_2 \notin \mathfrak{n}$ și din $\nu_{\mathfrak{n}}(x_1) = \nu_{\mathfrak{n}}(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$ pentru că $\nu_{\mathfrak{n}}$ este perfect. Așadar $\psi$ este bine definit.

Avem în mod evident

$$\psi(y_1 \cdot y_2) = \psi(y_1)\,\psi(y_2),\ \forall\ y_1, y_2 \in \mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{n}}.$$

Cum $\psi^{-1}(0^*) = \theta$, $\psi$ este o injecție. Ușor se vede că $\psi$ este o surjecție și în plus $\varphi = \psi \circ \nu_{\mathfrak{n}}$.

Se demonstrează ușor că $\varphi$ este un omomorfism al semigrupului $\mathcal{D}$ pe semigrupul $\mathcal{D}^*$. Atunci imaginea oricărui ideal al lui $\mathcal{D}$ prin $\varphi$ este un ideal al lui $\mathcal{D}^*$ și reciproc, imaginea inversă prin $\varphi$ a oricărui ideal al lui $\mathcal{D}^*$ este un ideal al lui $\mathcal{D}$ care înfășoară nucleul $n$ al omomorfismului $\varphi$.

Se poate stabili următorul rezultat:

TEOREMA 4. *Dacă $\varphi$ este un omomorfism perfect al semigrupului $\mathcal{D}$ pe semigrupul $\mathcal{D}^*$ de nucleu $n$, atunci există o corespondență biunivocă între idealele lui $\mathcal{D}^*$ și cele ale lui $\mathcal{D}$ care înfășoară pe $n$ astfel că, dacă $\mathfrak{A}^* = \varphi(\mathfrak{A})$, atunci $\mathfrak{A} = \varphi^{-1}(\mathfrak{A}^*)$; în plus*

$$\mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{A}} \cong \mathcal{D}^*/\Omega_{\mathfrak{A}^*}.$$

Demonstrație. Presupunem că $\mathfrak{A} \supseteq n$. Evident $\mathfrak{A} \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{A})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{A}^*)$. Fie $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{A}^*)$, atunci $\varphi(y) \in \varphi(\mathfrak{A})$. Deci $\varphi(y) = \varphi(x)$, $x \in \mathfrak{A}$. Dacă $x \notin n$, atunci $y \notin n$, căci altfel din $y \in n$ rezultă $\varphi(y) = 0^*$. Deci $\varphi(x) = 0^*$, adică $x \in n$. Însă din $x, y \notin n$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ rezultă $x = y$, de unde $y \in \mathfrak{A}$.

Dacă $x \in n$, atunci $\varphi(y) = \varphi(x) = 0^*$, deci $y \in n \subseteq \mathfrak{A}$. Am demonstrat astfel că $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{A})) \subseteq \mathfrak{A}$.

Dacă $\mathfrak{A}^* = \varphi(\mathfrak{A})$, atunci $\mathfrak{A} = \varphi^{-1}(\mathfrak{A}^*)$. Folosind această proprietate se demonstrează imediat că corespondența menționată în enunțul teoremei este biunivocă.

Fie șirul de omomorfisme perfecte

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}^* \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{A}^*}} \mathcal{D}^*/\Omega_{\mathfrak{A}^*}.$$

După teorema 2 omomorfismul $\tau = \nu_{\mathfrak{A}^*} \circ \varphi$ este perfect și cum

$$\tau^{-1}(\theta^*) = \varphi^{-1}(\nu_{\mathfrak{A}^*}^{-1}(\theta^*)) = \varphi^{-1}(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A},$$

unde $\theta^*$ este elementul zero al lui $\mathcal{D}^*/\Omega_{\mathfrak{A}^*}$, atunci după teorema 3 avem

$$\mathcal{D}/\Omega_{\mathfrak{A}} \cong \mathcal{D}^*/\Omega_{\mathfrak{A}^*}.$$

Pe linia de idei a lucrării de față teoremele de izomorfism demonstrate în [1] de D. Rees sînt imediate.

4. Definiție. *Fie $\mathcal{D}$ un semigrup comutativ cu element 0 și 1. Vom spune că semigrupul $\mathcal{D}$*

1° *are proprietatea $\mathcal{P}_1$ dacă pentru orice $c \in \mathcal{D}$, $c \neq 0$ din $ca = cb$ rezultă întotdeauna $a = b$;*

2° *are proprietatea $\mathcal{P}_2$ dacă $ab = 0$ atunci și numai atunci cînd cel puțin unul din factorii $a$ sau $b$ este zero;*

3° *are proprietatea $\mathcal{P}_3$ dacă orice $a \in \mathcal{D}$, $a \neq 0$ este o unitate a semigrupului.*

*Observație.* Dacă $\mathcal{D}$ este semigrupul multiplicativ al unui inel unitar, atunci $\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$. Printr-un exemplu foarte simplu se poate arăta că în semigrupuri $\mathcal{P}_2$ nu implică $\mathcal{P}_1$.

Fie pentru aceasta $\mathcal{D} = \{0, 1, a\}$ cu o operație algebrică ce are următoarea tablă de compunere a elementelor :

| . | 0 | 1 | $a$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $a$ |
| $a$ | 0 | $a$ | $a$ |

Se verifică imediat că $\mathcal{D}$ în raport cu această operație este un semigrup. Semigrupul $\mathcal{D}$ are proprietatea $\mathcal{P}_2$ și totuși nu are proprietatea $\mathcal{P}_1$. Într-adevăr, avem $a \cdot 1 = a \cdot a$ dar $a \neq 1$.

În treacăt observăm că pe $\mathcal{D}$ nu se poate introduce o structură de inel în care înmulțirea să fie legea de compunere a elementelor din $\mathcal{D}$ considerată mai sus.

Se demonstrează ușor

TEOREMA 5. *Semigrupul $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$ are proprietatea $\mathcal{P}_2$ dacă și numai dacă $\mathfrak{p}$ este un ideal prim al lui $\mathcal{D}$.*

Demonstrație. Să presupunem că $\mathfrak{p}$ este prim și că $a \circ b = 0$[1]) $a \neq 0$, $b \neq 0$. Deci $a \in \mathcal{D}-\mathfrak{p}$, $b \in \mathcal{D}-\mathfrak{p}$ și $ab \in \mathfrak{p}$ fapt ce contrazice ipoteza că $\mathfrak{p}$ este un ideal prim. Deci $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$ are proprietatea $\mathcal{P}_2$.

Să presupunem acum că $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$ are proprietatea $\mathcal{P}_2$. Fie $a, b, \in \mathcal{D}$, $a, b \notin \mathfrak{p}$. Deci în $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$, $a, b \neq 0$ și deci $a \circ b \neq 0$, adică în $\mathcal{D}$ $ab \notin \mathfrak{p}$ și cu aceasta este demonstrat că $\mathfrak{p}$ este un ideal prim al semigrupului $\mathcal{D}$.

Analog se demonstrează

TEOREMA 6. *Semigrupul $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{m}$ are proprietatea $\mathcal{P}_3$ dacă și numai dacă $\mathfrak{m}$ este idealul maximal al lui $\mathcal{D}$ (idealul non-unităților lui $\mathcal{D}$).*

TEOREMA 7. *Dacă $\mathcal{D}$ satisface condiția lanțurilor descendente și proprietatea $\mathcal{P}_1$, atunci are proprietatea $\mathcal{P}_3$ și reciproc.*

Demonstrație. Fie $a \in \mathcal{D}$, $a \neq 0$, și să considerăm șirul de ideale

$$(a) \geqslant (a^2) \geqslant \ldots \geqslant (a^i) \geqslant \ldots$$

Există un întreg pozitiv $n$ astfel ca $(a^n) = (a^{n+i})$, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots$ În particular $(a^n) = (a^{n+1})$ și deci

$$a^n = a^{n+1} s, \qquad s \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Evident $a^n \neq 0$ și deci în (2) putem simplifica cu $a^n$. Vom obține $1 = as$, adică $a$ este o unitate a lui $\mathcal{D}$.

Reciproca rezultă din faptul că $\mathcal{P}_3 \Rightarrow \mathcal{P}_1$ și pentru că singurul ideal propriu al unui semigrup ce satisface $\mathcal{P}_3$ este idealul zero.

TEOREMA 8. *Dacă semigrupul $\mathcal{D}$ satisface $\mathcal{P}_1$ și $\mathfrak{p}$ este un ideal prim al său, atunci $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$ satisface de asemenea proprietatea $\mathcal{P}_1$.*

---

[1] Notăm cu $\circ$ operația din $\mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$.

Fie $x, y, z \in \mathcal{D}/\Omega_\mathfrak{p}$, $x \neq 0$ astfel ca $x \circ y = x \circ z$. Dacă $y = 0$ atunci $x \circ z = 0$ și datorită teoremei 5 $z = 0$. Rămîne să mai examinăm cazul cînd $y \neq 0$, $z \neq 0$. Deci $x, y, z \notin \mathfrak{p}$ și atunci $x \circ y = xy$ $x \circ z = xz$, adică $xy = xz$ în $\mathcal{D}$, de unde $y = z$.

Primită la redacție la 7 iulie 1962

## О КЛАССЕ ДВУСТОРОННЕ СТАБИЛЬНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУГРУППЕ

РЕЗЮМЕ

На полугруппе определяется класс двусторонне стабильных эквивалентностей, которые образуют полную структуру, изоморфную структуре идеалов данной полугруппы. Гомоморфизмы полугруппы, соответствующие соотношениям эквивалентности из рассмотренного класса, связаны естественно с идеалами полугруппы, также как в теории колец гомоморфизмы кольца связаны с его идеалами.

## SUR UNE CLASSE DE RELATIONS D'ÉQUIVALENCE RÉGULIÈRES DÉFINIES SUR UN DEMI-GROUPE

RÉSUMÉ

On considère sur un demi-groupe une classe de relations d'équivalence régulières qui est munie d'une structure algébrique de treillis complet, isomorphe avec le treillis des idéaux du demi-groupe considéré. A chaque homomorphisme de demi-groupe correspond une relation d'équivalence dans la classe considérée et réciproquement. Cette liaison est de la même nature que celle qu'on établit dans la théorie des anneaux.

BIBLIOGRAFIE

1. D. REES, *On semi-groups*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **36** (1940).
2. С. Е. ЛЯПИН, *Полугруппы*. Москва, 1960.
3. O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra*. I. New York, 1958.

F. RIESZ, *Œuvres complètes*. I, II (Opere complete . I. II), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 1601 p.

Aceste două volume conţin reunite lucrările uneia dintre cele mai eminente figuri ale matematicii din secolul nostru, matematicianul maghiar F. Riesz (1880—1956), care a avut o foarte mare influenţă asupra fondării şi dezvoltării ramurilor moderne ale analizei matematice. Lucrarea de faţă este îngrijită de către Á. Császár, doctor în ştiinţe matematice, din însărcinarea Academiei de Ştiinţe a R. P. Ungare.

Volumul I începe cu o *Introducere*, în care se arată că prin publicarea colecţiei tuturor lucrărilor lui F. Riesz Academia de Ştiinţe a R. P. Ungare îndeplineşte o misiune culturală; lucrările dispersate în numeroase reviste vor deveni de acum înainte mai uşor accesibile.

Urmează o scurtă biografie a lui F. Riesz. Atît introducerea, cît şi nota biografică, sînt scrise în limbile maghiară, franceză şi germană.

După biografia lui F. Riesz se află o listă a celor 95 de lucrări ştiinţifice ale acestuia, înşirate în ordine cronologică. Se menţionează că lucrarea de faţă s-a făcut în baza extraselor lucrărilor lui F. Riesz, a căror paginare este, în parte, diferită de cea folosită în volumele originale.

Urmează in extenso lucrările lui F. Riesz (cu excepţia cărţii lui F. Riesz şi B. Szőkefalvi-Nagy „Leçons d'analyse fonctionnelle", Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952, care s-a omis în mod deliberat, pentru a nu mări prea mult dimensiunile ediţiei), însă nu în ordine cronologică, ci grupate pe discipline, astfel:

*Volumul I:*

*A.* Topologie (10 lucrări).
*B.* Teoria funcţiilor reale (18 lucrări).
*C.* Spaţii funcţionale (18 lucrări).
*D.* Funcţii analitice (8 lucrări).
*E.* Funcţii armonice şi subarmonice (6 lucrări).

*Volumul II:*

*F.* Analiză funcţională (16 lucrări, incluzînd şi cartea „Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues", Gauthier-Villars, Paris, 1913).
*G.* Teoria ergodică (8 lucrări).
*H.* Geometrie (2 lucrări, incluzînd şi teza de doctorat a lui F. Riesz).

*I.* Chestiuni diverse (8 lucrări).

Apendicele I din vol. II conține — cu contribuția autorului — lucrarea lui T. Radó „Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete", Acta Sci. Math., 1922, **23**, *1*, 240—251, în care s-a comunicat, pentru prima dată, demonstrația lui L. Fejér și F. Riesz (nepublicată de aceștia) a teoremei fundamentale a reprezentării conforme.

Apendicele II conține traducerea în limba franceză a acelor lucrări ale lui F. Riesz (în număr de 7) care au apărut numai în limba maghiară.

Ambele volume se termină cu câte o erată. Acestea conțin îndreptarea acelor erori de tipar care modifică sensul și, în plus, completarea unor lacune din raționamente. Ele nu conțin însă corectarea erorilor de tipar evidente, aceasta fiind lăsată în mod intenționat (pentru a câștiga spațiu) cititorului.

Ambele volume conțin, de asemenea, fotografii ale lui F. Riesz.

Publicarea operelor complete ale lui F. Riesz, care au îmbogățit fiecare din disciplinele *A* — *I* de mai sus cu rezultate fundamentale, constituie, fără îndoială un eveniment matematic de importanță deosebită și va aduce un serviciu prețios celor ce se ocupă de analiza matematică.

*I. Singer*

JOSÉ MORGADO, *Reticulados. Sistemas parcialmente ordenados.* (Latici, Sisteme parțial ordonate). Junta de Investigaçao Matematica, Porto, 1956, 120 p.

Această carte este nu numai o clară prezentare a noțiunilor fundamentale ale teoriei mulțimilor parțial ordonate, ci și o excelentă introducere în teoria numerelor cardinale și ordinale.

Volumul se compune din trei părți, intitulate: Noțiuni fundamentale, Lanțuri. Condiții de lanț.

În prima parte, după câteva noțiuni introductive de teoria mulțimilor, autorul dă axiomele relației de ordine parțială și definește unele noțiuni importante cum ar fi: dualitate, elemente maximale și minimale, izomorfism, diagramele lui Hasse, operații cardinale cu mulțimi parțial ordonate.

În partea a doua se introduce noțiunea de tip de ordine, studiindu-se câteva cazuri particulare; în special se caracterizează tipul de ordine $\omega$. În continuare, autorul se ocupă de suma și produsul tipurilor de ordine. Se studiază apoi mulțimile bine ordonate. În acest cadru se demonstrează principiul inducției transfinite și teorema fundamentală relativă la izomorfismul mulțimilor bine ordonate. Paginile următoare sînt consacrate numerelor ordinale și operațiilor cu aceste numere.

Partea a treia a cărții începe cu studiul condiției de lanț Jordan-Dedekind și al condiției lanțurilor ascendente (descendente).

Se demonstrează principiul inducției generalizat pentru mulțimi parțial ordonate care satisfac condiția lanțurilor descendente.

Următoarele 50 de pagini sînt consacrate teoriei mulțimilor propriu-zise. Autorul expune axioma alegerii, cu condițiile echivalente, dată de Hausdorff, Zorn și Tukey, numerele cardinale și operațiile cu ele, numere cardinale transfinite, $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, problema lui Souslin. Aici se caracterizează și tipurile ordine ale mulțimii numerelor reale. Se studiază apoi proprietățile relației

de ordine a numerelor cardinale şi se demonstrează teorema de bună ordonare a lui Zermelo. În încheiere, autorul se ocupă de problema întăririi unei relaţii de ordine parţială dată, pînă la o relaţie de bună ordonare.

Volumul este scris cu claritate şi lectura lui nu presupune cunoştinţe prealabile din partea cititorului. De altfel, numeroase exemple şi exerciţii ilustrează şi adîncesc materialul expus. Pe lîngă faptul că este un bun manual de teoria clasică a mulţimilor, lucrarea recenzată mai are calitatea de a pregăti cititorul începător în vederea înţelegerii unor chestiuni moderne de teoria mulţimilor parţial ordonate. Totodată, cartea poate fi consultată cu folos şi de către matematicienii formaţi. Recenzentul regretă faptul că încă nu a apărut volumul al doilea, care trebuia să trateze despre relaţii de echivalenţă, ideale şi teoria reprezentării mulţimilor parţial ordonate.

*S. Rudeanu*

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

*Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pentru anul 1963.*

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE, AGENȚIILE POȘTALE, FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

## LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori,** vol. I, 142 p., 8,25 lei; vol. II, 155 p., 8,55 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori** (Teoremele de descompunere ale algebrei), 619 p., 25,50 lei.

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape periodice,** 191 p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii,** 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

O. ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare,** 260 p., 11,20 lei

GH. MIHOC, V. URSEANU, **Matematici aplicate în sistematică,** 732 p., 34,70 lei.

Din

**STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE**

au apărut :

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble : nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, primele 3 n-re (nr. 1, 10 lei; nr. 2—3, 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare la

LIBRĂRIA ACADEMIEI R.P.R.

Bucureşti, Calea Victoriei nr. 27,

sau la orice librărie ştiinţifică din ţară.

Se pot comanda şi prin poştă la secţia „Cartea prin poştă"
de pe lîngă Librăria Academiei R.P.R., sau la librăria

CARTEA PRIN POŞTĂ

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerţ exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. 2 — n. 3515

**Lei 7.—**